Educational Matters
Научно-методически статии

ОСЪЩЕСТВЯВАНЕ НА ВЪТРЕШНОПРЕДМЕТНИ ВРЪЗКИ В ОБУЧЕНИЕТО ПО МАТЕМАТИКА – ТРИГОНОМЕТРИЧНИ ФУНКЦИИ И ПРОГРЕСИИ

[1)]Зара Данаилова-Стойнова, [2)]Петър Данчев
[1)] Регионално управление на образованието – Пловдив
[2)]Технически университет – София

Резюме. В настоящата статия са показани примери за осъществяване на вътрешнопредметни връзки между тригонометричните функции и прогресиите в училищния курс по математика.

Keywords: internal disciplinary connection; trigonometric function; arithmetic and geometric progression; problem solving

Едни от основните цели на обучението по математика са: формиране на логическо мислене, комбинативност, наблюдателност; овладяване на математически идеи и методи; формиране на умения за активна познавателна дейност в процеса на обучението и за прилагане на математическите знания в практиката и ежедневието; изграждане на математическа култура като компонент от общата култура на човека. За да се постигнат тези и други общи и специфични цели, е необходимо учителят систематично и целенасочено да формира трайни и осъзнати математически знания, умения и компетентности за прилагането им, да изгражда функционална грамотност у учениците. Важно средство за това, от една страна, е интегрирането на математическото учебно съдържание и от друга страна – свързването му с други области на познанието (осъществяване на междупредметни връзки) и свързването на математическите знания от различни раздели на математиката (вътрешнопредметни връзки). Като примери ще посочим синхронизиране на алгебричното учебно съдържание с геометрията, на тригонометрията с алгебрата, на математическия анализ с геометричните знания и пр. Според В. Далингер: „Ролята на вътрешнопредметните връзки в учебния процес е огромна, като те непосредствено влияят на постигането на образователните, развиващите и възпитателните цели на обучението. При това вътрешнопредметните връзки формират у учащите се научен мироглед, помагат да се разглежда светът в неговото движение и развитие, способстват за установяване на логически връзки между понятията, развиват логическото мислене на учениците и допринасят за преодоляване на формализма в обучението“ (Dalinger, 1991).

В тази статия ще се спрем конкретно на система от задачи, илюстрираща връзки на понятията аритметична и геометрична прогресия с тригонометричните функции, изучавани в училищния курс по математика в гимназиалния етап на обучение. Темата е подходяща също така за разглеждане в задължително избираемата и профилираната подготовка на учениците от XI и XII клас.

Интегрирането на учебното съдържание за прогресии с тригонометрични функции ще илюстрираме чрез следните три групи задачи.

I тип. *Задачи от тригонометрични функции, чиито аргументи образуват аритметична или геометрична прогресия.*

II тип. *Задачи от тригонометрични функции, образуващи прогресия (аритметична или геометрична).*

III тип. *Задачи от прогресии на тригонометрични функции, като същевременно и аргументите им образуват прогресия.*

Оказва се, че тригонометричните функции с аргументи, образуващи прогресия, могат да участват в различни изрази, след преобразуването на които се получават интересни тъждества (Scanavi, 1988). За целта да разгледаме следната задача от

I тип:

Задача 1. *Пресметнете стойността на израза*:

А) $\sin 20°.\sin 40°.\sin 60°.\sin 80°$;

Б) $\sin 10°.\sin 30°.\sin 50°.\sin 70°.\sin 90°$;

В) $\sin 10°.\sin 20°.\sin 30°.\sin 40°.\sin 50°.\sin 60°.\sin 70°$;

Г) $\cos 10°.\cos 30°.\cos 50°.\cos 70°$;

Д) $\operatorname{tg} 20°.\operatorname{tg}40°.\operatorname{tg}60°.\operatorname{tg}80°$;

Е) $\cos\frac{\pi}{7}.\cos\frac{2\pi}{7}.\cos\frac{4\pi}{7}$;

Ж) $\cos\frac{\pi}{9}.\cos\frac{2\pi}{9}.\cos\frac{4\pi}{9}$;

З) $\cos\frac{\pi}{17}.\cos\frac{2\pi}{17}.\cos\frac{4\pi}{17}.\cos\frac{8\pi}{17}$.

В представените примери идеята за решаване се основава на факта, че аргументите образуват аритметична или геометрична прогресия, което води до необходимостта от подходящо комбиниране или допълване на участващите множители до позната тригонометрична формула. Ще се спрем на решенията на примерите В) и З):

Решение: В) Използвайки известните тъждества $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$ и $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$ преобразуваме дадения израз по следния начин:

$\sin 10°.\sin 20°.\sin 30°.\sin 40°.\sin 50°.\sin 60°.\sin 70° =$
$\sin 10°.\sin 20°.\sin 30°.\sin 40°.\cos 40°.\cos 30°.\cos 20° =$
$\frac{1}{8}.\sin 10°.(2.\sin 20°.\cos 20°).(2.\sin 30°\cos 30°).(2.\sin 40°.\cos 40°) =$
$\frac{1}{8}.\sin 10°.\sin 40°.\sin 60°.\sin 80° = \frac{1}{16}.(2.\sin 10°.\cos 10°).\sin 40°.\frac{\sqrt{3}}{2} =$
$\frac{\sqrt{3}}{32}.\sin 20°.\sin 40°.$

За да получим окончателен отговор като число, може да заместим стойностите на $\sin 20°$ и $\sin 40°$ с тези от четиризначните математически таблици, или от друга страна – може да се използва формулата

$\sin 20°.\sin 40° = \frac{1}{2}(\cos 20° - \cos 60°) = \frac{1}{2}(cos 20° - \frac{1}{2})$ и така изразът ще придобие вида $\frac{\sqrt{3}}{64}\left(\cos 20° - \frac{1}{2}\right).$ Единствено остава да се замести точната стойност на $\cos 20°$ от споменатите таблици.

З) $\cos\frac{\pi}{17}.\cos\frac{2\pi}{17}.\cos\frac{4\pi}{17}.\cos\frac{8\pi}{17} = \frac{2.\sin\frac{\pi}{17}}{2.\sin\frac{\pi}{17}}.\cos\frac{\pi}{17}.\cos\frac{2\pi}{17}.\cos\frac{4\pi}{17}.\cos\frac{8\pi}{17} =$

$$\frac{2.\sin\frac{2\pi}{17}}{4.\sin\frac{\pi}{17}}.\cos\frac{2\pi}{17}.\cos\frac{4\pi}{17}.\cos\frac{8\pi}{17} = \frac{2.\sin\frac{4\pi}{17}}{8.\sin\frac{\pi}{17}}.\cos\frac{4\pi}{17}.\cos\frac{8\pi}{17} = \frac{2.\sin\frac{8\pi}{17}}{16.\sin\frac{\pi}{17}}.\cos\frac{8\pi}{17}$$

$$= \frac{\sin\frac{16\pi}{17}}{16.\sin\frac{\pi}{17}} = \frac{\sin\frac{\pi}{17}}{16.\sin\frac{\pi}{17}} = \frac{1}{16}.$$

И в този пример използвахме основно формулата $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$ а в края и формулата $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha.$ □

За да се формират по-трайни знания при използването на този подход, на учениците се дава за самостоятелна работа да съставят поне два израза, съдържащи тригонометрични функции с аргументи, образуващи прогресия, и да преобразуват тези изрази.

Със същата идея се доказват и следващите тъждества, съдържащи тригонометричните функции, на които аргументите образуват прогресия (вж. също (Scanavi, 1988)).

Задача 2. *Докажете, че*:

А) $\cos\frac{\pi}{33}.\cos\frac{2\pi}{33}.\cos\frac{4\pi}{33}.\cos\frac{8\pi}{33}.\cos\frac{16\pi}{33} = \frac{1}{32};$

Б) $\cos\frac{2\pi}{31}.\cos\frac{4\pi}{31}.\cos\frac{8\pi}{31}.\cos\frac{16\pi}{31}.\cos\frac{32\pi}{31}=\frac{1}{32}$;

В) $\cos\frac{\pi}{15}.\cos\frac{2\pi}{15}.\cos\frac{3\pi}{15}.\ \ldots\ .\cos\frac{7\pi}{15}=\frac{1}{2^7}$;

Г) $\cos\frac{\pi}{15}.\cos\frac{2\pi}{15}.\cos\frac{3\pi}{15}.\ \ldots\ .\cos\frac{13\pi}{15}.\cos\frac{14\pi}{15}=-\frac{1}{2^{14}}$;

Д) $\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}=-1$;

Е) $\sin 10^\circ+\sin 20^\circ+\sin 30^\circ+\sin 40^\circ+\sin 50^\circ=\frac{\sin 25^\circ}{2\sin 5^\circ}$.

Ще разгледаме решението на предпоследния пример, тъй като в него, за разлика от горните, се извършва събиране на тригонометрични функции. За целта ще използваме формулите за сбор на тригонометрични функции и подходящо комбиниране на събираемите – първото с четвъртото и второто с третото. И така:

Решение: Д)

$$\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}=2.\cos\pi.\cos\frac{3\pi}{5}+2.\cos\pi.\cos\frac{\pi}{5}=$$
$$-2.\left(\cos\frac{3\pi}{5}+\cos\frac{\pi}{5}\right)=-4.\cos\frac{2\pi}{5}.\cos\frac{\pi}{5}=$$
$$\frac{-4.\cos\frac{2\pi}{5}.\cos\frac{\pi}{5}.\sin\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{-2.\sin\frac{2\pi}{5}.\cos\frac{2\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{-\sin\frac{4\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{-\sin\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}}=-1.\square$$

В примерите от следващата задача имаме опростяване на изрази, в които се събират или изваждат тригонометрични функции, чиито аргументи образуват аритметична прогресия.

Задача 3. *Опростете израза*:

А) $\sin 2\alpha+\sin 4\alpha+\sin 6\alpha$;

Б) $\sin 5\alpha+\sin 6\alpha+\sin 7\alpha+\sin 8\alpha$;

В) $\sin 5\alpha-\sin 6\alpha-\sin 7\alpha+\sin 8\alpha$;

Г) $\cos 3\alpha-\cos 4\alpha-\cos 5\alpha+\cos 6\alpha$;

Д) $\frac{\sin 4\alpha+\sin 5\alpha+\sin 6\alpha}{\cos 4\alpha+\cos 5\alpha+\cos 6\alpha}$;

Е) $\dfrac{\cos 7\alpha-\cos 8\alpha-\cos 9\alpha+\cos 10\alpha}{\sin 7\alpha-\sin 8\alpha-\sin 9\alpha+\sin 10\alpha}$;

Ж) $\dfrac{\sin 13\alpha+\sin 14\alpha+\sin 15\alpha+\sin 16\alpha}{\cos 13\alpha+\cos 14\alpha+\cos 15\alpha+\cos 16\alpha}$.

Решение: да се спрем на подусловие Г) – прилагаме формулата за сбор и разлика на косинуси и по този начин представяме израза във вид на произведение:

$\cos 3\alpha-\cos 4\alpha-\cos 5\alpha+\cos 6\alpha=2\cos\frac{9\alpha}{2}.\cos\frac{3\alpha}{2}-2\cos\frac{9\alpha}{2}.\cos\frac{\alpha}{2}=$

$2\cos\frac{9\alpha}{2}.\left(-2\sin\alpha.\sin\frac{\alpha}{2}\right)=-4\sin\alpha.\sin\frac{\alpha}{2}.\cos\frac{9\alpha}{2}$. Така полученият отговор е във вид, удобен за логаритмуване. □

Същата идея успешно може да се приложи и в следващата сходна задача, която е оставена за самостоятелна работа.

Задача 4. *Докажете, че*:

А) $\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha+\cos 7\alpha=4\cos\alpha.\cos 2\alpha.\cos 4\alpha$;

Б) $\dfrac{\sin 6\alpha+\sin 7\alpha+\sin 8\alpha+\sin 9\alpha}{\cos 6\alpha+\cos 7\alpha+\cos 8\alpha+\cos 9\alpha}=\operatorname{tg}\dfrac{15\alpha}{2}$;

В) $\dfrac{\cos 2\alpha-\cos 6\alpha-\cos 10\alpha+\cos 14\alpha}{\sin 2\alpha-\sin 6\alpha-\sin 10\alpha+\sin 14\alpha}=\operatorname{tg} 2\alpha$.

По-добро и задълбочено илюстриране на вътрешнопредметната връзка между прогресиите и тригонометричните функции може да се направи и чрез разглеждане на тригонометричните функции на ъгли в триъгълник, в четириъгълник и т.н. в някоя друга геометрична фигура, т.е. в контекста на планиметричното учебно съдържание. Ще разгледаме няколко изследователски задачи от изпъкнал многоъгълник, чиито ъгли образуват дадена прогресия.

Задача 5. *При какви условия съществува триъгълник, ако*:
А) *мерките на вътрешните му ъгли образуват аритметична прогресия*;
Б) *мерките на вътрешните му ъгли образуват геометрична прогресия*.

Решение: в първото подусловие лесно се съобразява, че за да съществува триъгълник, чиито ъгли образуват аритметична прогресия, то тези ъгли са от вида $60^\circ-\alpha; 60^\circ; 60^\circ+\alpha$, където $\alpha\in[0^\circ,60^\circ)$, т.е. средният по големина ъгъл на такъв триъгълник трябва непременно да е с мярка 60°, докато ъгълът α може и да варира. Резюмирайки, няма еднозначно определимо условие, при което това да е изпълнено.

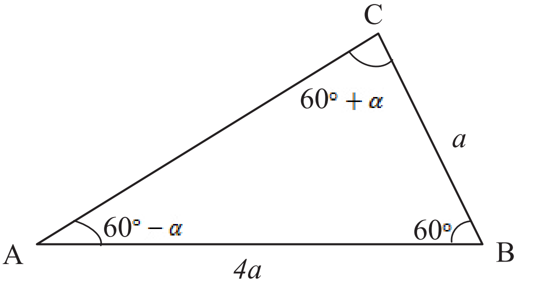
Във второто подусловие означаваме ъглите на триъгълника с $\beta;\ \beta q;\ \beta q^2$, където β и q са положителни числа и q е частното на прогресията. Очевидно при $q = 1$ всеки равностранен триъгълник отговаря на условието на задачата.

Да разгледаме сега случая, в който q е различно от 1. Равенството $\beta + \beta q + \beta q^2 = \pi$ можем да интерпретираме като квадратно уравнение с неизвестно q и параметър β, като за целта записваме: $\beta q^2 + \beta q + \beta - \pi = 0$. Така дискриминантата D е равна на $\beta^2 - 4\beta(\beta - \pi)$, т.е. D$= 4\beta\pi - 3\beta^2$. Ясно е, че уравнението $\beta q^2 + \beta q + \beta - \pi = 0$ има реални корени само при изпълнение на неравенството $D \geq 0$, откъдето $\beta \epsilon \left[0; \frac{4\pi}{3}\right]$. Но тъй като β е мярка на ъгъл в триъгълник, то тя задължително принадлежи на интервала $(0; \pi)$, което все пак удовлетворява търсеното неравенство за D по-горе, понеже интервалът $(0; \pi)$ се съдържа в $\left[0; \frac{4\pi}{3}\right]$. Освен това условието $0 < \beta < \pi$ имплицира, че $\sqrt{D} > \beta$, което гарантира, че коренът $q = \frac{-\beta + \sqrt{D}}{2\beta} > 0$. С други думи, можем окончателно да заключим, че съществуват безброй много триъгълници, чиито мерки на ъглите образуват геометрична прогресия. Например такива са триъгълниците с ъгли $\frac{\pi}{7}, \frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}$, а също и с ъгли $\frac{\pi}{13}, \frac{3\pi}{13}, \frac{9\pi}{13}$, и т.н. Резюмирайки, няма еднозначно установимо условие, при което това да е изпълнено. □

За отработване на метода за самостоятелна работа се поставя задачата и за външните ъгли на триъгълника.

Триъгълниците, чиито мерки на ъглите образуват прогресии, притежават различни свойства, някои от които ще разгледаме в следващите няколко задачи.

Задача 6. *Ъглите на триъгълник образуват аритметична прогресия, а най-голямата му страна е четири пъти по-голяма от най-малката. Намерете тангенса на най-малкия му ъгъл.*



Решение: ще разгледаме и анализираме по-подробно решението на тази задача. В подусловие А) на задача 5. показахме, че ако съществува триъгълник, чиито ъгли образуват аритметична прогресия, то тези ъгли са от вида $60° - \alpha; 60°; 60° + \alpha$, където $\alpha \in [0°, 60°)$. Нека триъгълникът е ABC и да означим дължините на най-малката и най-голямата му страна съответно с a и $4a$. От синусовата теорема имаме равенството

$\frac{a}{\sin(60°-\alpha)} = \frac{4a}{\sin(60°+\alpha)}$, откъдето намираме $\sin(60° + \alpha) = 4.\sin(60° - \alpha)$.

Развивайки по формулите, получаваме

$\sin 60°.\cos\alpha + \cos 60°.\sin\alpha = 4(\sin 60°.\cos\alpha - \cos 60°.\sin\alpha)$, т.е.

$\frac{\sqrt{3}}{2}.\cos\alpha + \frac{1}{2}.\sin\alpha = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}.\cos\alpha - \frac{1}{2}.\sin\alpha\right)$, т.е.

$\sqrt{3}.\cos\alpha + \sin\alpha = 4\sqrt{3}.\cos\alpha - 4\sin\alpha$, т.е.

$3\sqrt{3}.\cos\alpha = 5.\sin\alpha$, откъдето намираме $\mathrm{tg}\alpha = \frac{3\sqrt{3}}{5}$. Оттук следва, че

$\mathrm{tg}(60° - \alpha) = \frac{\mathrm{tg}60° - \mathrm{tg}\alpha}{1 + \mathrm{tg}60°\mathrm{tg}\alpha} = \frac{\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{5}}{1 + \sqrt{3}.\frac{3\sqrt{3}}{5}} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{5}}{\frac{14}{5}} = \frac{\sqrt{3}}{7}$. □

Следващите две задачи от този тип предлагаме отново за самостоятелна работа.

Задача 7. *Да се намерят ъглите на триъгълник, ако те образуват аритметична прогресия и най-голямата му страна е два пъти по-голяма от най-малката.*

Задача 8. *Ако ъглите на триъгълник образуват геометрична прогресия с частно 2, да се докаже, че една от височините на триъгълника е равна на сбора на другите две.*

Остава интересен въпросът и за ъглите на четириъгълник, чиито ъгли образуват прогресия.

Задача 9. *При какви условия съществува изпъкнал четириъгълник, ако*:

А) *мерките на вътрешните му ъгли образуват аритметична прогресия*;

Б) *мерките на вътрешните му ъгли образуват геометрична прогресия*?

Решение: в подусловие А) означаваме ъглите на четириъгълника с $\alpha,\ \alpha + d, \alpha + 2d$ и $\alpha + 3d$. Получаваме равенството $\alpha + \alpha + d + \alpha + 2d + \alpha + 3d = 2\pi$, откъдето $2\alpha + 3d = \pi$. Оказва се, че сумата от най-малкия и най-големия ъгъл на четириъгълника е $\pi.\pi.$ Такъв например е този с ъгли 60°, 80°, 100° и 120°, около който би могло да се опише окръжност; например, ако ъглите 60° и 120° са срещуположни. Резюмирайки, няма еднозначно установимо условие, при което това да е изпълнено.

В подусловие Б) извършваме аналогични разсъждения на тези, както в случая на триъгълник. Ако ъглите на четириъгълника са $\beta, \beta q, \beta q^2$ и βq^3, където β и q са положителни числа и q е частното на прогресията (може също да считаме, че $q \neq 1$, защото при $q = 1$ фигурата е очевидно квадрат) получаваме $\beta + \beta q + \beta q^2 + \beta q^3 = 2\pi$. По-детайлен анализ на това кубично спрямо qq уравнение оставяме на компетентния читател. Така при някои конкретни стойности на q можем да получим безброй много четириъгълници, чиито ъгли образуват геометрична прогресия. Такива например са четириъгълниците с ъгли $\frac{2\pi}{15}, \frac{4\pi}{15}, \frac{8\pi}{15}, \frac{16\pi}{15}$, както и с ъгли $\frac{16\pi}{65}, \frac{24\pi}{65}, \frac{36\pi}{65}, \frac{54\pi}{65}$, и т.н. Резюмирайки, няма еднозначно определимо условие, при което това да е изпълнено.□

По подобен начин може да се разгледа и съответната задача за външните ъгли на четириъгълник, която е добре да се остави за домашна работа на учениците.

Следващото наше предложение е задача с нестандартна формулировка.

Задача 10. *Известно е, че вътрешните ъгли на даден изпъкнал многоъгълник, най-малкият ъгъл на който е 120°, образуват аритметична прогресия с разлика 5°. Намерете броя на страните на този многоъгълник.*

Упътване: да се използва формулата, че сумата от вътрешните ъгли на един изпъкнал *n*-ъгълник е *(n-2).180°*, където *n* е произволно естествено число ≥ 3.

Аналогична постановка на задачата за съществуване на триъгълник с определени свойства може да се разгледа и когато тригонометричните функции на ъглите на триъгълника образуват прогресия. Това вече е пример на задача от втория тип.

II тип:

Задача 11. *При какви условия съществува триъгълник, ако*:

А) *синусите на вътрешните му ъгли образуват аритметична прогресия*;

Б) *косинусите на вътрешните му ъгли образуват геометрична прогресия*?

Решение: ще се спрем само на подусловие А), тъй като другото оставяме на читателя. Нека за триъгълник с ъгли α, β и γ е изпълнено $\div \sin\alpha, \sin\beta, \sin\gamma$. Оттук следва, че $2\sin\beta = \sin\alpha + \sin\gamma$, откъдето чрез използване на добре известната формула за сума на два синуса получаваме $2\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}.\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}$.

Следователно $4\sin\frac{\beta}{2}.\cos\frac{\beta}{2} = 2\sin\frac{\pi-\beta}{2}.\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}$. Разделяме на 2 $\cos\frac{\beta}{2} \neq 0$ и получаваме $2.\sin\frac{\beta}{2} = \cos\frac{\alpha-\gamma}{2}$. Но $\frac{\beta}{2} = 90° - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}\right)$. Затова

$2\sin\frac{\beta}{2} = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}\right) = 2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2} - 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$. Освен това

$\cos\frac{\alpha-\gamma}{2} = \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\gamma}{2}\right) = \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$. Окончателно

$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = 3\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$. Понеже $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \neq 0$, то $\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} = 3$, което е и търсеното условие. □

Както по-горе, може също така да се разгледа и съответната задача за изпъкнал четириъгълник.

Завършваме втория вид със следните две задачи с повишена трудност.

Задача 12. *Ако* $cotg\frac{\alpha}{2}, cotg\frac{\beta}{2}, cotg\frac{\gamma}{2}$ *са естествени числа, образуващи аритметична прогресия, да се определи видът на триъгълника спрямо ъглите му α, β, γ, както и отношението на страните му*.

Задача 13. *Нека* α, β и γ *са ъгли на триъгълник и* $\sin\alpha, \sin\beta$ и $\sin\gamma$ *образуват в този ред аритметична прогресия. Докажете, че* $\frac{1}{2}.sin\frac{\beta}{2} = sin\frac{\alpha}{2}.sin\frac{\gamma}{2}$. (Това е зад. 49 от (Danchev & Nedelchev, 2003)).

Към третия вид можем вече да причислим следната задача.

III тип:

Задача 14. *Да се намери неизвестното число x, така че да е изпълнено*:

А) $\div\ sin\,x,\quad sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right),\quad sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$;

Б) $\div\ cos\,x,\quad cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right),\quad cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$.

Решение*:* да се спрем на подусловие Б). От даденото условие за аритметична прогресия следва, че

$2.\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$, откъдето

$2.\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 2.\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right).\cos\frac{\pi}{3}$, а оттук получаваме $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$.

Тогава решението на това тригонометрично уравнение е $x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, където *k* е цяло число. Окончателно $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$. □

На учениците може да се постави и въпросът за геометрична прогресия на тези функции. Също така в геометричен аспект може да се постави и следната логично възникваща задача.

Задача 15. *При какви условия съществува триъгълник, чиито вътрешни ъгли образуват аритметична прогресия, като същевременно и синусите на тези ъгли образуват аритметична прогресия.*

Решение: в задача 5 А) доказахме, че ако ъглите на триъгълник образуват аритметична прогресия, то те имат вида $60° - \alpha; 60°; 60° + \alpha$, където $\alpha \in [0°, 60°)$. Но от задача 11 А) получаваме равенството $\operatorname{cotg}\frac{60°-\alpha}{2}\operatorname{cotg}\frac{60°+\alpha}{2} = 3$. След известни несложни тригонометрични преобразувания, които оставяме на читателя, получаваме равенството $\cos\alpha = 1$, откъдето следва, че $\alpha = 0°$, т.е. триъгълникът е равностранен. □

Същата задача може да се постави и за косинусите на ъглите.

Завършваме нашето представяне със следния актуален въпрос.

Задача 16. *Съществува ли изпъкнал четириъгълник, чиито мерки на вътрешните му ъгли образуват аритметична прогресия и същевременно:*

А) синусите на вътрешните му ъгли образуват аритметична прогресия;

Б) косинусите на вътрешните му ъгли образуват аритметична прогресия;

В) тангенсите на вътрешните му ъгли образуват аритметична прогресия;

Г) котангенсите на вътрешните му ъгли образуват аритметична прогресия?

Упътване: използвайте разгледаната по-горе задача 9.

В заключение ще отбележим, че осъществяването на вътрешнопредметни връзки в обучаващата дейност на учителя се състои преди всичко в подбора на подходящо учебно съдържание, което да ги илюстрира, в избора на методи, средства и похвати на обучение, насочени преди всичко към успешното усвояване на учебното съдържание и постигане на очакваните резултати, определени в учебната програма по математика. Реализацията на вътрешнопредметни връзки от страна на ученика се състои в неговата самостоятелна работа за откриване на такива взаимоотношения между вече изучени теми от учебното съдържание с цел обобщаване и систематизиране на математическите знания. Предвид това можем да считаме, че учителят трябва да полага непрекъснати и целенасочени усилия за разкриване на взаимосвързаността на изучаваните понятия и твърдения в училищния курс по предмета на преподаване (за повече подробности вж. (Andreev, 1996), (Andreev, 1986) и (Grozdev, 2007)).

REFERENCES/ЛИТЕРАТУРА

Dalinger, V. (1991). *The methodology of implementation of internal disciplinary connections in teaching mathematics* (in Russian). Moscow: Prosveshtenie. (ISBN 5-09-002726-9) [Далингер, В. (1991). *Методика реализации внутрипредметных связей в обучении по математике*. Москва: Просвещение. (ISBN 5-09-002726-9).]

Scanavi, M. (1988). *Collection of problems in mathematics for those entering the Technical University* (in Russian). Moscow: Visshaja shcola. [Сканави, М. (1988). *Сборник задач по математике для поступающих во ВТУЗы*. Москва: Высшая школа.]

Danchev, P. & K. Nedelchev (2003). *Sp. Matematicheski forum*. Volume V, book № 6. [Данчев, П. & К. Неделчев (2003), *сп. „Математически форум“,* т. V, бр. 6, 2003.]

Andreev, M. (1996). *The educational process. Didactics* (in Bulgarian). Sofia: St. Kliment Ohridski. [Андреев, М. (1996). *Процесът на обучението. Дидактика.* София: Св. Климент Охридски.]

Andreev, M. (1986). *Integrative trends in education* (in Bulgarian). Sofia: Narodna prosveta. [Андреев, М. (1986). *Интегративни тенденции в обучението*. София: Народна просвета.]

Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice).* Sofia: ADE. (ISBN 978-954-92139-1-1.)

REALIZATION OF INTERDISCIPLINARY CONNECTIONS IN MATHEMATICS TRAINING – TRIGONOMETRIC FUNCTIONS AND PROGRESSIONS

Abstract. Examples are shown in the present paper about the realization of interdisciplinary connections between trigonometric functions and progressions in high school mathematical curriculum.

✉ **Dr. Zara Danailova-Stoynova**
Senior Expert in Mathematics
Regional Department of Education
Plovdiv, Bulgaria
E-mail: zara_dan@abv.bg

✉ **Mr. Peter Vassilev Danchev, Assist. Prof.**
Senior Lecturer of Mathematics
Technical University of Sofia
Sofia, Bulgaria
E-mail: pvdanchev@mail.bg