

ЕЛЕМЕНТАРНИ ТОЧКОВИ КОНФИГУРАЦИИ. ДИАГОНАЛЕН ПРИНЦИП. ИНВАРИАНТИ

Здравко Лалчев, Ирина Вутова

Софийски университет „Св. Климент Охридски“

Резюме. Понятията лице на триъгълник и обем на тетраедър са интерпретирани като инварианти на елементарни точкови конфигурации в двумерно и тримерно пространство и е намерен техен аналог в четиримерно пространство. Идеята за инвариант на елементарна точкова конфигурация е продължена и в n -мерно пространство, като е формулиран общ принцип за нейното развитие. Използвани са методи на аналитичната геометрия (векторно-алгебрично моделиране, афинна координатна система, координати на точка, координати на вектор) и средства на линейната алгебра (детерминанти).

Keywords: triangle; area; tetrahedron; volume; invariant; vector-algebraic modeling; affine co-ordinates; diagonal principle

1. Предварителни бележки

Дори малките ученици знаят, че при намиране лицето на триъгълник е без значение коя от трите страни е избрана за основа, т.е. лицето на триъгълника не зависи от реда на точките, които са негови върхове. Добре е известно, че произволна точка във вътрешността, свързана праволинейно с върховете, разделя триъгълника на три триъгълника, сборът от лицата на които е равен на лицето на основния триъгълник. Също така е известно, че съществуват различни формули, т.е. различни алгебрични изрази, които представят величината лице (на триъгълник). Много от свойствата на лицето на триъгълник могат да бъдат „пренесени“ и в пространствената геометрия. За целта е достатъчно триъгълникът да се замени с тетраедър, а лицето – с обем. Например при задачи, свързани с обем на тетраедър, често пъти решението се „получава“, като се смени основата. Последният подход има не само евристична, но и доказателствена стойност. (Обемът на тетраедъра не зависи от това коя от четирите стени е основа.) Както при триъгълника, така и при тетраедъра, произволна точка във вътрешността, свързана праволинейно с върховете, разделя тетраедъра на четири тетраедъра, сборът от обемите на които е равен на обема на основния тетраедър.

В този ред на мисли, изниква въпросът дали „важните“ понятия лице на триъгълник и обем на тетраедър са „привилегия“ само на двумерното и три-

мерното пространство и дали в пространства с размерност, по-висока от 3, могат да се намерят техни аналози.

Оказва се, че идеята за търсене на аналози на лицето и обема в пространства с по-висока размерност може да бъде разширена и развита, но за тази цел е необходимо да се излезе от ограниченията на инструментариума на елементарната геометрия. В тази връзка е целесъобразно (според нас) проблемната ситуация да се моделира векторно-алгебрично, задачата да се пренесе в „полето“ на аналитичната геометрия и (за целите на изследването) да се приложат средства на линейната алгебра (Vutova, 2014). Един вариант в тази посока е предложен в следващите точки на разработката.

2. Двумерно пространство

2.1. Уводни бележки. Лема.

Нека в равнината (2-мерно пространство) е дадена афинна координатна система.

Нека $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \dots$ са вектори с координати, съответно:

$$\mathbf{a}_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{12})$$

$$\mathbf{a}_2 = (\alpha_{21}, \alpha_{22})$$

$$\mathbf{a}_3 = (\alpha_{31}, \alpha_{32})$$

.....

Да въведем следните означения:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_3 \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} \alpha_{31} & \alpha_{32} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_2 \end{vmatrix} \text{ и т.н.};$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 1 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} & 1 \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & 1 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_3 \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} \alpha_{31} & \alpha_{32} & 1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 1 \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_1 \end{vmatrix} \text{ и т.н.};$$

Като вземем предвид, че

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 1 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix},$$

достигаем до следната:

Лема. За детерминантите $\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 \end{vmatrix}$ е в сила равенството:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 \end{vmatrix}.$$

Коментар. Равенството в лемата се „конструира“ лесно, като се приложи „диагонален“ принцип. Лявата страна се получава, като „колонката“ $\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{vmatrix}$ се

запише три пъти последователно на един ред, т.е. $\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{vmatrix}$, след което

буквите $(\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1)$ по второстепенния „диагонал“ на получената „матрица“ се зачертават. Така се получават детерминантите $\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{vmatrix}$. Знаците пред тях (+ и –) се сменят алтернативно, като се започва със знака „+“. (Дяс-

ната страна е $\begin{vmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 \end{vmatrix}$.)

2.2. Елементарна точкова конфигурация в двумерно пространство

Нека A_1, A_2, A_3 са три точки в равнината. Като свържем с отсечка всяка една от точките с останалите две, получаваме три отсечки – A_1A_2, A_1A_3, A_2A_3 . Така получената конфигурация ще наричаме **елементарна точкова конфигурация** в двумерното пространство. Точките A_1, A_2, A_3 ще наричаме **върхове**, а отсечките A_1A_2, A_1A_3, A_2A_3 ще наричаме **ръбове** на конфигурацията.

2.2.1. Детерминанта на наредена тройка точки

Нека са дадени точките A_1, A_2, A_3 с координати съответно:

$$A_1(\alpha_{11}, \alpha_{12}), A_2(\alpha_{21}, \alpha_{22}), A_3(\alpha_{31}, \alpha_{32}).$$

Детерминантата $\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 1 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 1 \end{vmatrix}$ ще наричаме **детерминанта** на наредената

тройка точки (A_1, A_2, A_3) . Съгласно въведените по-горе означения можем да

запишем: $\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 1 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 \end{vmatrix}.$

Тъй като три обекта могат да бъдат наредени по $3!$ начина, то с тройката точки A_1, A_2, A_3 можем да свържем $3.2.1 = 6$ детерминанти от трети ред, а именно:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{A}_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{A}_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_1 \end{vmatrix}.$$

Въпросните детерминанти се получават една от друга чрез разместване на редове. Това означава, че техните абсолютни стойности са равни.

Известно е, че ако базата на координатната система определя триъгълник с лице 1, то детерминантата на тройката точки A_1, A_2, A_3 е равна на ориентираното лице на триъгълника с върхове A_1, A_2, A_3 (Gjonov & Stoev, 1994).

2.1.2. Теорема. Правило на диагонала. Инварианта на елементарна точкова конфигурация

Теорема. Нека точките A_1, A_2, A_3 в равнината образуват наредена тройка (в този ред) и X е произволна точка от равнината. Нека точките имат координати съответно:

$$A_1(\alpha_{11}, \alpha_{12}), A_2(\alpha_{21}, \alpha_{22}), A_3(\alpha_{31}, \alpha_{32}), X(x_1, x_2).$$

Тогава за детерминантите $\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ X \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 \\ X \\ A_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} X \\ A_2 \\ A_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{vmatrix}$ е в сила равенството:

$$\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1 \\ X \\ A_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X \\ A_2 \\ A_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{vmatrix}.$$

Доказателство:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1 \\ X \\ A_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X \\ A_2 \\ A_3 \end{vmatrix} = \\ & = \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 \\ x \\ a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 \\ x \\ a_3 \end{vmatrix} + \\ & + \begin{vmatrix} a_1 \\ x \\ a_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 \\ a_3 \\ a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_1 \end{vmatrix} = \\ & = \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 \\ a_3 \\ a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Коментари и изводи

1) Равенството в теоремата се „конструира“ лесно, като се приложи „диагонал“ принцип. Лявата страна се получава, като „колонката“ $\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{vmatrix}$ се за-

пише три пъти последователно на един ред, т.е. $\begin{vmatrix} A_1 & A_1 & A_1 \\ A_2 & A_2 & A_2 \\ A_3 & A_3 & A_3 \end{vmatrix}$, след което

буквите (A_3, A_2, A_1) по „второстепенния диагонал“ на получената „матрица“

се заменят с буквата X . Така се получават детерминантите $\begin{vmatrix} A_1 & A_1 & X \\ A_2 & X & A_2 \\ X & A_3 & A_3 \end{vmatrix}$,

които се свързват със знаци „+“. (Дясната страна е $\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{vmatrix}$.)

2) Съгласно лемата сборът $\begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 \\ a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 \\ a_3 \end{vmatrix}$ (на детерминантите, разпо-

ложени по „главния диагонал“) е равен на $\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{vmatrix}$. Останалите събираеми (де-

терминанти) могат да бъдат групирани по двойки така, че във всяка двойка компонентите да са противоположни числа. Събираемите с противоположни стойности са разположени симетрично на главния диагонал. Това означава, че сборът на детерминантите „извън“ главния диагонал е равен на нула. Действително,

$$- \begin{vmatrix} a_1 \\ x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 \\ x \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} a_2 \\ x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x \\ a_2 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} x \\ a_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x \\ a_3 \end{vmatrix} = 0.$$

3) Теоремата показва, че точка X , „разположена по второстепенния диагонал“ на лявата страна, не участва в дясната страна на равенството. Ето защо тази теорема може да бъде наречена „правило за изключване на точка“ или „**правило на диагонала**“ в двумерно пространство.

4) Теоремата има следния геометричен смисъл.

Ако A_1, A_2, A_3 са три точки в равнината и X е произволна точка от тази равнина, то **алгебричният сбор на ориентираните лица на триъгълниците $A_1A_2X, A_1XA_2, XA_2A_3$ не зависи от точката X и е равен на ориентираното лице на триъгълник $A_1A_2A_3$.**

5) Горните разсъждения ни дават основание да въведем понятието инвариант на елементарна точкова конфигурация в двумерно пространство. И така: нека е дадена елементарна конфигурация с върхове A_1, A_2, A_3 (в двумерно пространство). Тогава абсолютната стойност на детерминантата на която и да е от наредените тройки, получени от точките A_1, A_2, A_3 , ще наричаме **инвариант на елементарната точкова конфигурация A_1, A_2, A_3 .**

3. Тримерно пространство

3.1. Уводни бележки. Лема

Нека в пространството (3-мерно пространство) е дадена афинна координатна система.

Нека $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4 \dots$ са вектори с координати съответно:

$$\mathbf{a}_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}),$$

$$\mathbf{a}_2 = (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}),$$

$$\mathbf{a}_3 = (\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33}),$$

$$\mathbf{a}_4 = (\alpha_{41}, \alpha_{42}, \alpha_{43}),$$

.....

Да въведем следните означения:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_4 \end{vmatrix}, \dots, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_4 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{vmatrix} \text{ и т.н.};$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & 1 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 1 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{A}_4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 1 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & 1 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_4 \end{vmatrix}, \dots, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & 1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & 1 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 1 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_4 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{A}_4 \end{vmatrix}$$

и т.н.

Като вземем предвид, че

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & 1 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 1 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} \end{vmatrix} + (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} \end{vmatrix} + (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} \end{vmatrix},$$

достигаем до следната:

Лема. За детерминантите $\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_4 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{A}_4 \end{vmatrix}$ е в сила равенството:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{A}_4 \end{vmatrix}.$$

Коментар. Равенството в лемата се „конструира“ лесно, като се приложи „диагонален“ принцип. Лявата страна на равенството се получава, като

„колонката“ $\begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{vmatrix}$ се запише четири пъти последователно на един ред, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{vmatrix},$$

след което буквите (a_4, a_3, a_2, a_1) по „второстепенния диагонал“ на получената „матрица“ се зачертаят. Така се получават детерминантите

$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_2 & a_3 & a_3 \\ a_3 & a_4 & a_4 & a_4 \end{vmatrix}$. Знаците пред тях („+“ и „-“ се сменят алтерна-

тивно, като се започва със знака „+“. (Дясната страна е $\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{vmatrix}$.)

3.2. Елементарна точкова конфигурация в тримерно пространство

Нека A_1, A_2, A_3, A_4 са четири точки в пространството (3-мерно). Като свържем с отсечка всяка една от точките с останалите три, получаваме шест отсечки – $A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, A_2A_3, A_2A_4, A_3A_4$. Така получената конфигурация ще наричаме **елементарна точкова конфигурация** в тримерното пространство. Точките A_1, A_2, A_3, A_4 ще наричаме **върхове**, а отсечките $A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, A_2A_3, A_2A_4, A_3A_4$ ще наричаме **ръбове** на конфигурацията,

3.2.1. Детерминанта на наредена четворка точки

Нека са дадени точките A_1, A_2, A_3, A_4 с координати съответно:

$$A_1(a_{11}, a_{12}, a_{13}), A_2(a_{21}, a_{22}, a_{23}), A_3(a_{31}, a_{32}, a_{33}), A_4(a_{41}, a_{42}, a_{43}).$$

Детерминантата $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 1 \end{vmatrix}$ ще наричаме **детерминанта на наредена**

четворка точки (A_1, A_2, A_3, A_4) . Съгласно въведените по-горе означения можем да запишем:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & 1 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 1 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{vmatrix}.$$

Тъй като четири обекта могат да бъдат наредени по 4! начина, то с четворката точки A_1, A_2, A_3, A_4 можем да свържем $4.3.2.1 = 24$ детерминанти от четвърти ред, а именно:

$$\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_4 \\ A_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 \\ A_3 \\ A_2 \\ A_4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_2 \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} A_4 \\ A_3 \\ A_1 \\ A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_4 \\ A_2 \\ A_1 \\ A_3 \end{vmatrix}.$$

Въпросните детерминанти се получават една от друга чрез размятане на редове. Това означава, че техните абсолютни стойности са равни.

Известно е, че ако базата на координатната система определя тетраедър с лице 1, то детерминантата на четворката точки A_1, A_2, A_3, A_4 е равна на ориентирания обем на тетраедъра с върхове A_1, A_2, A_3, A_4 (Gjonov & Stoev, 1994).

3.1.2. Теорема. Правило на диагонала. Инвариант на елементарна точкова конфигурация

Теорема. Нека точките A_1, A_2, A_3, A_4 образуват наредена четворка (в този ред) и X е произволна точка в пространството. Нека точките имат координати съответно:

$$A_1(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}), A_2(\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}), A_3(\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33}), A_4(\alpha_{41}, \alpha_{42}, \alpha_{43}) \\ X(x_1, x_2, x_3).$$

Тогава за детерминантите $\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ X \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ X \\ A_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 \\ X \\ A_3 \\ A_4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} X \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{vmatrix}$ е в сила равенството:

$$\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ X \\ A_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1 \\ X \\ A_3 \\ A_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{vmatrix}$$

Доказателство:

$$\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ X \\ A_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1 \\ X \\ A_3 \\ A_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 \\ a_3 \\ x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_2 \\ a_3 \\ x \end{vmatrix} + \\
 &+ \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 \\ x \\ a_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_2 \\ x \\ a_4 \end{vmatrix} + \\
 &+ \begin{vmatrix} a_1 \\ x \\ a_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 \\ x \\ a_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_3 \\ a_4 \\ a_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x \\ a_3 \\ a_4 \end{vmatrix} + \\
 &+ \begin{vmatrix} x \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x \\ a_2 \\ a_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x \\ a_3 \\ a_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{vmatrix} = \\
 &= \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 \\ a_3 \\ a_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

Коментари и изводи

1) Равенството в теоремата се „конструира“ лесно, като се приложи „диа-

гонален“ принцип. Лявата страна се получава, като „колонката“ $\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{vmatrix}$ се запи-

ше четири пъти последователно, т.е. $\begin{vmatrix} A_1 & A_1 & A_1 & A_1 \\ A_2 & A_2 & A_2 & A_2 \\ A_3 & A_3 & A_3 & A_3 \\ A_4 & A_4 & A_4 & A_4 \end{vmatrix}$, след което буквите

(A_4, A_3, A_2, A_1) по „второстепенния диагонал“ на получената „матрица“ се за-

менят са буквата X . Така се получават детерминантите $\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ X \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ X \\ A_4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 \\ X \\ A_3 \\ A_4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} X \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{vmatrix}$,

които се свързват със знаци „+“. (Дясната страна е $\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{vmatrix}$.)

2) Съгласно лемата сборът $\begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 \\ a_3 \\ a_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{vmatrix}$ (на детерминантите, разположени по „главния диагонал“) е равен на $\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{vmatrix}$. Останалите събираеми

(детерминанти) могат да бъдат групирани по двойки така, че във всяка двойка събираемите да са противоположни числа. Детерминантите с противоположни стойности са разположени симетрично на главния диагонал. Това означава, че сборът на детерминантите „извън“ главния диагонал е равен на нула.

Действително,

$$-\begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ x \end{vmatrix} = 0, -\begin{vmatrix} a_2 \\ a_3 \\ x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} a_1 \\ x \\ a_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 \\ x \\ a_4 \end{vmatrix} = 0, -\begin{vmatrix} x \\ a_3 \\ a_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x \\ a_3 \\ a_4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 \\ a_3 \\ x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 \\ x \\ a_3 \end{vmatrix} = 0, -\begin{vmatrix} a_2 \\ x \\ a_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x \\ a_2 \\ a_4 \end{vmatrix} = 0.$$

2) Теоремата показва, че точка X , „разположена по второстепенния диагонал“ на лявата страна, не участва в дясната страна на равенството. Ето защо тази теорема може да бъде наречена „правило за изключване на точка“ или „**правило на диагонала**“ в тримерно пространство.

3) Теоремата има следния геометричен смисъл.

Ако A_1, A_2, A_3, A_4 са четири точки в пространството и X е произволна точка, то алгебричният сбор от ориентираните обеми на тетраедрите $A_1A_2A_3X, A_1A_2XA_4, A_1XA_3A_4, XA_2A_3A_4$ не зависи от точката X и е равен на ориентирания обем на тетраедъра $A_1A_2A_3A_4$.

4) Горните разсъждения ни дават основание да въведем понятието инвариант на елементарна точкова конфигурация в тримерно пространство. И така: нека е дадена елементарна конфигурация с върхове A_1, A_2, A_3, A_4 (в тримерно пространство). Тогава абсолютната стойност на детерминантата на която и да е от наредените четворки, получени от точките A_1, A_2, A_3, A_4 , ще наричаме **инвариант на елементарната точкова конфигурация** A_1, A_2, A_3, A_4 .

4. Четиримерно пространство

4.1. Уводни бележки. Лема

Нека в 4-мерното пространство е дадена афинна координатна система.

Нека $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \dots$ са вектори с координати съответно:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{14}), \\ \mathbf{a}_2 &= (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}, \alpha_{24}) \\ \mathbf{a}_3 &= (\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33}, \alpha_{34}) \\ \mathbf{a}_4 &= (\alpha_{41}, \alpha_{42}, \alpha_{43}, \alpha_{44}) \\ \mathbf{a}_5 &= (\alpha_{51}, \alpha_{52}, \alpha_{53}, \alpha_{54}) \end{aligned}$$

.....

Да въведем следните означения:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_4 \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{51} & \alpha_{52} & \alpha_{53} & \alpha_{54} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_5 \end{vmatrix}$$

и т.н.

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & 1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{14} & 1 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & 1 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & 1 \\ \alpha_{51} & \alpha_{52} & \alpha_{53} & \alpha_{54} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{A}_4 \\ \mathbf{A}_5 \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} \alpha_{51} & \alpha_{52} & \alpha_{53} & \alpha_{54} & 1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{14} & 1 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & 1 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & 1 \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_5 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{A}_4 \\ \mathbf{A}_1 \end{vmatrix} \text{ и т.н.}$$

Като вземем предвид, че

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & 1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{14} & 1 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & 1 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & 1 \\ \alpha_{51} & \alpha_{52} & \alpha_{53} & \alpha_{54} & 1 \end{vmatrix} = \\ & = (-1)^{5+5} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{vmatrix} + (-1)^{4+5} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{51} & \alpha_{52} & \alpha_{53} & \alpha_{54} \end{vmatrix} + (-1)^{3+5} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \\ \alpha_{51} & \alpha_{52} & \alpha_{53} & \alpha_{54} \end{vmatrix} + \\ & + (-1)^{2+5} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \\ \alpha_{51} & \alpha_{52} & \alpha_{53} & \alpha_{54} \end{vmatrix} + (-1)^{1+5} \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \\ \alpha_{51} & \alpha_{52} & \alpha_{53} & \alpha_{54} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

достигаем до следната:

Лема. За детерминантите $\begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{vmatrix}$ е в сила ра-

венството:

$$\begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{vmatrix}.$$

Коментар. Равенството в лемата се „конструира“ лесно, като се приложи „диагонален“ принцип. Лявата страна на равенството се получа-

ва, като „колонката“ $\begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix}$ се запише пет пъти последователно на един ред,

т.е. $\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 & a_2 & a_2 & a_2 \\ a_3 & a_3 & a_3 & a_3 & a_3 \\ a_4 & a_4 & a_4 & a_4 & a_4 \\ a_5 & a_5 & a_5 & a_5 & a_5 \end{vmatrix}$, след което буквите по „второстепенния диаго-

нал“ $(a_5, a_4, a_3, a_2, a_1)$ на получената „матрица“ се зачертаят. Така се по-

лучават детерминантите $\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_2 & a_2 & a_3 & a_3 \\ a_3 & a_3 & a_4 & a_4 & a_4 \\ a_4 & a_5 & a_5 & a_5 & a_5 \end{vmatrix}$. Знаците пред тях („+“ и

„-“) се сменят алтернативно, като се започва със знака „+“. (Дясната страна

е $\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{vmatrix}$.)

4.2. Елементарна точкова конфигурация в четиримерно пространство

Нека A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 са пет точки в четиримерно пространство. Като свържем с отсечка всяка една от точките с останалите четири, получаваме 10 отсечки – $A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, A_1A_5, A_2A_3, A_2A_4, A_2A_5, A_3A_4, A_3A_5, A_4A_5$. Така получената конфигурация ще наричаме **елементарна точкова конфигурация** в четиримерното пространство. Точките A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 ще наричаме **върхове**, а отсечките $A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, A_1A_5, A_2A_3, A_2A_4, A_2A_5, A_3A_4, A_3A_5, A_4A_5$ ще наричаме **ръбове** на конфигурацията.

4.2.1. Детерминанта на наредена петорка точки

Нека са дадени точките A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 с координати съответно:

$$A_1(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{14}), A_2(\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}, \alpha_{24}), A_3(\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33}, \alpha_{34}), \\ A_4(\alpha_{41}, \alpha_{42}, \alpha_{43}, \alpha_{44}), A_5(\alpha_{51}, \alpha_{52}, \alpha_{53}, \alpha_{54}).$$

Детерминантата
$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & 1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & 1 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & 1 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & 1 \\ \alpha_{51} & \alpha_{52} & \alpha_{53} & \alpha_{54} & 1 \end{vmatrix}$$
 ще наричаме **детерминанта на наредената петорка точки** (A_1, A_2, A_3, A_4, A_5). Съгласно въведените по-горе означения можем да запишем:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & 1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & 1 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & 1 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & 1 \\ \alpha_{51} & \alpha_{52} & \alpha_{53} & \alpha_{54} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{vmatrix}.$$

Тъй като пет обекта можем да наредим по $5!$ начина, то с петте точки A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 можем да свържем $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ детерминанти от пети ред, а именно:

$$\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_4 \\ A_3 \\ A_5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_5 \\ A_4 \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} A_5 \\ A_4 \\ A_3 \\ A_1 \\ A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_5 \\ A_4 \\ A_2 \\ A_1 \\ A_3 \end{vmatrix}.$$

Въпросните детерминанти се получават една от друга чрез разместване на редове. Това означава, че техните абсолютни стойности са равни.

4.2.2. Теорема. Правило на диагонала. Инварианта на елементарна точкова конфигурация

Теорема. Нека точките A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 образуват наредена петица (в този ред) и X е произволна точка в четиримерно пространство. Нека точките имат координати съответно:

$$A_1(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{14}), A_2(\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}, \alpha_{24}), A_3(\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33}, \alpha_{34}), \\ A_4(\alpha_{41}, \alpha_{42}, \alpha_{43}, \alpha_{44}), A_5(\alpha_{51}, \alpha_{52}, \alpha_{53}, \alpha_{54}) \\ X(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Тогава за детерминантите

$$\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ X \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ X \\ A_5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ X \\ A_4 \\ A_5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 \\ X \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} X \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{vmatrix}$$

е в сила равенството:

$$\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ X \\ A_4 \\ A_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1 \\ X \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{vmatrix}.$$

Доказателство:

$$\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ X \\ A_4 \\ A_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1 \\ X \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ x \end{vmatrix} + \\ + \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ x \\ a_5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ x \\ a_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ x \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ x \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 \\ x \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 \\ x \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
 & + \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ x \\ a_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ x \\ a_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 \\ x \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 \\ x \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix} + \\
 & + \begin{vmatrix} a_1 \\ x \\ a_3 \\ a_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 \\ x \\ a_3 \\ a_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 \\ x \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix} + \\
 & + \begin{vmatrix} x \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x \\ a_2 \\ a_3 \\ a_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x \\ a_2 \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix} = \\
 & = \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

Коментари и изводи

1) Равенството в теоремата се „конструира“ лесно, като се приложи „ди-

агонален“ принцип. Лявата страна се получава, като „колонката“ $\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{vmatrix}$ се за-

пише четири пъти последователно, т.е. $\begin{vmatrix} A_1 & A_1 & A_1 & A_1 & A_1 \\ A_2 & A_2 & A_2 & A_2 & A_2 \\ A_3 & A_3 & A_3 & A_3 & A_3 \\ A_4 & A_4 & A_4 & A_4 & A_4 \\ A_5 & A_5 & A_5 & A_5 & A_5 \end{vmatrix}$, след което

буквите $(A_5, A_4, A_3, A_2, A_1)$ по второстепенния диагонал на получената „мат-

рица“ се заменят с буквата X. Така се получават детерминантите $\begin{vmatrix} A_1 & A_1 \\ A_2 & A_2 \\ A_3 & A_3 \\ A_4 & X \\ X & A_5 \end{vmatrix}$,

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_1 & X \\ A_2 & X & A_2 \\ X & A_3 & A_3 \\ A_4 & A_4 & A_4 \\ A_5 & A_5 & A_5 \end{vmatrix} \text{ които се свързват със знаци „+“. (Дясната страна е } \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{vmatrix})$$

2) Съгласно лемата сборът $\begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix}$ (на детерми-

нантите, разположени по „главния диагонал“) е равен на $\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{vmatrix}$. Останалите

(детерминанти) могат да бъдат групирани по двойки така, че във всяка двойка събираемите да са противоположни числа. Детерминантите с противоположни стойности са разположени симетрично на главния диагонал. Това означава, че сборът на детерминантите „извън“ главния диагонал е равен на нула. Действително,

$$\begin{aligned} - \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ x \end{vmatrix} &= 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ x \\ a_5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ x \\ a_5 \end{vmatrix} = 0, \quad - \begin{vmatrix} a_1 \\ x \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 \\ x \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix} = 0, \\ \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_4 \\ x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_4 \\ x \end{vmatrix} &= 0, \quad - \begin{vmatrix} a_1 \\ a_3 \\ x \\ a_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 \\ a_3 \\ x \\ a_5 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_2 \\ x \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x \\ a_2 \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

3) Теоремата показва, че точка X , разположена по „второстепенния диагонал“ на лявата страна, не участва в дясната страна на равенството. Ето защо тази теорема може да бъде наречена „правило за изключване на точка“ или „**правило на диагонала**“ в четиримерно пространство.

4) Нека множеството от пет точки A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 и определените от тях 10 отсечки – $A_1A_2, A_1A_3, \dots, A_4A_5$ наречем **симплекс** в четиримерното прос-

пространство, а детерминантата $\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{vmatrix}$ наречем „**ориентиран обем**“ на симплекса

$A_1A_2A_3A_4A_5$. Тогава доказаната теорема има следния геометричен смисъл.

Ако A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 са пет точки в 4-мерно пространство и X е произволна точка, **то алгебричният сбор от „ориентираните обеми“ на симплексите $A_1A_2A_3A_5X, A_1A_2A_3XA_5, A_1A_2XA_4A_5, A_1XA_3A_4A_5, XA_2A_3A_4A_5$ не зависи от точката X и е равен на „ориентирания обем“ на симплекса $A_1A_2A_3A_4A_5$.**

4) Горните разсъждения дават основание да въведем понятието инвариант на елементарна точкова конфигурация в 4-мерно пространство. И така: нека е дадена елементарна конфигурация с върхове A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 (в четиримерно пространство). Тогава абсолютната стойност на детерминантата на която и да е от наредените петорки, получени от точките A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 , ще наричаме **инвариант на елементарната точкова конфигурация A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 .**

5. N -мерно пространство

5.1. Уводни бележки. Лема

Нека в n -мерното пространство е дадена афинна координатна система.

Нека $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{a}_{n+1}$, са вектори с координати съответно:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \dots, \alpha_{1n-1}, \alpha_{1n}) \\ \mathbf{a}_2 &= (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}, \dots, \alpha_{2n-1}, \alpha_{2n}) \\ \mathbf{a}_3 &= (\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33}, \dots, \alpha_{3n-1}, \alpha_{3n}) \\ &\dots\dots\dots \\ \mathbf{a}_n &= (\alpha_{n1}, \alpha_{n2}, \alpha_{n3}, \dots, \alpha_{nn-1}, \alpha_{nn}) \\ \mathbf{a}_{n+1} &= (\alpha_{n+11}, \alpha_{n+12}, \alpha_{n+13}, \dots, \alpha_{n+1n-1}, \alpha_{n+1n}) \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Да въведем следните означения:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n-1} & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n-1} & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3n-1} & \alpha_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n-11} & \alpha_{n-12} & \alpha_{n-13} & \dots & \alpha_{n-1n-1} & \alpha_{n-1n} \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \dots & \alpha_{nn-1} & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \\ \dots \\ \mathbf{a}_{n-1} \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix}, \dots\dots$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{n1}\alpha_{n2}\alpha_{n3} \dots \alpha_{nn-1}\alpha_{nn} \\ \alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23} \dots \alpha_{2n-1}\alpha_{2n} \\ \alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33} \dots \alpha_{3n-1}\alpha_{3n} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \alpha_{n-11}\alpha_{n-12}\alpha_{n-13} \dots \alpha_{n-1n-1}\alpha_{n-1n} \\ \alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13} \dots \alpha_{1n-1}\alpha_{1n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_n \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \\ \dots \\ \mathbf{a}_{n-1} \\ \mathbf{a}_1 \end{vmatrix}, \dots\dots$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{n1}\alpha_{n2}\alpha_{n3} \dots \alpha_{nn-1}\alpha_{nn} \\ \alpha_{n-11}\alpha_{n-12}\alpha_{n-13} \dots \alpha_{n-1n-1}\alpha_{n-1n} \\ \alpha_{n-21}\alpha_{n-22}\alpha_{n-23} \dots \alpha_{n-2n-1}\alpha_{n-2n} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23} \dots \alpha_{2n-1}\alpha_{2n} \\ \alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13} \dots \alpha_{1n-1}\alpha_{1n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_n \\ \mathbf{a}_{n-1} \\ \mathbf{a}_{n-2} \\ \dots \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_1 \end{vmatrix} \text{ и т.н.}$$

Също така:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13} \dots \alpha_{1n-1}\alpha_{1n} & 1 \\ \alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23} \dots \alpha_{2n-1}\alpha_{2n} & 1 \\ \alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33} \dots \alpha_{3n-1}\alpha_{3n} & 1 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \alpha_{n1}\alpha_{n2}\alpha_{n3} \dots \alpha_{nn-1}\alpha_{nn} & 1 \\ \alpha_{n+11}\alpha_{n+12}\alpha_{n+13} \dots \alpha_{n+1n-1}\alpha_{n+1n} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 \\ \dots \\ \mathbf{A}_n \\ \mathbf{A}_{n+1} \end{vmatrix}, \dots\dots$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{n+11}\alpha_{n+12}\alpha_{n+13} \dots \alpha_{n+1n-1}\alpha_{n+1n} & 1 \\ \alpha_{n1}\alpha_{n2}\alpha_{n3} \dots \alpha_{nn-1}\alpha_{nn} & 1 \\ \alpha_{n-11}\alpha_{n-12}\alpha_{n-13} \dots \alpha_{n-1n-1}\alpha_{n-1n} & 1 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23} \dots \alpha_{2n-1}\alpha_{2n} & 1 \\ \alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13} \dots \alpha_{1n-1}\alpha_{1n} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_{n+1} \\ \mathbf{A}_n \\ \mathbf{A}_{n-1} \\ \dots \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_1 \end{vmatrix} \text{ и т.н.}$$

Тъй като

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13} \dots \alpha_{1n-1}\alpha_{1n} & 1 \\ \alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23} \dots \alpha_{2n-1}\alpha_{2n} & 1 \\ \alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33} \dots \alpha_{3n-1}\alpha_{3n} & 1 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \alpha_{n1}\alpha_{n2}\alpha_{n3} \dots \alpha_{nn-1}\alpha_{nn} & 1 \\ \alpha_{n+11}\alpha_{n+12}\alpha_{n+13} \dots \alpha_{n+1n-1}\alpha_{n+1n} & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
 &= (-1)^{n+1+n+1} \begin{vmatrix} \alpha_{11} \alpha_{12} \alpha_{13} \dots \alpha_{1n-1} \alpha_{1n} & 1 \\ \alpha_{21} \alpha_{22} \alpha_{23} \dots \alpha_{2n-1} \alpha_{2n} & 1 \\ \alpha_{31} \alpha_{32} \alpha_{33} \dots \alpha_{3n-1} \alpha_{3n} & 1 \\ \dots & \dots \\ \alpha_{n1} \alpha_{n2} \alpha_{n3} \dots \alpha_{nn-1} \alpha_{nn} & 1 \end{vmatrix} + \\
 &+ (-1)^{n+n+1} \begin{vmatrix} \alpha_{11} \alpha_{12} \alpha_{13} \dots \alpha_{1n-1} \alpha_{1n} & 1 \\ \alpha_{21} \alpha_{22} \alpha_{23} \dots \alpha_{2n-1} \alpha_{2n} & 1 \\ \alpha_{31} \alpha_{32} \alpha_{33} \dots \alpha_{3n-1} \alpha_{3n} & 1 \\ \dots & \dots \\ \alpha_{n+11} \alpha_{n+12} \alpha_{n+13} \dots \alpha_{n+1n-1} \alpha_{n+1n} & 1 \end{vmatrix} + \dots \\
 &\dots + (-1)^{3+n+1} \begin{vmatrix} \alpha_{11} \alpha_{12} \alpha_{13} \dots \alpha_{1n-1} \alpha_{1n} & 1 \\ \alpha_{21} \alpha_{22} \alpha_{23} \dots \alpha_{2n-1} \alpha_{2n} & 1 \\ \dots & \dots \\ \alpha_{n1} \alpha_{n2} \alpha_{n3} \dots \alpha_{nn-1} \alpha_{nn} & 1 \\ \alpha_{n+11} \alpha_{n+12} \alpha_{n+13} \dots \alpha_{n+1n-1} \alpha_{n+1n} & 1 \end{vmatrix} + \\
 &+ (-1)^{2+n+1} \begin{vmatrix} \alpha_{11} \alpha_{12} \alpha_{13} \dots \alpha_{1n-1} \alpha_{1n} & 1 \\ \alpha_{31} \alpha_{32} \alpha_{33} \dots \alpha_{3n-1} \alpha_{3n} & 1 \\ \dots & \dots \\ \alpha_{n1} \alpha_{n2} \alpha_{n3} \dots \alpha_{nn-1} \alpha_{nn} & 1 \\ \alpha_{n+11} \alpha_{n+12} \alpha_{n+13} \dots \alpha_{n+1n-1} \alpha_{n+1n} & 1 \end{vmatrix} + \\
 &+ (-1)^{1+n+1} \begin{vmatrix} \alpha_{21} \alpha_{22} \alpha_{23} \dots \alpha_{2n-1} \alpha_{2n} & 1 \\ \alpha_{31} \alpha_{32} \alpha_{33} \dots \alpha_{3n-1} \alpha_{3n} & 1 \\ \dots & \dots \\ \alpha_{n1} \alpha_{n2} \alpha_{n3} \dots \alpha_{nn-1} \alpha_{nn} & 1 \\ \alpha_{n+11} \alpha_{n+12} \alpha_{n+13} \dots \alpha_{n+1n-1} \alpha_{n+1n} & 1 \end{vmatrix},
 \end{aligned}$$

то е в сила следната:

Лема. За детерминантите $\begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \dots \\ a_n \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_{n-1} \\ a_{n+1} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_{n-2} \\ a_n \\ a_{n+1} \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_4 \\ \dots \\ a_{n+1} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 \\ a_3 \\ \dots \\ a_n \\ a_{n+1} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_2 \\ \dots \\ a_{n-1} \\ a_n \\ a_{n+1} \end{vmatrix}$ и

Коментар. Равенството в лемата се „конструира“ лесно, като се приложи „диагоналният“ принцип.

5.2. Элементарна точкова конфигурация в n -мерно пространство

5.2.1. Детерминанта на наредена $n+1$ -ка точки

$$A_1(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \dots, \alpha_{1n-1}, \alpha_{1n}),$$

596

Детерминантата

детерминанта на наредената $n+1$ -ка точки $(A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, A_{n+1})$.

Съгласно въведените означения

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} \alpha_{12} \alpha_{13} \dots \alpha_{1n-1} \alpha_{1n} & 1 \\ \alpha_{21} \alpha_{22} \alpha_{23} \dots \alpha_{2n-1} \alpha_{2n} & 1 \\ \alpha_{31} \alpha_{32} \alpha_{33} \dots \alpha_{3n-1} \alpha_{3n} & 1 \\ \dots & \dots \\ \alpha_{n1} \alpha_{n2} \alpha_{n3} \dots \alpha_{nn-1} \alpha_{nn} & 1 \\ \alpha_{n+11} \alpha_{n+12} \alpha_{n+13} \dots \alpha_{n+1n-1} \alpha_{n+1n} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \dots \\ A_n \\ A_{n+1} \end{bmatrix}.$$

Тъй като $n + 1$ обекта могат да бъдат наредени по $(n + 1)!$ начина, то с редицата $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, A_{n+1}$ от точки можем да свържем $(n+1).n \dots 2.1$ детерминанти от $n+1$ ред, а именно:

$$\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_n \\ A_{n+1} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_{n-1} \\ A_n \\ A_{n+1} \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} A_{n+1} \\ A_n \\ A_{n-1} \\ \vdots \\ A_2 \\ A_1 \end{vmatrix}$$

Тъй като въпросните детерминанти се получават една от друга чрез разместване на редове, то техните абсолютни стойности са равни.

5.2.2. Хипотеза. Правило на диагонала. Инварианта на елементарна точкова конфигурация в n -мерно пространство

Хипотеза. Нека точките $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, A_{n+1}$ образуват наредена $n+1$ -ка (в този ред) и X е произволна точка в n -мерно пространство. Нека точките имат координати съответно:

$$\begin{aligned} & A_1(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \dots, \alpha_{1n-1}, \alpha_{1n}), \\ & A_2(\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}, \dots, \alpha_{2n-1}, \alpha_{2n}), \\ & A_3(\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33}, \dots, \alpha_{3n-1}, \alpha_{3n}), \\ & \dots\dots\dots \\ & A_n(\alpha_{n1}, \alpha_{n2}, \alpha_{n3}, \dots, \alpha_{nn-1}, \alpha_{nn}), \\ & A_{n+1}(\alpha_{n+11}, \alpha_{n+12}, \alpha_{n+13}, \dots, \alpha_{n+1n-1}, \alpha_{n+1n}). \end{aligned}$$

Тогава за детерминантите:

$$\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \dots \\ A_n \\ X \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_{n-1} \\ X \\ A_{n+1} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 \\ \dots \\ A_{n-2} \\ X \\ A_n \\ A_{n+1} \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ X \\ A_4 \\ \dots \\ A_{n+1} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 \\ X \\ A_3 \\ \dots \\ A_n \\ A_{n+1} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} X \\ A_2 \\ \dots \\ A_{n-1} \\ A_n \\ A_{n+1} \end{vmatrix}$$

и $\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \dots \\ A_n \\ A_{n+1} \end{vmatrix}$ в сила равенството:

$$\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \dots \\ A_n \\ X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_{n-1} \\ X \\ A_{n+1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1 \\ \dots \\ A_{n-2} \\ X \\ A_n \\ A_{n+1} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ X \\ A_4 \\ \dots \\ A_{n+1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1 \\ X \\ A_3 \\ \dots \\ A_n \\ A_{n+1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X \\ A_2 \\ \dots \\ A_{n-1} \\ A_n \\ A_{n+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \dots \\ A_n \\ A_{n+1} \end{vmatrix}.$$

Коментар. Равенството в хипотезата се „конструира“ лесно, като се приложи „диагоналният“ принцип.

6. Вместо заключение

1) Нека множеството от $n+1$ точки $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, A_{n+1}$ и определените от

тях $\frac{(n+1)n}{2}$ отсечки – $A_1A_2, A_1A_3, \dots, A_nA_{n+1}$ наречем **симплекс** в n -мер-

ното пространство, а детерминантата $\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \dots \\ A_n \\ A_{n+1} \end{vmatrix}$ наречем „**ориентиран обем**“ на

симплекса $A_1A_2A_3 \dots A_nA_{n+1}$.

Тогава формулираната хипотеза има следния геометричен смисъл:

Ако $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, A_{n+1}$ са $n+1$ точки в n -мерното пространство и X е произволна точка, то алгебричният сбор от „ориентираните обеми“ на симплексите $A_1 A_2 A_3 \dots A_n X, A_1 A_2 \dots A_{n-1} X A_{n+1}, A_1 \dots A_{n-2} X A_n A_{n+1}, \dots, A_1 X A_3 \dots A_n A_{n+1}, X A_2 \dots A_{n-1} A_n A_{n+1}$ не зависи от точката X и е равен на „ориентирания обем“ на симплекса $A_1 A_2 A_3 \dots A_n A_{n+1}$.

2) Хипотезата показва, че точка X , разположена по „второстепенния диагонал“ на лявата страна, не участва в дясната страна на равенството. Ето защо тази теорема може да бъде наречена „правило за изключване на точка“ или „правило на диагонала“ в n -мерно пространство.

3) Горните разсъждения дават основание да въведем понятието инвариант на елементарна точкова конфигурация в n -мерно пространство. И така: нека е дадена елементарна конфигурация с върхове $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, A_{n+1}$ (в n -мерно пространство). Тогава абсолютната стойност на детерминантата на която и да е от наредените $n+1$ -ки, получени от точките $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, A_{n+1}$, ще наричаме **инварианта на елементарната точкова конфигурация** $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, A_{n+1}$.

REFERENCES/LITERATURA

- Vutova, I. (2014). *Heuristic and prognostic role of the theorems in the school curriculum of Mathematics. Author-report of PhD Dissertation*. Sofia. [Вутова, И. (2014). *Евристична и прогностична роля на теоремите в училищния курс по математика. Автореферат на дисертационен труд за присъждане на образователната и научна степен доктор*. София].
- Gavrilov, M. & I. Dimovski (1973). *Introduction to Elementary algebra* (in Bulgarian). Sofia: Narodna Prosveta. [Гаврилов, М. & И. Димовски (1973). *Въведение в елементарната алгебра*. София: Народна просвета].
- Gjonov, A. & N. Stoev (1994). *Collection of problems on Analytical Geometry* (in Bulgarian). Sofia & SOFTEH. [Гъонов, А. & Н. Стоев (1994). *Сборник от задачи по аналитична геометрия*. София: СОФТЕХ].
- Dochev, K. & D. Dimitrov (1973). *Linear algebra* (in Bulgarian). Sofia: Nauka I izkustvo. [Дочев, К. & Д. Димитров (1973). *Линейна алгебра*. София: Наука и изкуство].
- Lalchev, Z., I. Vutova & M. Varbanova (2005). *Vector-analytical method in solving geometric problems on areas and volumes* (in Bulgarian). Sofia:

- Veda Slovena-JT. [Лалчев, З., И. Вутова & М. Върбанова (2005). *Векторно-алгебричен метод за решаване на геометрични задачи от лица и обеми*. София: Веда Словена-ЖГ].
- Tonov, I. (1980). *Matrices and determinants* (in Bulgarian). Sofia: Narodna Prosveta. [Тонов, И. (1980). *Матрици и детерминанти*. София: Народна просвета].
- Yaglom, I. & V. Ashkinuze (1962). *Ideas and methods of Affine and Projective geometries, Part I* (in Russian). Moscow: State scholarpedagogical publishing house of the Russian Ministry of Education. [Яглом, И. & В. Ашкинuze (1962). *Идеи и методы аффинной и проективной геометрии I часть*. Москва: Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства просвещения РСФСР].

BASIC CONFIGURATIONS OF POINTS. DIAGONAL PRINCIPLE. INVARIANTS

Abstract. The concepts of area of a triangle and volume of a tetrahedron are interpreted as invariants of basic configurations of points in two and three-dimensional spaces and their analogues are found in four-dimensional space. The idea of the invariant of a basic configuration of points is continued for n -dimensional space and a general principle for its development is formulated. Methods of analytical geometry (vector-algebraic modeling, affine co-ordinates, point co-ordinates, vector co-ordinates) and instruments of linear algebra (determinants) are used.

✉ **Prof. Dr. Zdravko Lalchev**
Faculty of Preschool and Primary Education
University of Sofia
69A, Shipchenski prohod Blvd.
1574 Sofia, Bulgaria
E-mail: zdravkol@abv.bg

✉ **Dr. Irina Voutova, Assist. Prof.**
Faculty of Mathematics and Informatics
University of Sofia
5, James Boucher Blvd.
1164 Sofia, Bulgaria
E-mail: irinazv@abv.bg