

НЯКОЛКО КОНСТРУКЦИИ, ПОРОДЕНИ ОТ ПРИНЦИПА ЗА ДУАЛНОСТ

¹⁾Сава Гроздев, ²⁾Веселин Ненков

¹⁾Висше училище по застраховане и финанси – София

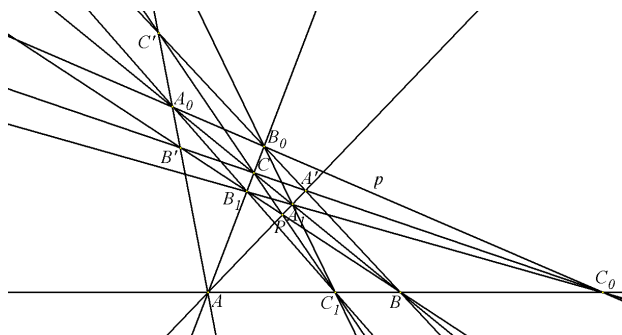
²⁾Технически колеж – Ловеч

Резюме. В статията е направен анонс за няколко геометрични конструкции, породени от принципа за дуалност и получени с помощта на компютър. Доказателствата ще бъдат изложени в следваща публикация.

Keywords: triangle; centroid; Desargues' theorem; circum curve; Euler curve; Euler line

Не е необичайна практика да се използват компютърни програми за изследване на свойствата на геометрични конструкции (Zlatanov, 2013), (Zlatanov, 2014). Тук ще разгледаме няколко конструкции, реализирани с програмата The Geometer's Sketchpad (GSP). Идеята на разглежданите конструкции е породена от принципа за дуалност в равнината на даден триъгълник (Mateev, 1977), (Grozdev & Nenkov, 2014).

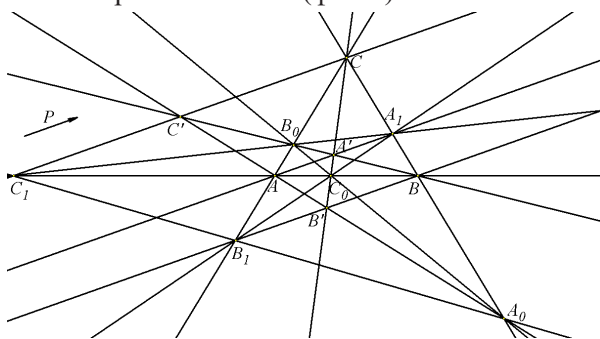
1. Едно съответствие в равнината на триъгълника. Нека P е точка в равнината на $\triangle ABC$, която не лежи върху никоя от правите BC , CA и AB . Да свържем точката P с върховете A , B и C на $\triangle ABC$, а след това да намерим пресечните точки на получените прави със срещуположните страни на съответните върхове. Така получаваме точките $A_1 = PA \cap BC$, $B_1 = PB \cap CA$ и $C_1 = PC \cap AB$. Съгласно теоремата на Дезарг, приложена за триъгълниците ABC и $A_1B_1C_1$, точките $A_0 = BC \cap B_1C_1$, $B_0 = CA \cap C_1A_1$ и $C_0 = AB \cap A_1B_1$ лежат на една права p (фиг. 1) (Mateev, 1977). По този начин на точката P еднозначно съпоставяме правата p . Сега да извършим дуалната конструкция. Свързваме пресечните точки A_0 , B_0 и C_0 на правата p (същата права, която току-що построихме) с върховете A , B и C на $\triangle ABC$. След това построяваме пресечните точки на правите AA_0 , BB_0 и CC_0 , като $BB_0 \cap CC_0 = A'$, $CC_0 \cap AA_0 = B'$ и $AA_0 \cap BB_0 = C'$ (фиг. 1). Тогава според обратната посока на теоремата на Дезарг, приложена за триъгълниците ABC и $A'B'C'$, правите AA' , BB' и CC' минават през една точка, която е точката P (фиг. 1) (Mateev, 1977). Следователно чрез дуалната конструкция на правата p съпоставяме точката P , от която се е получила тази права. Така описаните конструкции,



Фигура 1

основаващи се на теоремата на Дезарг, определят взаимно еднозначно съответствие φ в равнината на триъгълника, което на точка съпоставя права и на права съпоставя точка, т.е. изпълнени са равенствата $\varphi(P) = p$, $\varphi(p) = P$, $\varphi^2(P) = P$ и $\varphi^2(p) = p$.

При съответствието φ образът на медицентъра на триъгълника е безкрайната права на равнината му. Дуално всяка безкрайна точка P има за образ при φ някоя крайна права p . Обратно, на всяка права p , получена по този начин, е съответна безкрайна точка P (фиг. 2).

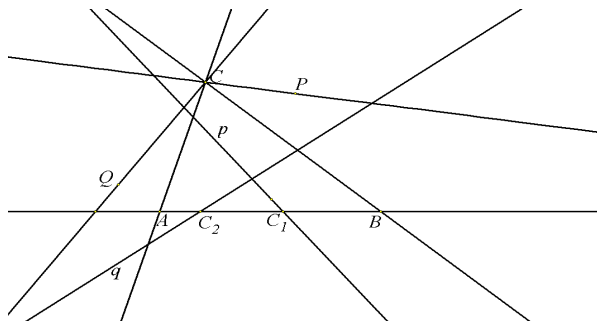


Фигура 2

Съответствието φ притежава следните свойства:

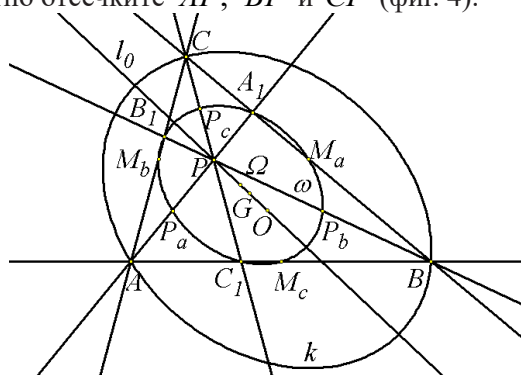
- 1) съответните точки $P = \varphi(p)$ на всички прави p , минаващи през постоянна точка C_1 от правата AB , лежат на една права през C (фиг. 3);
- 2) съответните прави $q = \varphi(Q)$ на всички точки Q , лежащи на права през C , минават през постоянна точка C_2 от правата AB (фиг. 3).

Тези свойства са изпълнени и за другите два върха, както и за другите две страни на $\triangle ABC$, но не са изпълнени за останалите точки и прави в равнината на $\triangle ABC$.



Фигура 3

2. Ойлерова крива на точка спрямо триъгълник. Нека отново P е точка в равнината на $\triangle ABC$, която не лежи върху никоя от правите BC , CA и AB , като $A_1 = PA \cap BC$, $B_1 = PB \cap CA$ и $C_1 = PC \cap AB$. С M_a , M_b и M_c означаваме съответно средите на отсечките BC , CA и AB , а с P_a , P_b и P_c – средите съответно отсечките AP , BP и CP (фиг. 4).



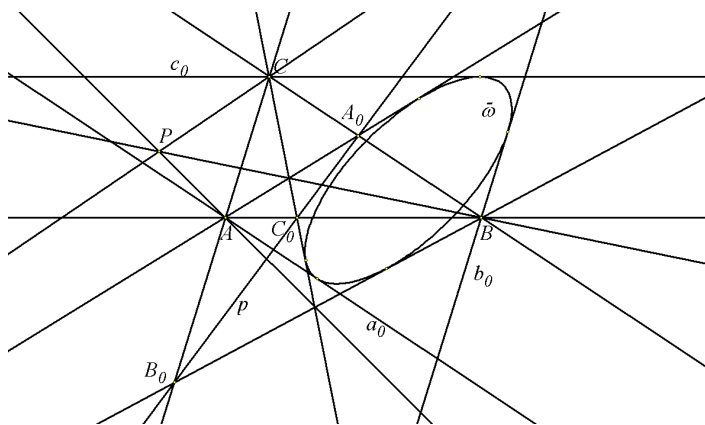
Фигура 4

Деветте точки A_1 , B_1 , C_1 , M_a , M_b , M_c , P_a , P_b и P_c лежат на една крива от втора степен ω , която наричаме крива на Ойлер за точката P спрямо $\triangle ABC$ (фиг. 4) (Grozdev & Nenkov, 2014). Ако G е медицентърът на $\triangle ABC$, а O е такава точка, че $\overline{GO} = \frac{1}{2} \overline{GP}$, то средата Ω на отсечката OP е център на ω .

Следователно точките P , O , G и Ω лежат на една права, която наричаме Ойлерова права за точката P спрямо $\triangle ABC$ (фиг. 4) (Grozdev & Nenkov, 2014). Кривата от втора степен k , която е описана около $\triangle ABC$ и има за център точката O , е хомотетична на ω . Кривите ω и k наричаме асоциирани спрямо $\triangle ABC$ (Grozdev & Nenkov, 2014).

Някои свойства на съответните при изображението φ точка P и права p , свързани с асоциираните криви k и ω , са описани в (Grozdev & Nenkov, 2015).

3. Ойлерова крива на права спрямо триъгълник. Нека p е права в равнината на $\triangle ABC$, като $p \cap BC = A_0$, $p \cap CA = B$ и $p \cap AB = C_0$. В конструкцията на кривата ω заменяме точката P с правата p . След това заменяме пресечните точки A_1 , B_1 и C_1 съответно с правите AA_0 , BB_0 и CC_0 (фиг. 5). Заменяме средите M_a , M_b и M_c с правите a_0 , b_0 и c_0 , които минават съответно през върховете A , B и C и са съответно успоредни на страните BC , CA и AB . Оказва се, че шестте прави AA_0 , BB_0 , CC_0 , a_0 , b_0 и c_0 са допирателни към крива от втора степен $\bar{\omega}$, т.е. тези прави принадлежат на крива от втори клас $\tilde{\omega}$. Кривата $\bar{\omega}$ ще наричаме *крива на Ойлер за правата p спрямо $\triangle ABC$* (фиг. 5).



Фигура 5

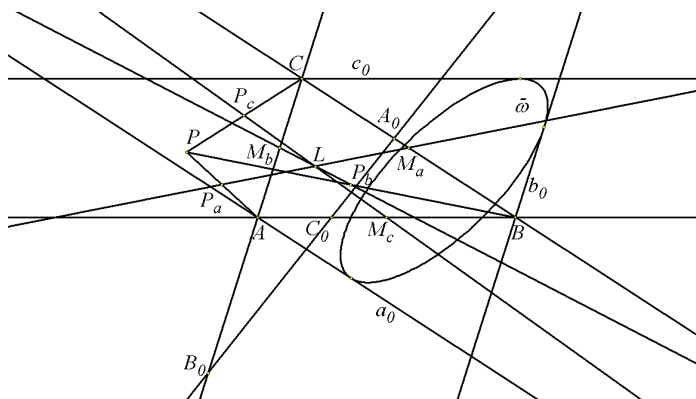
4. Две свойства на шестте основни точки на $\bar{\omega}$. Съответствието φ поставя на дадената права p определена точка P от равнината на $\triangle ABC$. Нека както преди P_a , P_b и P_c са средите на отсечките AP , BP и CP . Според една теорема на Шльомилх, когато P е ортоцентърът на $\triangle ABC$, правите M_aP_a , M_bP_b и M_cP_c се пресичат в точката на Лемоан за $\triangle ABC$ (Paskalev & Chobanov, 1985). Оказва се, че тези прави в общия случай имат връзка и с кривата на Ойлер $\bar{\omega}$.

Свойство 1. Образите на правите M_aP_a , M_bP_b и M_cP_c при φ са допирателни точки съответно на правите a_0 , b_0 и c_0 с $\bar{\omega}$ (фиг. 6).

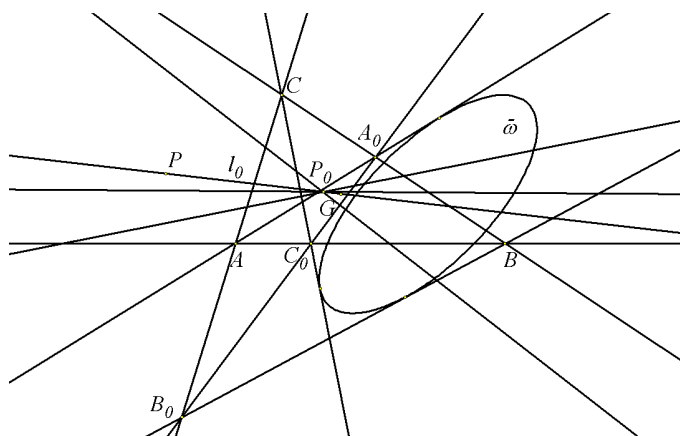
Другите три допирни точки, лежащи на $\bar{\omega}$, притежават следното свойство.

Свойство 2. Образите на допирните точки на правите AA_0 , BB_0 и CC_0 с $\bar{\omega}$ при φ са прави, минаващи през една точка P_0 от правата PG (фиг. 7).

Следователно точката P_0 лежи върху Ойлеровата права l_0 , определена от P (фиг. 7).



Фигура 6



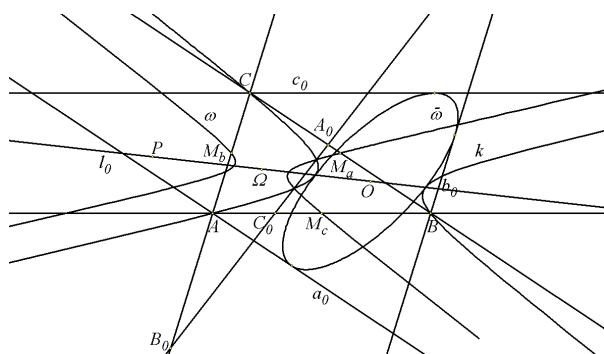
Фигура 7

5. Няколко общи свойства на Ойлеровите криви. Нека $P = \varphi(p)$ и ω е Ойлеровата крива на точката P . Ако O е центърът на $\bar{\omega}$, то точката O е симетрична на P спрямо центъра Ω на ω . Кривата k , описана за ΔABC и асоциирана с ω , има за център същата точка O . Следователно имаме следното

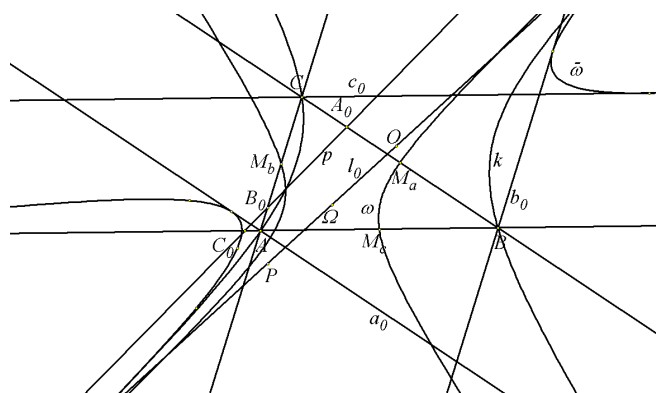
Свойство 3. Кривите k и $\bar{\omega}$ имат общ център (фиг. 8, 9, 10, 11).

Друго свойство, което свързва k и $\bar{\omega}$, е следното:

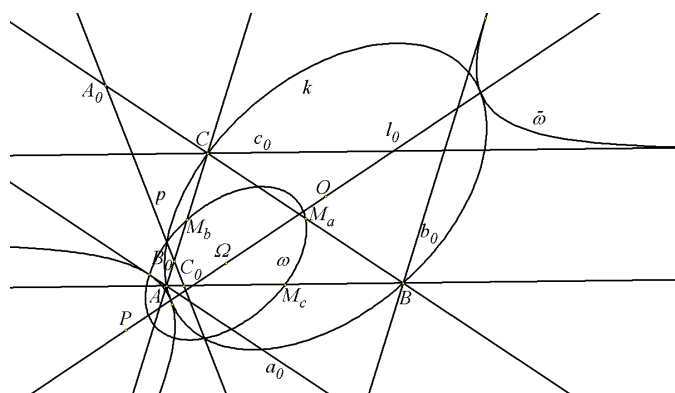
Свойство 4. Кривите k и $\bar{\omega}$ са допирателни и допирните им точки лежат върху Ойлеровата права l_0 , определена от точката P (фиг. 8,9,10,11).



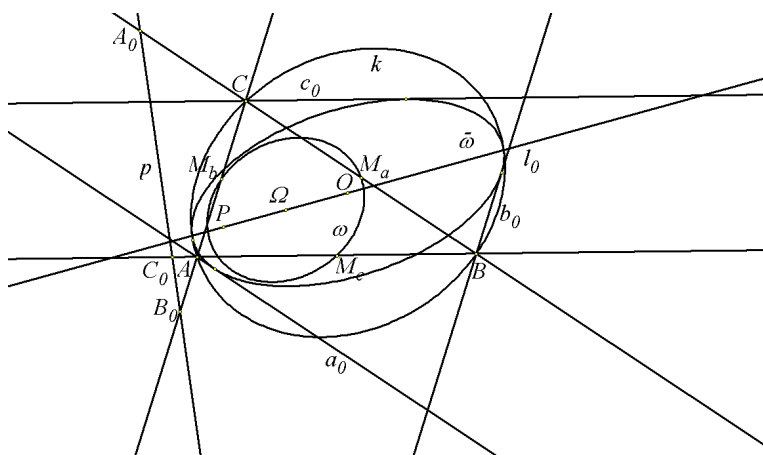
Фигура 8



Фигура 9



Фигура 10

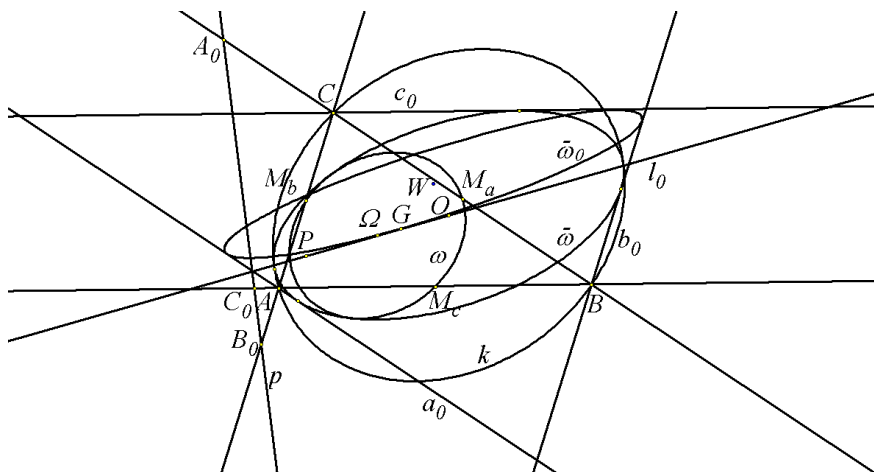


Фигура 11

На представените фигури се вижда, че Ойлеровите криви ω и $\bar{\omega}$ могат да са от различен или еднакъв вид. Затова, ако кривите ω и $\bar{\omega}$ са централни, можем да предположим, че няма специална зависимост между ω и $\bar{\omega}$, която е свързана с техния вид.

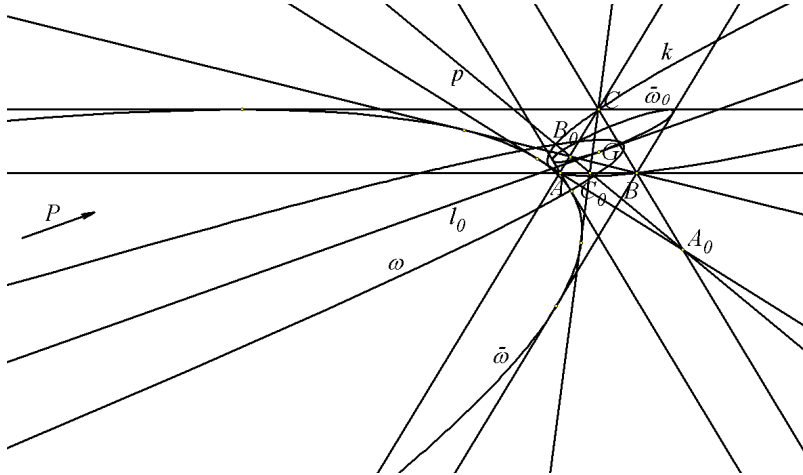
Още едно свойство, свързано с Ойлеровата права, е следното:

Свойство 5. Ойлеровата крива $\bar{\omega}_0$ на Ойлеровата права l_0 , определена от точката P , е допирателна за l_0 в медицентъра G на $\triangle ABC$ (фиг. 12).



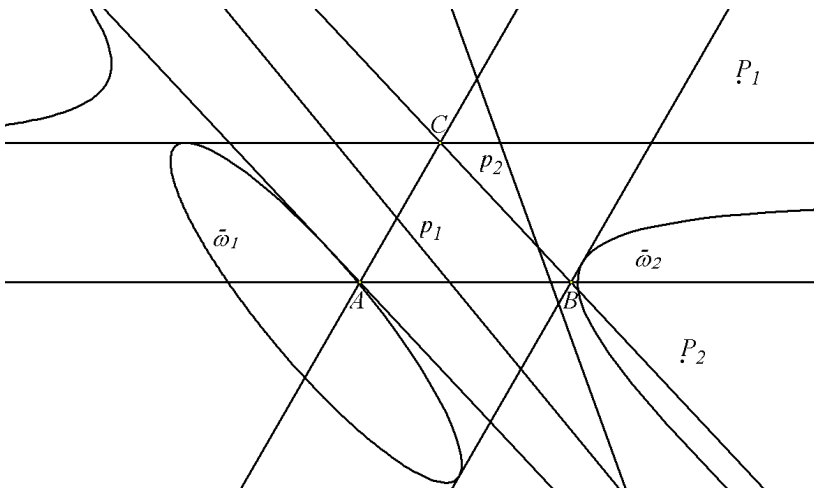
Фигура 12

Ако правата p е такава, че точката P е безкрайна, кривата $\bar{\omega}$ е парабола (фиг. 13). Всъщност в този случай всички криви k , ω и $\bar{\omega}$ са параболи. Описаните свойства остават валидни.



Фигура 13

Този случай показва, че видът на $\bar{\omega}$ зависи от положението на точката P в равнината на $\triangle ABC$. По-точно видът на $\bar{\omega}$ зависи от положението на точката P спрямо триъгълника, определен от правите a_0 , b_0 и c_0 (фиг. 14).



Фигура 14

Накрая трябва да се отбележи, че при някои от конструкциите принципът за дуалността е приложен само частично. Освен това всички формулирани твърдения се нуждаят от доказателства. Това ще бъде осъществено в следваща публикация.

REFERENCES/ЛИТЕРАТУРА

- Grozdev, S. & V. Nenkov (2014). Two applications of the duality principle. *Informatization of Education – 2014* (Proc. Int. Sci. Conf. with Appl., Volgograd, April 23 – 26, 2014, 268 – 271), Volgograd: “Peremena”, ISBN 978-5-9935-0324-0. [Гроздев, С. & В. Ненков. (2014). Два приложения принципа дуальности. *Информатизация образования – 2014* (Материалы международной научно-практической конференции, Волгоград, 23 – 26 апреля 2014 г., 268 – 271), Волгоград: ВГСПУ “Перемена”, ISBN 978-5-9935-0324-0.]
- Grozdev, S. & V. Nenkov (2014). Generalizations of some classical theorems of the triangle geometry. *Theoretical and applied aspects of Mathematics, Informatics and Education* (Proc. Int. Sci. Conf.). Arhangel'sk: SAFU, 35 – 54, ISBN 978-5-261-00990-0. [Гроздев, С. & В. Ненков. (2014). Обобщения некоторых классических теорем геометрии треугольника. *Теоретические и прикладные аспекты математики, информатики и образования* (Сборник материалов международной научной конференции). Архангельск: САФУ, 35 – 54, ISBN 978-5-261-00990-0.]
- Grozdev, S. & V. Nenkov (2015). Two symmetric polars and two harmonically conjugated poles. *Mathematics and Informatics*, 4, 415 – 425, ISSN 1310-2230. [Гроздев, С. & В. Ненков. (2015). Две симметрични поляри и два хармонично спрегнати полюса, *Математика и информатика*, 4, 415 – 425, ISSN 1310-2230.]
- Martinov, N. (1989). *Analytical geometry*. Sofia: Nauka i izkustvo. [Мartiнов, Н. (1989). *Аналитична геометрия*. София: Наука и изкуство.]
- Mateev, A. (1977). *Projective Geometry*. Sofia: Nauka i Izkustvo. [Матеев, А. (1977). *Проективна геометрия*. София: Наука и изкуство.]
- Modenov, P. (1969). *Analytical geometry*. Moscow: Moscow University Press. [Моденов, П. (1969). *Аналитическая геометрия*. Москва: Изд. Московского университета.]
- Pasclev, G. & I. Chobanov (1985). *Notable points in the triangle*. Sofia: Narodna Prosveta. [Паскалев, Г. & И. Чобанов. (1985). *Забележителни точки в триъгълника*. София: Народна просвета.]

- Stanilov, G. (1979). *Analytical geometry*. Sofia: Nauka i izkustvo. [Станилов, Г. (1979). *Аналитична геометрия*. София: Наука и изкуство.]
- Zlatanov, B. (2013). Some Properties of Reflection of Quadrangle about Point, *Annals. Computer Science Series*, **11**, (1), 79 – 91.
- Zlatanov, B. (2014). An Etude on one Sharygin's Problem, *Global Journal of Advanced Research on Classical and Modern Geometries*, 3, (2), 50 – 61.

SOME CONSTRUCTIONS, GENERATED BY THE DUALITY PRINCIPLE

Abstract. The paper announces some geometric constructions, generated by the duality principle and obtained by means of a computer. The proofs will be presented in a further publication.

✉ **Prof. Sava Grozdev, DSc.**

University of Finance, Business and Entrepreneurship
1, Gusla Str.
1618 Sofia, Bulgaria
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

✉ **Dr. Veselin Nenkov, Assoc. Prof.**

Technical College, Lovech
31, Sajko Saev Str.
5500 Lovech, Bulgaria
E-mail: vnenkov@mail.bg