Contest Problems
Конкурсни задачи

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 2, 2017

Задача 1. Да се определи дали съществуват естествени числа n и k, при които стойността на израза $2017^{n-1}+3^{k}+4$ е:

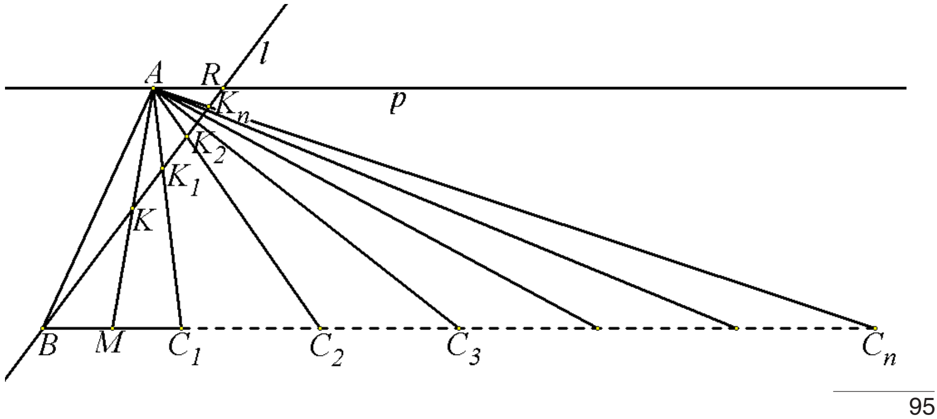
а) куб на естествено число;

б) сбор от кубовете на две естествени числа;

в) сбор от кубовете на три естествени числа.

Христо Лесов, Казанлък

Решение: при $n=1$ и $k=1$ имаме $2017^{0}+3^{1}+4=2^{3}$. Следователно случай а) има положителен отговор. Тъй като при $n\geq 1$ числото $2017^{n-1}-1$ се дели на $2017-1=9.224$, то при $n\geq 1$ и $k\geq 2$ имаме $2017^{n-1}+3^{k}+4=\left(2017^{n-1}-1\right)+\left(9.3^{k-2}+5\right)=9m+5$, където m е естествено число. Следователно всяко число от разглеждания вид при деление на 9 дава остатък 5. Всяко естествено число е от вида $3c$, $3c+1$ или $3c+2$, а неговият куб при деление на 9 има остатък съответно 0, 1 или 8. Следователно сборът от кубовете на две естествени числа при деление на 9 дава остатък $0+0=0$, $0+1=1$, $0+8=8$, $1+1=2$, $1+8=9\equiv 0$ или $8+8=16\equiv 7$, а сборът от кубовете на три естествени числа при деление на 9 дава остатък $0+0+0=0$, $0+0+1=1$, $0+0+8=8$, $0+1+1=2$, $0+1+8=9\equiv 0$, $0+8+8=16\equiv 7$, $1+1+1=3$, $1+1+8\equiv 1$, $1+8+8=17\equiv 8$ или $8+8+8=24\equiv 6$. В никой от тези случаи не се получава остатък 5. Следователно $2017^{n-1}+3^{k}+4$ не може да се представи като сума от кубове нито на две, нито на три естествени числа. Това означава, че случаите б) и в) имат отрицателен отговор.



Задача 2. Даден е ΔABC_1. Точките C_2, C_3, …, C_n лежат върху лъча $\overrightarrow{BC_1}$ и са такива, че $C_1C_2 = C_2C_3 = \cdots = C_{n-1}C_n = BC_1$. Правата l през върха B и средата K на медианата AM на ΔABC_1 пресича AC_1, AC_2, …, AC_n съответно в точките K_1, K_2, …, K_n. Да се пресметне сумата $\frac{C_1K_1}{K_1A} + \frac{C_2K_2}{K_2A} + \cdots + \frac{C_nK_n}{K_nA}$.

Милен Найденов, Варна

Решение: през точката A построяваме права p, успоредна на AC_1. Нека $BK \cap p = R$. Тъй като $BMRA$ е успоредник, то $AR = BM = \frac{1}{2}BC_1$. Освен това $\Delta AK_nR \sim \Delta BK_nC_n$. Затова $\frac{C_nK_n}{K_nA} = \frac{BC_n}{AR} = \frac{nBC_1}{\frac{1}{2}BC_1} = 2n$. Следователно

$$\frac{C_1K_1}{K_1A} + \frac{C_2K_2}{K_2A} + \cdots + \frac{C_nK_n}{K_nA} = 2 + 4 + \cdots + 2n = 2(1 + 2 + \cdots + n) = n(n+1).$$

Задача 3. В изпъкналия четириъгълник $ABCD$ точките M, N и P са средите съответно на страните AD, BC и CD, а T е пресечната точка на диагоналите му AC и BD. Ако втората обща точка K на описаните около триъгълниците ABT и CDT окръжности лежи в ΔBDC и са изпълнени равенствата $\sphericalangle MNP = \sphericalangle BAD = \frac{1}{2}\sphericalangle ADC$, да се докаже, че точката K лежи върху Ойлеровата права на ΔABD.

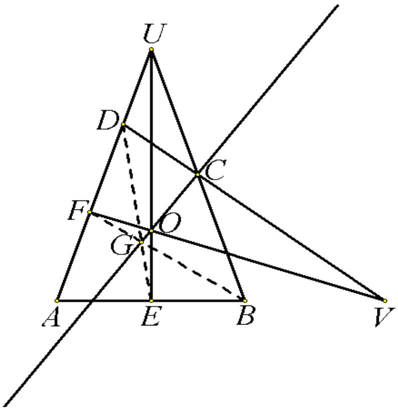
Хаим Хаимов, Варна

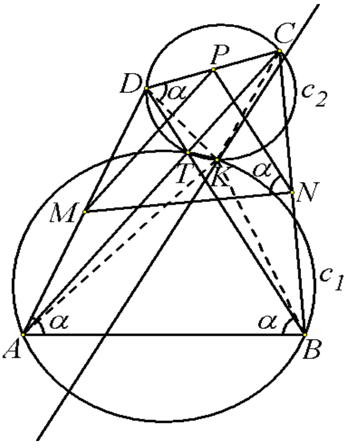
Решение: в решението на задачата ще използваме следващата

Лема. Ако в изпъкналия четириъгълник $ABCD$ са изпълнени равенствата $\sphericalangle CDA = \sphericalangle DAB = \sphericalangle ABD$, Ойлеровата права на ΔABD минава през върха C.

Доказателство. Нека $BC \cap AD = U$ и $AB \cap CD = V$, а E и F са средите съответно на страните AB и CD. От условието следва, че триъгълниците ABU и CDV са равнобедрени. Медианите им UE и VF са симетрали съответно на отсечките AB и CD. Затова пресечната им точка O е центърът на описаната около ΔABD окръжност. Тъй като $\sphericalangle ABD < \sphericalangle BAD$, триъгълникът ABD не е равностранен. Следователно медианите му DE и BF се пресичат в точка G, която е различна от O. Върховете E, B, V и F, D, U

на шестоъгълника $DEUBFV$ са разположени алтернативно върху две прави. Затова от теоремата на Пап следва, че точките $G = DE \cap BF$, $O = EU \cap FV$ и $C = UB \cap VD$ лежат на една права. С това лемата е доказана.





Преминаваме към решение на задачата. От свойствата на вписаните ъгли следва, че $\sphericalangle BDK = \sphericalangle ACK$ и $\sphericalangle DBK = \sphericalangle CAK$. Следователно $\Delta BDK \sim \Delta ACK$ и $\dfrac{BK}{DK} = \dfrac{AK}{CK}$. От друга страна $\sphericalangle AKB = \sphericalangle ATB = \sphericalangle CTD = \sphericalangle CKD$. Следователно $\Delta AKB \sim \Delta CKD$. Оттук $\sphericalangle ABK = \sphericalangle CDK = \alpha$. Сега от свойствата на средните отсечки следва, че $MP \parallel AC$ и $NP \parallel BD$. Затова $\sphericalangle MPN = \sphericalangle ATB = \sphericalangle AKB$. Освен това $\Delta BDK \sim \Delta ACK$ (доказано по-горе) и $\dfrac{AC}{BD} = \dfrac{AK}{BK}$, откъдето $\dfrac{MP}{NP} = \dfrac{\frac{1}{2}AC}{\frac{1}{2}BD} = \dfrac{AC}{BD} = \dfrac{AK}{BK}$. Следователно $\Delta MPN \sim \Delta AKB$. Оттук следва, че $\sphericalangle MNP = \sphericalangle ABK = \alpha$. По условие имаме $\sphericalangle BAD = \sphericalangle MNP = \alpha$ и $\sphericalangle ADC = \sphericalangle MNP = 2\alpha$. Затова $\sphericalangle ADK = \sphericalangle ADC - \sphericalangle CDK = \alpha$. Така получихме $\sphericalangle KDA = \sphericalangle DAB = \sphericalangle ABK = \alpha$. Тъй като по условие точката K лежи в ΔBDC , то за четириъгълника $ABKD$ са изпълнени условията на лемата. Следователно точката K лежи върху Ойлеровата права на ΔABD .