

School for Teachers
Училище за учители

КОМПЮТЪРНИ ТРИМЕРНИ МОДЕЛИ НА СЕЧЕНИЯ – НОВ ДИДАКТИЧЕСКИ МЕТОД В ПРЕПОДАВАНЕТО ПО СТЕРЕОМЕТРИЯ

Николинка Т. Бъчварова

Математическа гимназия „Академик Кирил Попов“ – Пловдив

Резюме. Настоящата разработка е посветена на приложението на математиката за професионалното ориентиране на учениците. Разгледани са мястото и ролята на компютърни тримерни модели на сечения с многостени, използвани в обучението по стереометрия. В статията се разглежда развитието на пространственото мислене на учениците от XI клас от професионалните паралелки в МГ „Акад. К. Попов“ – Пловдив, чрез използването на динамични компютърни чертежи. Доказва се целесъобразността от използването на информационните технологии за представяне на анимирани чертежи, които повишават нагледността в сравнение със статично изработените чертежи на дъската. За илюстриране на идеите са използвани авторски примери от реалната учебна практика.

Keywords: IT technologies; 3D; dynamic geometry mean; stereometry; dynamic drawings

*Математиката е наука не толкова
за ушите, отколкото за очите.*
Гаус

Съвременното общество е информационно общество. Негов обект е не вещ или продукт, а знание, информация, която е способна да раздвижи не физическата сила на човека, а интелектуалния потенциал, който е готов за велики дела (Amirov, 2011).

Образованието и професионалната подготовка все повече се превръщат в основни фактори, определящи идентичността на всеки човек и напредъка му в обществото. Чрез нивото и качеството на своето образование и професия хората могат да управляват собственото си бъдеще. Професионалното образование и обучение осигуряват равни шансове в обществото, интегрират младия човек в социалната система чрез споделяне на общи ценности, предаване на културно наследство, изграждане на самостоятелност.

Математическа гимназия „Академик Кирил Попов“ – Пловдив, е първото средно учебно заведение в страната, което започва активно професионално обучение по професия „Системен програмист“ и професионално ориентиране в ИТ сектора (Staribratov, 2014).

В гимназията се изучават следните специалности:

- професия „Компютърен график“, специалност „Компютърна графика и дизайн“;
- професия „Системен програмист“, специалност „Системно програмиране“.

Въз основа на педагогическия си опит при работа с учениците от тези професионални паралелки мога да обобща преимуществата на професионалното образование в няколко аспекта, а именно:

- необходимостта от добра професионална квалификация в съответствие с новите икономически реалности, непрекъснато променящите се изисквания на работните места и работодателите;
- инвестициите в професионалното образование по професиите, свързани с изучаване на информационните и компютърните технологии, са много по-ефективни от възможността след завършване на средно образование без професионална подготовка;
- учениците получават стабилна подготовка за ползване на информационни и компютърни технологии;
- работа в екип;
- изграждане на умения учениците сами да вземат решения;
- възможност на учениците да прилагат получените математически знания в практиката.

Математиката е една от фундаменталните науки за всяка професия. Основната идея на обучението по математика се състои в това – да се създаде за учениците близка до реалната ситуация на една или друга професия; да могат да видят и оценят значението на получените математически знания; самостоятелно или в екип да овладеят необходимите теоретични материали и да приложат получените знания в практиката, използвайки най-новите компютърни технологии.

Методите на обучение по математика заемат едно от централните места в дидактиката и в методиката на преподаването ѝ в училище. Дидактически целесъобразното съчетаване на „традиционни“ и „съвременни“ методи на преподаване в процеса на обучение и търсенето на способности за разясняване езика и логиката на математиката е една от най-важните задачи на учителя по математика (Staribratov, 2011).

Известно е, че много често под математика се разбира съвкупност от готови, вече построени дедуктивни теории и те са „някаква застинала форма, в която няма движение“ (Lalchev & Varbanova, 2007). Но всъщност това не е

така. Абстрактните математически категории – понятия, твърдения и умозаклучения, не се овладяват, а се формират (изграждат) в съзнанието на обучаемия. Формирането на математическите знания става единствено чрез тяхното „пресъздаване“ (Lalchev & Varbanova, 2007). Не е удачно и полезно учителят само да съобщи новото знание. Знанието трябва да бъде пресъздадено от него така, че да достигне до съзнанието на ученика. Едно от средствата за пресъздаване, за визуално представяне на математическото знание като процес (създаване, развитие и приложение) е компютърната анимация, използваща динамичен образователен софтуер.

Иновациите в обучението по математика поставят приоритета върху това как да се учи, а не върху това какво да се учи. Използването на компютри в обучението по математика е застъпено в различни методически разработки. Така например Асен Рахнев и Коста Гъров в (Rahnev & Garov, 2009) предлагат изучаваните математически обекти и методи да бъдат илюстрирани със съответни компютърни програми. В момента се предлагат и много софтуерни продукти с приложение в математическото образование (Staribratov, 2011).

Съвременният ученик е необходимо да бъде заинтригуван и провокиран да мисли, за да може да развива творческите си способности и да търси и намира нестандартни решения. Реализирането на образователните цели – *изграждане на активни творчески и самостоятелни личности* с висока степен на интелектуално развитие, изисква да се използват такива форми на обучение, които да гарантират усвояване и интерпретиране на учебното съдържание, да стимулират мисловната дейност, да осигуряват мотивация и желание за учене на ученика.

Стереометрията е раздел от училищния курс по математика, в който използването на съвременни информационни компютърни технологии е задължително. Училищният курс по стереометрия изучава свойствата на геометричните фигури в пространството, за да бъдат приложени те по-късно в практиката. Едни от най-важните цели са: развитие на пространствена представа, пространствено въображение и логическо мислене, без които е невъзможно развитие на творческите способности на учениците. Развитието на пространствените представи у учениците в обучението по стереометрия е надграждане на пространствените им представи, получени в пропедевтичния курс по геометрия и планиметрия.

Чрез пространственото въображение непосредствено могат да се „видят“ геометрични факти и начините за доказването им, а логиката, която се прилага, предава точност на въображението и го направлява към създаването на чертежи, съдържащи необходимите логически връзки. Докато фактите по геометрия се изобразяват чрез чертежи на дъската или в тетрадка с точност до подобие, то фактите по стереометрия се изобразяват условно и поради това те не могат да бъдат вярно възприети без допълнително пространствено пред-

ставяне. Поради тази причина стереометрия се изучава в последните класове (XI и XII клас), когато мисленето на учениците е достатъчно развито за възприемане логиката на дедуктивното изложение.

Задачите, които се използват за формиране у учениците на тези пространствени представи, са два типа:

1. задачи за създаване на пространствени образи;
2. задачи за дейности, свързани с пространствени образи.

При преподаването на стереометрия, решавайки тези задачи, трябва да се обърне особено внимание на това, че учениците притежават слаби пространствени представи, те не умеят правилно да изобразяват триизмерно изображение в двумерната равнина на листа или на дъската, не могат да видят и по този начин да си представят начертания в равнината триизмерен геометричен чертеж. За да се избегнат тези трудности, е необходимо да се използват нагледни материали. В помощ на преподавателя са съвременните средства за обучение – компютър, мултимедиен проектор, интерактивна дъска и др. Много подходящи са компютърно създадените чрез динамичен геометричен софтуер чертежи, модели и материали, чрез които да се извършват демонстрации.

Динамичните тримерни чертежи и модели на пространствени фигури широко се използват при преподаване на нови знания, при запознаване с нови понятия, теореми и доказателства. Например при демонстрации с помощта на такива модели е удобно да се илюстрират движение на равнина (завъртане, успоредно пренасяне, перпендикулярност и др.), при изучаване на зависимости между страни и ъгли, между проекции и наклонени и т.н.

Използвайки динамични стереометрични модели в часовете по стереометрия, се достига до няколко цели, необходими за професионалното израстване на учениците, по-важните от които са (Friedman, 1984: 80):

1. развитие на пространствените представи на учениците при изучаване на стереометрията;
2. решаване на пространствени задачи;
3. изучаване свойствата на пространствените фигури;
4. построяване на пространствени тримерни сечения на многостен с равнина и др.

Особен ефект се достига при съчетаването на мултимедийни демонстрации с използването на интерактивна дъска, която се използва в урока по стереометрия. Използването на интерактивна дъска в урока по стереометрия решава веднага няколко задачи:

- демонстрация на предварително подготвени чертежи и динамични модели на фигурите и техните комбинации;
- за кратко време може да се извърши допълнително построение върху готовия чертеж на разглежданата задача, като по този начин най-ефективно се използва времето от урока;

– в интерактивен режим се създават изображения на фигури, като учениците могат да следят тяхното построяване в хода на урока.

Визуализирането на информацията, съдържаща се в условието на стереометричната задача, много често играе определена роля в процеса на нейното решаване. Правилно построен и нагледен чертеж значително помага за намирането на нужните за решаването на задачата ключови съотношения между данните и търсенето на елементи от нея, помага да се извърши изследване или анализ на решението, да се открие негов аналог в изучаваната професия. Изпълнението на нужния чертеж за по-голямата част от учениците е трудна стереометрична задача, за която са необходими няколко опита. Неправилният чертеж генерира нови хипотези, свързани понякога с явно видими противоречия. Чрез динамичните чертежи учениците могат да „видят“ ключови съотношения, които могат да покажат пътя към решението.

Учениците проявяват по-голям интерес към нова тема, която е представена чрез динамичен чертеж. Даже най-пасивните от тях с огромно желание се включват в дискусиите към нея, с интерес наблюдават чертежите и отговарят на поставените им въпроси. Разбира се, всеки динамичен модел е интересен и полезен, когато е съпроводен от обясненията на преподавателя.

Чрез следващите примери ще споделя личния си опит за създаване и демонстрации на компютърни тримерни чертежи на сечения на многостен с равнина чрез използване на динамичен геометричен софтуер *GeoGebra* (Dimkova, 2012). Анимираният чертеж и задачите не са заимствани. Те са новторски, създадени лично от мен и изпробвани на практика в часовете по стереометрия с ученици от XI^и клас, специалност „Компютърна графика“ от МГ „Акад. К. Попов“ – Пловдив.

Задачи за построяване на сечения с използването на тримерни ефекти

Задачите за построение на сечения в пространствените фигури заемат важно място в обучението по стереометрия. Чрез решаването на този вид задачи се постига по-трайно усвояване на аксиомите на стереометрията, следствията от тях, развитие на пространственото мислене. Умението да решават задачи за построение на сечения, се явява основа за изучаване на почти всички теми от курса на обучение по стереометрия. При решаването на много стереометрични задачи се използват сечения на ръбести тела с равнини. Построяването на сечения е тема от учебната програма, но обикновено предизвиква немалко затруднения у учениците.

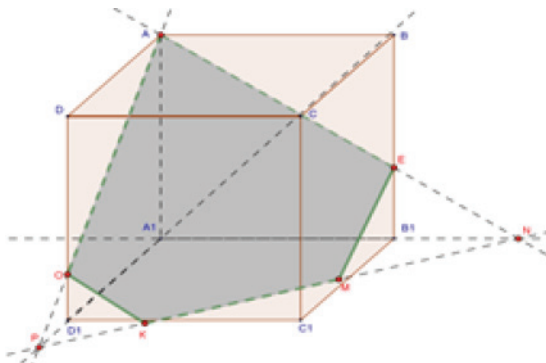
Започвайки решаването на една задача, ученикът прави обичаен чертеж – точно такъв, какъвто той вижда в учебника или на дъската.

Например призма и три точки, две от които лежат на нейните ръбове (A, K, M), през които трябва да се построи равнина, пресичаща призмата.

Задача 1. Да се построи сечение на призмата $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с равнина, минаваща през точките A, M, K , ($M \in B_1 C_1, K \in D_1 C_1$) (Dodunekov, 2002).

Построението се извършва както обикновено – построяват се прави през точките, намират се техните пресечни точки и т.н.

Обикновено такова построение е статично, т.е. разглежда се един частен случай, който характеризира определен чертеж. В съзнанието на учениците вместо многообразие от случаи, които описват изучаваната зависимост, често се запомня само статичният чертеж. Създава се противоречие между общите закономерности и конкретния чертеж,



Фигура 1

който показва само един частен случай на тази зависимост. Това води до много грешки от учениците (Friedman, 1984).

На фиг. 1 е показано вече завършеното сечение, създадено чрез динамичен тримерен чертеж използвайки компютърни технологии. Учениците могат да наблюдават всяка стъпка от построението, което има някои особености.

- Точките К и М могат произволно да се движат по страните, на които те лежат. При всяка промяна на местоположението им видът на сечението се променя. В частност, може да стане и четириъгълник.

- Ръбовете на призмата, попадайки в невидимата част от фигурата, са невидими, а във видимата част са пълтни. Това позволява да се изследва задачата в нейната пълнота.

- Благодарение на това, че ракурсът на изображението може във всеки един момент от време да се променя, този начин на демонстрация придава ново качество на решението.

- Използвайки динамичен софтуер, готовият чертеж позволява във всеки един момент построението да може да се завърти в една или друга посока. Благодарение на това може непосредствено да се види пресичат ли се двете прави в пространството, или са кръстосани, и по този начин да се избегнат едни от най-разпространените грешки, които допускат учениците – построяване на точки на пресичане на две кръстосани прави.

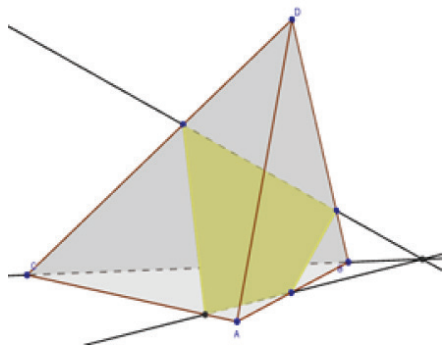
Следващият пример е за построение на сечение с тетраедър с последващо завъртане и промяна на размера му.

Задача 2. Даден е тетраедър $ABCD$. На ръбовете AB , CD и BD са дадени съответно точките M , P и N . Да се построи сечение на тетраедъра с равнината MNP .

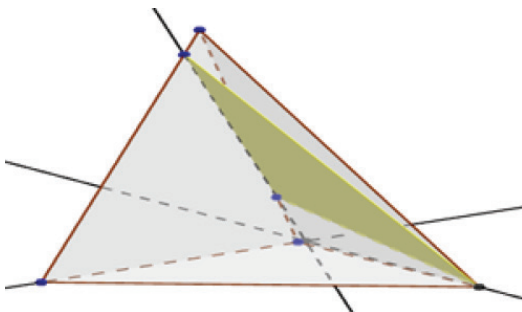
Възможностите на чертежа, като „въртене“, „наклон“, „размер“ и др., позволяват да се демонстрира пред учениците изменението на сечението в прос-

пространството. Дори тези ученици, които трудно си представят пространствени фигури, могат всичко да разберат добре.

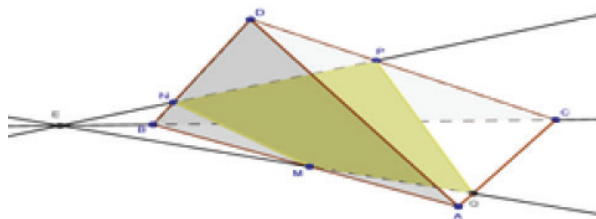
На фиг.2, фиг. 3 и фиг.4 са показани различни изгледи на динамичния модел на това сечение към задачата.



Фигура 2



Фигура 3

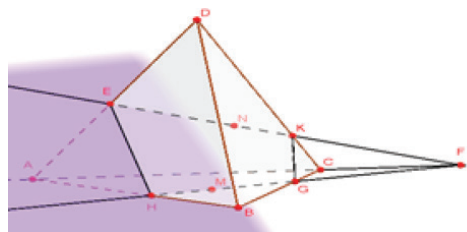


Фигура 4

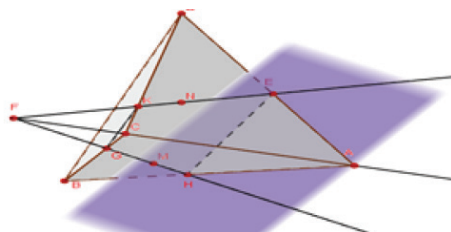
По време на демонстрациите може готовият модел да се разпъне, свие, завърти. По този начин чрез промяна на изходното положение изображението „оживява“.

Задача 3. Даден е тетраедърът $ABCD$. Точка K е от ръба DC , а точките M и N са

съответно от равнините ABC и ACD . Постройте сечение на тетраедъра с равнината MNK .



Фигура 5



Фигура 6

На фиг. 5 и фиг. 6 са показани различни анимирани компютърни изгледи на сечението, получено при пресичането на равнината MNK с тетраедъра $ABCD$.

Така полученото тримерно изображение служи като основен фактор за развитие на пространственото мислене у учениците.

Динамичната функция „Завъртане“ изключително силно помага при изучаване на темата „Сечения“, като се прилага принципът на нагледност в обучението. Учителят може да избира подходящ размер на чертежа, удобен ъгъл за наблюдение и др.

Чертежите могат да се изготвят предварително от преподавателя, като по този начин се икономисва време, което понякога не достига в урока.

Преподавателят може да копира вече готовите чертежи с цел организиране на самостоятелната работа на учениците и самоподготовката им в къщи.

Освен това, включвайки анимация на завъртане на създадената конструкция, след като сечението е построено, може да се провери правилността на построението: всички върхове на правилно построеното сечение трябва да лежат в една равнина, и следователно при някакъв ракурс те задължително попадат на една права. Ако върховете никога не попадат на една права, построението е сгрешено. Аналогично може да се контролира не само резултатът от построението, но и всяка стъпка от неговото създаване.

Примерите от зад. 1, зад. 2 и зад. 3 са особено близки за разбиране и усвояване от учениците, специалност „Компютърна графика и дизайн“. Такива тримерни анимации са база за получаване на професионални знания.

Опитът ми при работата с такъв тип демонстрации показва, че те с голямо желание се използват и от учителя, и от учениците. По думите на последните решаването на задачи за сечения чрез компютърни демонстрации е запомнящо се. Следователно една от основните цели – построяването на сечения да стане лесно, разбираемо и приятно, е изпълнена.

Заклучение. Преподаването на стереометрия е било и си остава сложна дейност. Чрез компютърните технологии всички геометрични фигури оживяват. Те могат да се изменят, копират, чертаят. По този начин учениците се научават да откриват закономерности, да изграждат хипотези, да направят своите първи открития. Особено място заемат задачите за построение на сечения на пространствените фигури, които са трудни за решаване и анализ. По време на урока за такива задачи се губи много време, а качеството на построение при учениците е достатъчно ниско. Чрез съвременния динамичен софтуер всички измервания стават точни, построенията са бързи и учениците се грижат само за алгоритъма на решаване на задачите, които после се проверяват чрез изменение на изходните данни.

Използването на динамичните модели и чертежи при преподаването по стереометрия позволява:

- да се развива пространственото мислене у учениците;
- да се повишават интересът и необходимостта за получаване на знания по стереометрия;

- да се пробужда интерес към оригинални решения на поставените задачи;
- да се формира положителен интерес към изучаване на стереометрията, повишава се успеваемостта;
- да се направи процесът на обучение по-интересен, запомнящ се и увлекателен чрез богатите мултимедийни възможности на съвременната техника;
- ефективно да се реши проблемът с нагледността на обучението, разширявайки възможностите за визуализацията на учебния материал, правейки го по-разбираем и по-достъпен за учениците;
- да се постави математическа основа за получаване на теоретични и практически знания по изучаваната професия.

Анализирайки горепосочените примери, мога да обобща дидактическите функции на динамичните компютърни чертежи.

1. Обезпечение на възможности за активно участие на учениците в конструиране метода на решение на задачите.
2. Разглеждане на частни случаи като част от разглеждания метод на решение.
3. Осигуряване на многократно повторение както на частните, така и на общите случаи от решението на задачата.
4. Осигуряване на достатъчно на брой изгледи на даден модел на геометрично тяло с цел неговото изучаване.
5. Формиране у учащите на умение да „виждат“ условия за избор на необходимото решение.

Обучението по математика на бъдещите програмисти и дизайнери от МГ „Акад. К. Попов“ – Пловдив, е инструмент за ефективно формиране на професионалноориентирани математически знания и умения, които, на свой ред, обезпечават усвояване на математическите знания в единство с тяхната приложна интерпретация; построяване на математически модели на реални процеси; изграждане на необходимата математическа база за изучаване на специалните предмети от съответната професия; реализация на творческия потенциал на ученика при изучаването на математиката.

Използването на динамични геометрични образователни ресурси е оправдано, защото позволява да се активира активността на учениците, дава възможност да се повиши качеството на обучение, да се повиши професионалното ниво на преподавателя.

Важно е бъдещите специалисти да бъдат подготвени за използването на математиката в решаването на широк кръг от проблеми, възникващи в тяхната професионална дейност.

REFERENCES/LITERATURA

- Amirov, R. (2011). *Reforma vaysshego inzhenernotekhnicheskogo obrazovaniya: izbrannoe napravlenie, problemay i perspektivy*,

Образование в техническом вузе в XXI веке. Materialay mezhhdunarodnoy nauchno prakticheskoy i obrazovatelynoy konferentsii „Sovremennaye tehnologii v sisteme srednego i vaysshego professionalnogo obrazovaniya“. Naberezhnaye Chelny. [Амиров, Р. (2011). *Реформа высшего инженернотехнического образования: избранное направление, проблемы и перспективы, Образование в техническом вузе в XXI веке.* Материалы международной научно практической и образовательной конференции „Современные технологии в системе среднего и высшего профессионального образования“. Набережные Челны.

- Dimkova, D. (2012). *Uchi i prepodavay matematika s GeoGebra*. Sofia: Vezni-4. [Димкова, Д. (2012). *Учи и преподавай математика с GeoGebra*. София: Везни-4.]
- Dodunekov, St. i dr. (2002). *Matematika za XI klas, profilirana podgotovka*. Sofia: Regalia 6. [Додунеков, Ст. и др. (2002). *Математика за XI клас, профилирана подготовка*. София: Регалия 6.]
- Lalchev, Z. & Varbanova, M. (2007). *Prepodavane ili presazdavane na matematikata v obuchenieto na studentite pedagogi*. In: Sbornik na Peta esenna nauchna konferentsiya, str. 260 – 264. [Лалчев, З. & Върбанова, М. (2007). *Преподаване или пресъздаване на математиката в обучението на студентите педагози*. В: Сборник на Пета есенна научна конференция, стр. 260 – 264.]
- Staribratov, I. (2011). *Izpolzvanе na interaktivni daski v obuchenieto po matematika. Obrazovanie i tehnologii, 2*. [Старибратов, И. (2011). *Използване на интерактивни дъски в обучението по математика. Образование и технологии, 2*.
- Staribratov, I. & Todorova, V. *Profesionalnoto obuchenie po programirane v OMG „Akad. K. Popov – Plovdiv. Natsionalna konferentsiya „Obrazovaniето i informatsionnoto obshtestvo“* [Старибратов, И. & Тодорова, В. *Професионалното обучение по програмиране в ОМГ „Акад. К. Попов“ – Пловдив. Национална конференция „Образованието и информационното общество“*]
- Staribratov, I. i kolektiv. (2014). *Matematicheskо pomagalo za profesionalno orientirane na uchenitsite ot 13 do 19 god. v sferata na informatsionnite tehnologii“*. Plovdiv: MG „Akad. K. Popov“ [Старибратов, И. и колектив. (2014). *Математическо помагало за професионално ориентиране на учениците от 13 до 19 год. в сферата на информационните технологии*. Пловдив: МГ „Акад. К. Попов“.]
- Friedman, L. (1984). *Naglyadnosty i modelirovanie v obuchenii, sp. Znanie*. Moskva. [Фридман, Л. (1984). *Наглядность и моделирование в обучении, Знание*. Москва.]

- Tursunov, D. *Zadachi optimizatsii kak sredstvo formirovaniya inzhenernogo myshleniya*. Ekaterinburg: Uralyskiy gosudarstvennauy pedagogicheskiy universitet. [Турсунов, Д. *Задачи оптимизации как средство формирования инженерного мышления*. Екатеринбург: Уральский государственный педагогический университет.]
- Bachvarova, N. & Varbanova, M. *Animated drawings in the studying of trigonometric functions in the school maths lessons*. MNK RU'16.
- Rahnev, A. & Garov, K. (2009). *Integrating mathematics and informatics content knowledge in specialized mathematics training*. Sbornik s dokladi na Shestata Sredizemnomorska konferentsiya po matematicheskoto obrazovanie MEDCONF2009. Plovdiv. [Rahnev, A. & Garov, K. (2009). *Integrating mathematics and informatics content knowledge in specialized mathematics training*. Сборник с доклади на Шестата средиземноморска конференция по математическо образование MEDCONF2009. Пловдив.]

3D COMPUTER MODELS OF MULTISTAGE SECTIONS – NEW DIDACTICAL METHOD IN TEACHING STEREOOMETRY

Abstract. The current text is dedicated to the use and benefits of mathematics for the professional development of students. Shown are the place and the role of the 3D IT models of multistaged sections, applicable in the stereometry lessons. The article refers to the development of the spatial thinking in the stereometry class in 11th grade students through the use of dynamic computer drawings. There are proven the benefits of using IT technologies for presenting animated drawings, which increase the visibility in comparison with the manual made drawings on the board. To illustrate the ideas are used real teaching examples.

✉ **Ms. Nikolinka Bachvarova**
High School of Mathematics
11, Chemshir St.
Plovdiv, Bulgaria
E-mail: n_bachvarova@mail.bg