

## ПРИЛОЖЕНИЕ НА ЛИНЕЙНАТА АЛГЕБРА В ИКОНОМИКАТА

Велика Кунева, Захаринка Ангелова  
Аграрен университет – Пловдив

**Резюме.** В статия са представени основни понятия от линейната алгебра с приложение в икономиката. Целта е да се провокират студентите в търсене на приложния характер на основните математически понятия и да бъдат улеснени при изучаването на различни приложни дисциплини, където са необходими известни математически знания и умения. Представен е елементарен пример на модела на Леонтиев, който в общия случай описва връзките между икономическите отрасли с помощта на системи линейни уравнения.

*Keywords:* matrix; determinant; inverse matrix; matrix equation; Leontiev model

### УВОД

Линейната алгебра заема централно място както в чистата, така и в приложната математика. Тя се използва за решаване на различни задачи от областта на природните науки и техниката, а също и от областта на обществените науки и икономиката. Тъй като апаратът на линейната алгебра е много добре развит, понякога нелинейни математически модели се апроксимират чрез линейни.

През тридесетте години на двадесети век американският икономист от руски произход Василий Леонтиев (1905 – 1999) започва изследването на междутрасловата структура на американската икономика. Той създава математическа теория, с която описва връзките между икономическите отрасли чрез системи линейни уравнения. Леонтиев изследва икономическия ръст на взаимоотношенията между развитите и развиващите се страни, създавайки модел на световната икономика. За съответната теория той е отличен с Нобелова награда за икономика през 1973 г. Моделът на Леонтиев продължава да се използва за моделиране на национални икономики по целия свят, а също и за моделиране на световната икономика, като цяло. Балансовият модел на Леонтиев се нарича модел „приходи – разходи“ (на англ. input-output model) и се разглежда в два варианта – затворен и отворен, в зависимост от това дали разглежданата икономика произвежда продукция само за задоволяване на производствените си нужди, или и за крайни потребители. Освен това моделът може да бъде статичен или динамичен.

Целта на настоящата бележка е да се покаже възможността за използване на основни математически понятия от линейната алгебра в икономиката. За основа са използвани лекции и упражнения по висша математика, I част, включени в учебния план на специалност „Бизнес икономика“ в Аграрния университет в Пловдив, както и приложение на математическия апарат в други изучавани дисциплини.

## МАТРИЦИ

### Основни определения

Нека  $m$  и  $n$  са естествени числа. Правоъгълна таблица, съставена от  $m \cdot n$  на брой числа, разположени в  $m$  реда и  $n$  стълба, се нарича **матрица** с размерност  $m \times n$  (или матрица от тип  $m \times n$ ). Числата в таблицата се наричат **нейни елементи**. Матриците обикновено се означават с главните латински букви  $A, B, C$  и т.н. В общия случай матрицата  $A$  с размерност  $m \times n$  се записва във вида

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

За отбелязване на матрицата (1) се използват съкратените означения  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, m; j = 1, 2, 3, \dots, n$ , където  $a_{ij}$  се наричат **елементи на матрицата**  $A$ . Елементите на матрицата са снабдени с два индекса. Първият показва номера на реда, а вторият – номера на стълба, в които е разположен съответният елемент.

Елементите  $a_1, a_2, \dots, a_k$ , където  $k = \min(m, n)$ , образуват **главния диагонал** на матрицата. Матрицата  $(a_{ij})_{m \times n}$  се нарича **правоъгълна**, ако  $m \neq n$ ; **квадратна**, ако  $m = n$ ; **диагонална**, ако е квадратна матрица, на която всички елементи извън главния диагонал са нули.

Съществуват различни видове матрици в зависимост от наличието на единици или нули в зададени позиции. Така например матрицата (1) се нарича **нулева**, ако всичките ѝ елементи са равни на нула. Нулевата матрица се означава с  $0$  или с  $0_{m \times n}$ , ако е необходимо да се укаже размерът ѝ. Матрицата е **единична**, ако е квадратна, диагонална и всичките ѝ диагонални елементи са равни на 1. Единичната матрица се означава с  $E$  или с  $I(I_n)$ , ако е необходимо да се посочи, че е с размер  $n \times n$ , например

$$E = I = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Матрица-ред** представлява правоъгълна таблица с единствен ред, например  $A = (a, b, \dots, z)$ , където  $a, b, \dots, z$  са числа или вектор-редове.

**Матрица-стълб** е правоъгълна таблица с единствен стълб, например  $A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ \dots \\ z \end{pmatrix}$ , където  $a, b, \dots, z$  са числа или вектор-стълбове.

### Операции с матрици

Нека е дадена матрицата  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ . Матрицата  $A'$  (или  $A^T$ ) се нарича **транспонирана** на матрицата  $A$ , ако редовете ѝ са стълбовете на  $A$  (респ. стълбовете ѝ са редовете на  $A$ ), т.е.  $A' = (a_{ji})_{m \times n}$ . Очевидно  $(A')' = A$ .

Ако за една квадратна матрица е изпълнено  $A' = A$ , то матрицата се нарича **симетрична**, а ако  $A' = -A$ , то тя е **полусиметрична** (матрицата  $-A$  е получена от матрицата  $A$ , като елементите ѝ са взети с противоположните им стойности).

Нека са дадени матриците  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  и  $B = (b_{ij})_{m \times n}$ . Ще считаме, че  $A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$  за всяко  $i = \overline{1, m}$  и за всяко  $j = \overline{1, n}$ . Това означава, че две матрици са равни точно тогава, когато са от един и същи тип и съответните им елементи са равни.

Под **сума на матриците**  $A$  и  $B$  се разбира матрицата  $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$ . Събирането на матрици е очевидно комутативно и асоциативно, защото се свежда до събиране на числа. Матрици с различна размерност не могат да се събират.

Под **произведение на произволно реално число  $k$  и матрицата  $A = (a_{ij})_{m \times n}$**  се разбира матрицата  $kA = (ka_{ij})_{m \times n}$ .

Нека  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  и  $B = (b_{ij})_{n \times p}$ , т.е. броят на стълбовете на първата матрица е равен на броя на редовете на втората. Под **произведение  $C = AB$  на матриците  $A$  и  $B$**  се разбира матрицата  $C = (c_{ij})_{m \times p}$   $C = (c_{ij})_{m \times p}$ , където

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}.$$

Така елементът  $c_{ij}$  е почленно произведение на  $i$ -ия ред  $a_i$  на  $A$  с  $j$ -ия стълб  $b_j$  на  $B$ . По тази причина така дефинираното (стандартно) умножение на матрици се нарича още „умножение ред по стълб“. Стандартното умножение не е комутативно, т.е.  $AB \neq BA$  в общия случай. Действително, дори ако произведението  $AB$  е определено, произведението  $BA$  може да не е определено. И още, възможно е двете произведения  $AB$  и  $BA$  да са определени и да имат еднакви размери, но да са различни.

**Пример 1.** Дадени са матриците  $A$  и  $B$ . Ако е възможно, намерете произведенията  $AB$  и  $BA$  и ги сравнете, в случай че  $A = (1, -2, 3)$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

**Решение.** Броят на стълбовете на  $A$  е равен на броя на редовете на  $B$ . Следователно матрицата  $AB$  може да се намери и  $AB = (1, -2, 3) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = (-11)$ .

Броят на стълбовете на  $B$  е равен на броя на редовете на  $A$ . Следователно матрицата  $BA$  може да се намери и  $BA = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot (1, -2, 3) = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 4 & -8 & 12 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$ .

Получаваме, че  $AB \neq BA$ , което илюстрира некомутативността на умножението.

## ДЕТЕРМИНАНТИ

### Основни определения

Една от важните числови характеристики на всяка квадратна матрица  $A$  е нейната детерминанта  $\det A$ . На всяка квадратна матрица от ред  $n$ , по-голям или равен на 2, ще съпоставим по определено правило едно число, което ще наричаме **детерминанта от  $n$ -ти ред**. Използват се следните означения за детерминанти:  $D$ ,  $\det A$ ,  $\Delta$ .

**Детерминантата от втори ред**  $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$  е число, което се пресмята по формулата  $D = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$ .

**Пример 2.** Да се пресметнат детерминантите от втори ред:

$$\text{а) } A = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } B = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}.$$

**Решение.** а)  $A = 1 \cdot 4 - 2 \cdot (-3) = 10$ ; б)  $B = -4 \cdot 5 - 0 \cdot (-1) = -20$ .

**Детерминанта от трети ред** символично се записва със символа  $\Delta$  и може да се пресмята по няколко начина. Например по **правилото на триъгълниците**:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

или **по правилото на Сарус**:

$$\begin{array}{cccccc} & \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{I} & \text{II} \\ & + & + & + & - & - \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & & & & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & = \end{array}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Чрез детерминанти може да се изрази решението на квадратна неособена система от линейни алгебрични уравнения, макар че това не се препоръчва от изчислителна гледна точка. Изобщо детерминантите намират широко теоретично (а и практическо) приложение. Възможни са различни подходи при излагане теорията на детерминантите.

**Поддетерминанта (минор)**  $D_{ij}$  на елемента  $a_{ij}$  ( $i, j=1, 2, \dots, n$ ) на детерминантата  $D$  се нарича детерминантата от  $(n-1)$ -ви ред, която се получава от  $D$  след отстраняване на  $i$ -ия ред и  $j$ -ия стълб.

**Адюнгирано количество** на елемента  $a_{ij}$  на  $D$  се нарича числото  $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$ .

## ОБРАТНА МАТРИЦА

Под **обратна матрица** на квадратната матрица  $A$  се разбира матрицата  $A^{-1}$ , удовлетворяваща равенствата  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ , където  $E$  е единичната матрица от същия ред.

Квадратната матрица  $A$  се нарича неособена (неизродена), ако  $\det A \neq 0$ , и особена (изродена), ако  $\det A = 0$ . С помощта на детерминанти се получава компактен израз за обратната матрица  $A^{-1}$  при  $\det A \neq 0$ , макар че този израз не е пригоден за практически изчисления в общия случай.

Всяка неособена квадратна матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

има единствена обратна матрица  $A^{-1}$ , която се пресмята по формулата

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

където  $A_{ij}$  са адюнгираните количества на елементите  $a_{ij}$  на детерминантата на матрицата  $A$  ( $i, j = \overline{1, n}$ ).

Не всяка квадратна матрица има обратна. Например нулевата матрица  $O$  очевидно няма обратна, тъй като  $OX = O \neq E$ . Матриците, които имат обратна матрица, се наричат **обратими** или неособени, или неизродени. На свой ред, матриците, които нямат обратна матрица, се наричат **необратими** или особени, или изродени.

**Пример 3.** Да се намери обратната матрица на дадената, ако тя съществува, където:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Решение.**  $\det A = 11 \neq 0$ ,  $A_{11} = 1$ ,  $A_{12} = -2$ ,  $A_{21} = 3$ ,  $A_{22} = 5$ ,  $A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ .

### МАТРИЧНИ УРАВНЕНИЯ

Уравнение от вида  $AX = B$  или  $XA = B$ , където  $A$  и  $B$  са известни матрици, а  $X$  – неизвестна матрица, се нарича **матрично уравнение**.

Ако  $A$  е неособена квадратна матрица от  $n$ -ти ред, а  $B$  е матрица с  $n$  реда, то матричното уравнение  $AX = B$  има единствено решение  $X = A^{-1}B$ .

Ако  $A$  е неособена квадратна матрица от  $n$ -ти ред, а  $B$  е матрица с  $n$  стълба, то матричното уравнение  $XA = B$  има единствено решение  $X = BA^{-1}$ .

## ПРИЛОЖЕНИЕ НА ЛИНЕЙНАТА АЛГЕБРА В ИКОНОМИКАТА

Икономиката, която разглежда Леонтиев, е разделена на  $n$  независими отрасли, всеки от които произвежда по един вид продукция. Част от продукцията се изразходва в процеса на самото производство, а останалата част остава като краен продукт, който трябва да задоволи нуждите на крайните потребители. Математическият модел на междуотрасловия баланс може да се изрази чрез следния матричен запис:  $X = (E - C)^{-1} \cdot D$ , където  $E$  е единичната матрица от  $n$ -ти ред. Поставената задача е следната: при известна матрица на преките разходи  $C$  и вектор на крайната продукция  $D$  да се намери векторът на общата продукция  $X$ . Чрез основните компоненти от линейната алгебра ще илюстрираме решаването на една проста икономическа система с два отрасли.

**Пример 4.** Да разгледаме отворена регионална икономика с два отрасли: животновъдство и земеделие. В таблица 1 са дадени разходите на всеки отрасъл, необходими за производството на единица от собствената му продукция и за производството на единица от продукцията на другия отрасъл. Да се определи обемът на производство на всеки един отрасъл така, че моделът да бъде балансиран.

Таблица 1

| Отрасъл        | Животновъдство | Земеделие | Пазар |
|----------------|----------------|-----------|-------|
| Животновъдство | 0.6            | 0.2       | 400   |
| Земеделие      | 0.3            | 0.5       | 300   |

**Решение.** Таблица 1 задава матрицата  $C$  на преките разходи, т.е.  $C = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}$ , а за вектора  $D$  имаме  $D = \begin{pmatrix} 400 \\ 300 \end{pmatrix}$ .

За да намерим вектора  $X$ , съдържащ стойността на общата продукция, необходима за задоволяване на производствените нужди на икономиката  $C$  и нуждите на крайния потребител  $D$ , използваме формула  $X = (E - C)^{-1} \cdot D$ .

$$\text{Пресмятаме } E - C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.3 & 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 & -0.2 \\ -0.3 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$D_{E-C} = 0,14 \neq 0$$

$$A_1 = (-1)^{1+1} \cdot 0.5 = 0.5$$

$$A_2 = (-1)^{1+2} (-0.3) = 0.3$$

$$A_1 = (-1)^{2+1} (-0.2) = 0.2$$

$$A_2 = (-1)^{2+2} \cdot 0.4 = 0.4$$

Първо намираме  $(E - C)^{-1}$ , т.е.  $(E - C)^{-1} = \frac{1}{0.14} \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$ . Заместваме във формулата  $X = (E - C)^{-1} \cdot D$  и получаваме:

$$X = \frac{1}{0.14} \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 400 \\ 300 \end{pmatrix} = \frac{1}{0.14} \begin{pmatrix} 260 \\ 240 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1857.1 \\ 1714.3 \end{pmatrix}.$$

И така, за да бъде балансирана икономиката, животновъдството трябва да произведе продукция на приблизителна стойност от 1857.1 единици, а отразът земеделие има приблизителна стойност от 1714.3 единици.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Леонтиевата система е икономическа интерпретация, отразяваща процесите на самата система и нейните отношения с отделните отрасли, природата и елементите, в които функционира. От илюстративния пример, макар и елементарен, следва, че математическите задачи не са абстрактни игри, а здраво свързани с практиката, т.е. те са породени от нея.

### NOTES/БЕЛЕЖКИ

1. [https://bg.wikipedia.org/wiki/Линейна\\_алгебра](https://bg.wikipedia.org/wiki/Линейна_алгебра)
2. <https://www.matematika.bg/visha-matematika/lineina-algebra-matrici/index.html>

## REFERENCES/ЛИТЕРАТУРА

- Ivanova, I., M. Milanova & V. Kuneva (2011). *Handbook in Applied Mathematics*. Plovdiv: Academic Press AU. (In Bulgarian).  
Leontief, W. (1986). *Input-Output Economics*, Second Edition; Oxford: University Press.

## APPLICATION OF LINEAR ALGEBRA IN ECONOMICS

**Abstract.** Basic concepts of Linear algebra are presented in the present note with application in Economics. The aim is to provoke students in searching the applied character of basic mathematical notions and facilitate them in studying various applied disciplines where certain mathematical knowledge and skills are needed. An elementary example of the Leontiev model is presented, which in the general case describes relations between economic branches by means of systems of linear algebraic equations.

✉ **Dr. Velika Kuneva, Assoc. Prof.; Ms. Zaharinka Angelova, student**  
Faculty of Economic  
Agricultural University  
12, Mendeleev Blvd.  
4000 Plovdiv, Bulgaria  
E-mail: kuneva@au-plovdiv.bg; zareto\_d\_2@abv.bg