

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 5, 2016

Задача 1. Във всяка от клетките на квадрат 3×3 е записано числото 1. Към всеки три клетки, лежащи в различни редове и различни стълбове, се прибавя едновременно 1. Може ли да се приложи това действие краен брой пъти, така че всички числа в таблицата да станат различни, а сумите по всички редове и всички стълбове да са равни? Може ли сумите на числата по диагоналите да са огледални числа?

Сава Гроздев, София, и Веселин Ненков, Бели Осъм

Решение: прилагаме действието към единия диагонал a пъти, после – b пъти към единия триъгълник със страна, успоредна на този диагонал, и след това – c пъти към другия триъгълник със страна, успоредна на същия диагонал. По този начин получаваме последователно таблиците на първата фигура.

1	1	1
1	1	1
1	1	1

a	1	1
1	a	1
1	1	a

a	b	1
1	a	b
b	1	a

a	b	c
c	a	b
b	c	a

Към втория диагонал на последната таблица прилагаме действието d пъти, после – e пъти към единия триъгълник със страна, успоредна на този диагонал, и след това – f пъти към другия триъгълник със страна, успоредна на същия диагонал. По този начин получаваме последователно таблиците на втората фигура.

a	b	c+d
c	a+d	b
b+d	c	a

a+e	b	c+d
c	a+d	b+e
b+d	c+e	a

a+e	b+f	c+d
c+f	a+d	b+e
b+d	c+e	a+f

Нека $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 10$, $e = 20$ и $f = 30$. След заместване в последната таблица получаваме.

21	32	13
33	11	22
12	23	31

Всички числа в получената таблица са различни и сумите по всички редове и стълбове са равни на 66. Следователно отговорът на първия въпрос е положителен. Сумите на числата в двата диагонала са 63 и 36. Следователно и вторият въпрос има положителен отговор.

Задача 2. В окръжност k с център O е вписан разностранен триъгълник ABC с ортоцентър H така, че точките A , B , H и O лежат на една окръжност. Да се докаже, че:

- OH е ъглополовяща на ъгъла, съседен на $\angle AHB$;
- точките O и H са симетрични относно ъглополовящата на $\angle ACB$;
- ако правата OH пресича AC и BC съответно в точките P и Q , то $OQ = OP$.

Христо Лесов, Казанлък

Решение: тъй като $\triangle ABC$ е остроъгълен и разностранен, точките O и H са различни и вътрешни за $\triangle ABC$. За определеност приемаме, че $AC > BC$. Освен това нека AH и BH пресичат съответно BC и AC в точките D и E . Тогава $\angle AEH = \angle CDH = 90^\circ$. Тъй като точките A , B , H и O лежат на една окръжност, то $\angle AHB = \angle AOB$. От друга страна, четириъгълникът $CEHD$ е вписан в окръжност и затова $\angle AHB = 180^\circ - \angle ACB$. В окръж-

ността k са изпълнени равенствата $\angle AOB = \widehat{AB}$ и $\angle ACB = \frac{\widehat{AB}}{2}$. Затова

$\angle AOB = 2 \cdot \angle ACB$ и $180^\circ - \angle ACB = 2 \cdot \angle ACB$. Следователно $\angle ACB = 60^\circ$ и $\angle AHB = \angle AOB = 120^\circ$. Ако M и N са средите съответно на страните BC и AC , то $OM \parallel AD$ и $ON \parallel BE$. Нека $OM \cap BE = K$ и $ON \cap AD = L$. Тъй като $OK \parallel LH$ и $OL \parallel KH$, четириъгълникът $OKHL$ е успоредник. От

правоъгълните триъгълници CAD и CBE следва, че $\angle CAD = \angle CBE = 30^\circ$.

Следователно $CD = \frac{1}{2} AC = CN$ и $CE = \frac{1}{2} BC = CM$. Затова

$DM = CD - CM = CN - CE = NE$. Но височините на успоредника $OKHL$ са

