

НЯКОИ НАЧИНИ ЗА РЕШАВАНЕ НА АЛГЕБРИЧНИ ЗАДАЧИ

Диана Стефанова

Резюме. В статията се разглеждат възможностите на някои връзки между темите в училищния курс по математика при решаването на задачи.

Keywords: problem solving; algebra; links between topics

Педагогическите проблеми на математическото образование са изследвани в работите на редица автори, като В. А. Гусев, Л. В. Кудрявцев, Л. М. Фридман, С. Гроздев, Л. Портев, И. Ганчев, Р. Маврова, В. Милушев и много други. Всички те считат като Гнеденко, че математиката се е превърнала „в изключително силно оръдие на познанието, в оръдие, позволяващо с поразителна точност да се прониква в дълбините на процесите и явленията“ (Gnedenko, 1981: 6). Затова и изучавайки математика, трябва да се акцентува на два основни проблема: връзката на различни теми в математиката и на връзката на математиката с практиката и живота. Това са проблеми, които не са нови. Редица автори в една или друга степен са акцентували върху тези проблеми и са се опитвали да ги изяснят. Основната роля е на задачите, чрез които се решават тези проблеми.

В настоящата статия ще се спрем на връзката, която може да се осъществи между теми от училищния курс по математика. Ще илюстрираме тази връзка с конкретни примери.

Пример 1. В задължителната подготовка по математика се изучават формулите

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \quad (1) \text{ и } a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \quad (2).$$

Тези формули могат да се приложат при намиране на рационални начини за решаване на някои уравнения.

Задача 1. Решете уравнението:

$$a) (3x + 5)^2 + (x + 6)^3 = 4x^2 + 1.$$

Начините за решаване на задачата са чрез разкриване на скобите, чрез прилагане на формулите за сбор на втора и трета степен. Но задачата може да се реши и по друг начин (считан за по-рационален).

Решение: Преобразуваме изходното уравнение в еквивалентно на него уравнение $((3x + 5)^2 - (2x)^2) + (x + 6)^3 - 1^3 = 0$. Прилагаме формулите (1) и

(2) и получаваме $(x+5)(5x+5)+(x+5)(x^2+13x+43)=0$. Изнасяме общ множител $(x+5)$ и получаваме $(x+5)(x^2+18x+48)=0$. За уравненията $x+5=0$ и $x^2+18x+48=0$ намираме корените им и оттук – корените на даденото уравнение, т.е. $x_1 = -5$; $x_2 = -9 - \sqrt{33}$; $x_3 = -9 + \sqrt{33}$.

б) $(x^2 - x - 1)^2 - x^3 = 5$.

И тук задачата може да се реши чрез прилагане на формулата $(a-b-c)^2$, но ще предложим по-рационален подход.

Решение: Даденото уравнение е еквивалентно на следното уравнение $((x^2 - x - 1)^2 - 2^2) - (x^3 + 1^3) = 0$. Прилагаме формулите (1) и (2) и получаваме $(x^2 - x + 1)(x^2 - x - 3) - (x+1)(x^2 - x + 1) = 0$. Изнасяме общ множител $x^2 - x + 1$, т.е. $(x^2 - x + 1)(x^2 - 2x - 4) = 0$. Тъй като $x^2 - x + 1 > 0$ за всяко x , то се решава само едно уравнение $x^2 - 2x - 4 = 0$, чиито корени са $x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{5}$. При решаването на такива задачи се изисква ученикът да съобрази как да представи еквивалентното уравнение на даденото. Тук ученикът проявява комбинативност, тъй като трябва по подходящ начин да се комбинират различните елементи на уравнението.

По аналогичен начин се постъпва и при следващите уравнения:

в) $u^2(-1)^2 + (-2)^3 = 76$.

Сега ученикът трябва да съобрази как да представи 76 като сбор на две събираеми: едното – като число на втора степен, а другото – като число на трета степен, т.е. $76 = 7^2 + 3^3$. Тогава еквивалентно на даденото уравнение е уравнението $x^2(x-1)^2 - 7^2 + (x-2)^3 - 3^3 = 0$, след което прилагаме формулите (1) и (2). След преобразувания получаваме уравнението $(x^2 - x - 7)(x^2 - 12) = 0$. Тъй като $x^2 - x - 7 > 0$, то решаваме само уравнението $x^2 - 12 = 0$. Получаваме $x_{1/2} = \pm 2\sqrt{3}$. Използвайки идеята, залегнала в предходните задачи, може да се реши и следващото уравнение.

г) $(x-5)^2 + (x-4)^2 + (x-3)^4 = 2$, където $2 = 1 + 1$ и комбинираме по следния начин: $((x-5)^2 - 1^2) + (x-4)^2 + ((x-3)^4 - 1^4) = 0$. Получава се уравнението $(x-4)(x-2)(x^2 - 5x + 5) = 0$, откъдето намираме корените на даденото уравнение $x_1 = 2$; $x_2 = 4$; $x_{3/4} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Пример 2. Ще покажем как при решаване на системи уравнения могат да помогнат прогресиите, в случая аритметичната прогресия.

Задача 2. Решете системите уравнения:

$$\text{а) } \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 37 \\ x^2 + xz + z^2 = 28 \\ y^2 + yz + z^2 = 19. \end{cases}$$

Решение: лесно се установява, че $x \neq y$; $y \neq z$; $z \neq x$, защото, ако например $x = y$, то второто и третото уравнение ще си противоречат. Тогава системата

$$\text{се свежда до решаване на еквивалентната ѝ система } \begin{cases} x^3 - y^3 = 37(x - y) \\ z^3 - x^3 = 28(z - x) \\ y^3 - z^3 = 19(y - z). \end{cases}$$

Ако съберем левите и десните части на уравненията в системата и преобразуваме, получаваме $x + z = 2y$. За това уравнение може да се приеме, че променливите x, y и z образуват аритметична прогресия с разлика $d \neq 0$. В този случай $x = y - d$, а $z = y + d$. Поставяме изразите $x = y - d$ и $z = y + d$ съответно в първото и третото уравнение на дадената система

$$\text{и получаваме } \begin{cases} (y-d)^2 + y(y-d) + y^2 = 37 \\ y^2 + y(y-d) + (y+d)^2 = 19 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 3y^2 - 3yd + d^2 = 37 \\ 3y^2 + 3yd + d^2 = 19. \end{cases}$$

След почленно изваждане на двете уравнения получаваме $yd = -3$ и система

$$\text{мата } \begin{cases} yd = -3 \\ 3y^2 + d^2 = 28 \end{cases}, \text{ откъдето следва } 3y^2 + \frac{9}{y^2} = 28 \Leftrightarrow 3y^4 - 28y^2 + 9 = 0$$

$$\text{или } y^2 = 9; y^2 = \frac{1}{3} \text{ Имайки предвид, че } d = -\frac{y}{3}, \text{ намираме } \begin{cases} y_1 = 3 \\ d_1 = -1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} y_2 = -3 \\ d_1 = 1 \end{cases}; \begin{cases} y_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ d_3 = -3\sqrt{3} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y_4 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ d_1 = 3\sqrt{3} \end{cases}. \text{ По-нататък използваме, че}$$

$x = y - d$ и $z = y + d$. Получаваме, че корените на дадената система са:

$$(4; 3; 2); (-4; -3; -2); \left(\frac{10}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{8}{\sqrt{3}}\right); \left(-\frac{10}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{8}{\sqrt{3}}\right).$$

$$\text{б) } \begin{cases} (x+y)(x^2+y^2) = 15 \\ (x+z)(x^2+z^2) = 40. \\ (y+z)(y^2+z^2) = 65 \end{cases}$$

Решение: тук също се установява, че $x \neq y, y \neq z, z \neq x$. По-нататък умножаваме първото уравнение с $x - y$, второто с $x - z$ и третото с $y - z$.

$$\text{Получаваме} \begin{cases} x^4 - y^4 = 15(x - y) \\ z^4 - x^4 = 40(z - x) \\ y^4 - z^4 = 65(y - z) \end{cases} \text{След почленно събиране на уравненията и}$$

преобразуване получаваме $2y = x + z$. По аналогия на предходната система и тук x, y, z образуват аритметична прогресия с разлика d , тогава $x = y - d$ и $z = y + d$. Замествайки в първото и третото уравнение, получаваме система с две неизвестни, т.е.

$$\begin{cases} y^3 + yd = 10 \\ 6y^2d + d^3 = 25 \end{cases} \quad (1). \text{От второто уравнение следва, че } d \neq 0. \text{Разделяме почленно уравненията в системата (1) и получаваме}$$

$$\frac{y^3 + yd^2}{6y^2d + d^3} = \frac{2}{5}. \text{Тъй като } d \neq 0, \text{разделяме числителя и знаменателя на дробта на } d^3 \text{ и полагаме } \frac{y}{d} = u. \text{Тогава } \frac{u^3 + u}{6u^2 + 1} = \frac{2}{5} \text{ или } 5u^3 - 12u^2 + 5u - 2 = 0.$$

Кубичното уравнение има единствен реален корен $u = 2$, тъй като от $u = \frac{y}{d}$ и $u = 2$ имаме $y = 2d$. Заместваме $y = 2d$ в първото уравнение на системата (1). Тогава $(2d)^2 + 2d^2 = 10$ или $d_1 = 1 \Rightarrow y = 2$. От $x = y - d$ и $z = y + d$ намираме, че решението на системата е тройката $(1; 2; 3)$.

Пример 3. Използвайки свойствата на пропорциите, някои тригонометрични уравнения могат да се решат значително по-лесно, а именно

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}; \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}; \frac{a-b}{a+b} = \frac{c-d}{c+d}; \frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b}; \frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \left(\begin{matrix} b \neq 0 \\ d \neq 0 \end{matrix} \right), \text{ то } \frac{a-b}{a+b} = \frac{c-d}{c+d} \left(\begin{matrix} a \neq -b \\ c \neq -d \end{matrix} \right).$$

Задача 3. Да се реши уравнението:

$$\text{а) } \frac{\sin 5x}{\sin x} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - 2x \right).$$

$$\text{Решение: от } \frac{\pi}{4} - 2x = \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \text{ получаваме } \frac{\sin 5x + \sin x}{\sin 5x - \sin x} = \frac{1 - \operatorname{tg} 2x}{1 + \operatorname{tg} 2x};$$

$$\frac{\sin 5x + \sin x}{\sin 5x - \sin x} = \frac{2}{-2 \operatorname{tg} 2x}; \quad \frac{2 \sin 3x \cos 2x}{2 \sin 2x \cos 3x} = -\frac{\cos 2x}{\sin 2x}; \operatorname{tg} 3x = -1;$$

$$3x = -\frac{\pi}{4} + n\pi; n \in Z \Rightarrow x = -\frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{3}; n \in Z.$$

В хода на решението на уравнението използваме, че

$$\sin 5x - \sin x \neq 0; \sin 2x \neq 0; \cos 2x \neq 0,$$

$$\text{откъдето } x \neq \frac{\pi}{2}p, p \in Z; x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}q, q \in Z; x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}t, t \in Z$$

в областта $x \neq \pi k, k \in Z; x \neq \frac{3}{8}\pi + \frac{\pi}{2}m, m \in Z$. Получените при решението корени могат да не влизат в дефиниционната област. Да проверим дали стойностите удовлетворяват изходното уравнение:

$$x_1 = \frac{3\pi}{2} + 2d\pi, d \in Z; x_2 = \frac{\pi}{2} + l\pi, l \in Z; x_3 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}q, q \in Z; x_4 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}t, t \in Z.$$

$$1) \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi l, l \in Z; \frac{\sin \frac{5\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2}} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \pi \right); 1 = 1 \quad \text{вярно равенство, тогава}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi l, l \in Z \text{ е решение на даденото уравнение.}$$

$$2) \quad x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi d, d \in Z; \frac{\sin \frac{15\pi}{2}}{\sin \frac{3\pi}{2}} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - 3\pi \right); 1 = 1 \quad \text{вярно равенство, то-}$$

$$\text{гава } x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi d, d \in Z \text{ е решение на даденото уравнение.}$$

$$3) \quad x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}q; \frac{\sin \left(\frac{5\pi}{6} + \frac{5\pi}{3}q \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}q \right)} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}q \right);$$

$$\frac{\sin \left(\pi - \left(\frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{3}q \right) \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}q \right)} = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{6} - 2\pi q + \frac{\pi q}{3} \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi q}{3} \right)} = 1; \quad 1 = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{6} - 2\pi q + \frac{\pi q}{3} \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi q}{3} \right)}.$$

Последното равенство е вярно при $q = 3f + 1, f \in Z$, но тогава

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}(1 + 3f) = \frac{\pi}{2} + \pi f; f \in Z \text{ и се появяват решения, намерени в а) и б).}$$

$$4) \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}t; \frac{\sin\left(\frac{5\pi}{4} + \frac{5\pi}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}t\right)} = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4} - \pi t\right);$$

$$\frac{-\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}t\right)} = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot (-1) = -1 \text{ вярно равенство. Тогава}$$

$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}t; t \in Z$ е решение на уравнението.

Окончателно корените на даденото уравнение са:
 $-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}n; \frac{\pi}{2} + \pi f; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}t$; където $\{n, f, t\} \in Z$.

$$б) \quad \frac{2\sqrt{3}\cos 10^\circ}{2\sin 10^\circ} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}$$

Допустимите стойности са: $\cos 3x \neq 0; \cos x \neq 0; \sin x \neq 0$.

Като използваме свойството на пропорциите, записваме даденото урав-

нение по следния начин: $\frac{2\sqrt{3}\cos 10^\circ + 2\sin 10^\circ + 2}{2\sqrt{3}\cos 10^\circ - 2\sin 10^\circ} = \frac{\operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x}$. Преоб-

разуваме $\frac{\sqrt{3}\cos 10^\circ + \sin 10^\circ + 1}{\sqrt{3}\cos 10^\circ - \sin 10^\circ} = \frac{\sin 4x}{\sin 2x}; \frac{\cos 20^\circ + \cos 60^\circ}{\cos 40^\circ} = 2\cos 2x;$

$$\frac{\cos 20^\circ + \cos 60^\circ}{\cos 40^\circ} = 2\cos 2x; \cos 2x = \cos 20^\circ; x = \pm 10^\circ + n\pi; n \in Z.$$

Решавайки горните задачи и подобни на тях, ученикът пренася знания за решаването на проблеми, които нямат очевидна връзка, което е предпоставка за създаване на условия за активизиране на учебната му дейност. Важното е да се създадат благоприятни ситуации за обучение чрез задачи. По-трудното и най-важното е да се намират подходящи методи за математическа активност независимо от степента на подготовка. Това пък води до развитие на различни механизми на мислене, необходими за откриване, за творчество и за приложение на идеи.

REFERENCES/ЛИТЕРАТУРА

- Borodulja, I. (1968). *Exponential and logarithmic equations* (in Russian). Moscow: Prosveshtenie. [Бородуля, И. (1968). *Показательные и логарифмические уравнения и неравенства*. Москва: Просвещение].
- Vavilov, V. et al. (1987). *Mathematics problems* (in Russian). Moscow: Nauka. [Вавилов, В. и др. (1987). *Задачи по математике*. Москва: Наука. Гнеденко, Б. (1981), Математическое образование в вузах, Москва, Высшая школа, с.6.].
- Sevrikov, P. & A. Smoljakov (2008). *Trigonometric, exponential and logarithmic equations and inequalities* (In Russian). Moscow: Prosveshtenie. (ISBN 978-5-93078-567-8) [Севрюков, П. & А. Смоляков, (2008), *Тригонометрические, показательные и логарифмические уравнения и неравенства*, Москва: Просвещение. (ISBN 978-5-93078-567-8)].
- Sukrun, V. (2008). *Mathematics for higher grades* (In Russian). Moscow: Librakom. (ISBN 978-5-397-00050-5) [Сукрун, В. (2008). *Математика для старшеклассников*. Москва: Либраком. (ISBN 978-5-397-00050-5)].
- Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice)*. Sofia: ADE. (ISBN 978-954-92139-1-1), 295 pages.

SOME WAYS IN SOLVING ALGEBRAIC PROBLEMS

Abstract. The paper considers the possibilities of some relations among topics of the mathematical school curriculum in problem solving.

✉ **Dr. Diana Stefanova**
Teacher in Mathematics
116, Tsar Ivan Asen II St.
4230 Asenovgrad, Bulgaria
E-mail: dianastefan@abv.bg