

## ТРОЙКИ ЦЕНТРАЛНИ КОНИЧНИ СЕЧЕНИЯ ПРЕЗ ПОСТОЯННА ТОЧКА ВЪРХУ ПОСТОЯННО КОНИЧНО СЕЧЕНИЕ

<sup>1</sup>Сава Гроздев, <sup>2</sup>Веселин Ненков

<sup>1</sup>Висше училище по застраховане и финанси – София

**Резюме.** Статията представя обобщение на една задача за окръжности през постоянна точка в равнината на даден триъгълник.

*Keywords:* triangle; center; centroid; circum curve; Euler line

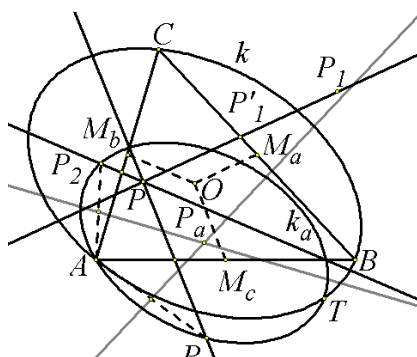
### 1. Търсене на обобщение

Целта на настоящите изследвания се състои в откриване на обобщение на следната задача: Точките  $O$  и  $G$  са съответно центърът на описаната окръжност и медицентърът на  $\triangle ABC$ . Точките  $O_1$ ,  $O_2$  и  $O_3$  са симетрични на  $O$  съответно спрямо правите  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$ . Аналогично  $G_1$ ,  $G_2$  и  $G_3$  са симетрични на  $G$  съответно спрямо  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$ . Да се докаже, че описаните окръжности на триъгълниците  $AO_2O_3$ ,  $BO_3O_1$ ,  $CO_1O_2$ ,  $AG_2G_3$ ,  $BG_3G_1$  и  $CG_1G_2$  минават през една точка  $T$  от описаната около  $\triangle ABC$  окръжност  $\Gamma$ .

При извършване на необходимите изследвания в процеса на търсене на желаното обобщение на тази задача е подходящо да се използват динамичните възможности на програмата THE GEOMETER'S SKETCHPAD (GSP). В началото да отбележим, че според известно свойство на ортоцентъра  $H$  на  $\triangle ABC$  точките  $H_1$ ,  $H_2$  и  $H_3$ , които са симетрични на  $H$  съответно спрямо  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$ , лежат върху описаната около  $\triangle ABC$  окръжност  $\Gamma$ . Следователно описаните окръжности на триъгълниците  $AH_2H_3$ ,  $BH_3H_1$  и  $CH_1H_2$ , които съвпадат с  $\Gamma$ , също минават през  $T$ . Това ни дава основание да предположим, че ако  $P$  е произволна точка от Ойлеровата права на  $\triangle ABC$ , а точките  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_3$  са симетричните на  $P$  съответно спрямо  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$ , описаните окръжности на триъгълниците  $AP_2P_3$ ,  $BP_3P_1$  и  $CP_1P_2$  минават през същата точка  $T$ , която участва във формулировката на задачата. Експериментите с GSP показват, че това предположение е основателно. Така получаваме едно обобщение на задачата.

По-нататък ще търсим обобщение на задачата, като заменим окръжностите с подходящи конични сечения. За целта заменяме описаната окръжността  $\Gamma$  с произволно описано за  $\triangle ABC$  конично сечение  $k$  с център  $O$ . Освен това нека  $P$  е произволна точка в равнината на  $\triangle ABC$ . С  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_3$  означаваме точките,

симетрични на  $P$  съответно спрямо  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$ . През средите на отсечките  $AP_2$ ,  $AP_3$  и  $P_2P_3$  построяваме прави, които са съответно спрегнати с правите  $AP_2$ ,  $AP_3$  и  $P_2P_3$  спрямо  $k$ . Тези прави се пресичат в една точка и затова общата им точка може да се разглежда като център на описано за  $\Delta AP_2P_3$  конично сечение. Аналогично построяваме конични сечения, които са описани около триъгълниците  $BP_3P_1$  и  $CP_1P_2$ . Наблюденията с GSP обаче показват, че така построените конични сечения нямат обща точка дори в случаите, когато  $P \equiv O$  и  $P \equiv G$ . Затова по този начин няма как да се получи обобщение на задачата. Следователно точките  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_3$  трябва да се построят по друг начин.



Фигура 1

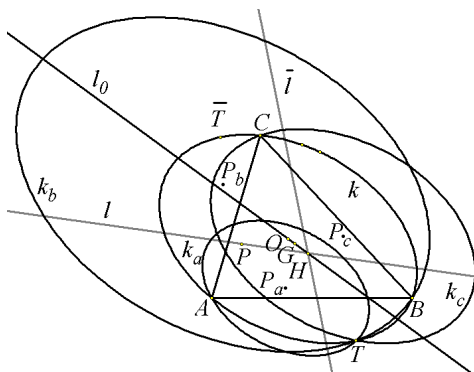
Нека  $M_a$ ,  $M_b$  и  $M_c$  са средите съответно на страните  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$ . При симетрия спрямо някоя от правите  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  образът на  $P$  образува с  $P$  права, която е успоредна на симетралата на съответната страна. Затова през  $P$  построяваме права  $p_1$ , успоредна на  $OM_a$ , а след това върху правата  $p_1$  построяваме точка  $P_1$  така, че средата на отсечката  $PP_1$  да лежи върху  $BC$  (фиг. 1). Аналогично по отношение на правите  $CA$  и  $AB$  построяваме съответно точките  $P_2$  и  $P_3$ . Сега, по описания по-горе начин, построяваме конични сечения  $k_a$ ,  $k_b$  и  $k_c$ , които са описани съответно за триъгълниците  $AP_2P_3$ ,  $BP_3P_1$  и  $CP_1P_2$ . След извършване на всички тези построения за произволна точка  $P$  забелязваме следното

**Твърдение 1.** Ако  $P$  е произволна точка в равнината на  $\Delta ABC$ , коничните сечения  $k$ ,  $k_a$ ,  $k_b$  и  $k_c$  минават през една точка (фиг. 2, 3).

Нека сега точката  $H$  е такава, че  $GH = -2.GO$ . Тогава точките  $O$ ,  $G$  и  $H$  лежат на права  $l_0$ , която е обобщение на Ойлеровата права, поради което я наричаме *Ойлерова права, определена от кривата  $k$*  (Grozdev & Nenkov, 2014 a). Точката  $H$  притежава редица свойства, подобни на тези на ортоцентъра на  $\Delta ABC$ . Затова точката  $H$  наричаме *ортоид, определен от  $k$*  (Grozdev & Nenkov, 2014, a). Ако точката  $P$  описва правата  $l_0$ , забелязваме, че коничните сечения  $k_a$ ,  $k_b$  и  $k_c$  минават през постоянна точка  $T$  от  $k$ . По този начин получаваме обобщение на

формулираното по-рано твърдение за класическата Ойлерова права на  $\triangle ABC$ . Когато  $P \equiv H$  ( $H$  е обобщение на ортоцентъра на  $\triangle ABC$ ), кривите  $k_a$ ,  $k_b$  и  $k_c$  съвпадат с  $k$ . Затова можем да предполагаме, че точката  $H$  има специален статут в извършените построения. Това означава, че може би всяка права през  $H$  притежава свойствата на Ойлеровата права  $l_0$ . Наблюденията с GSP потвърждават тези предположения. По-точно наблюдава се следното

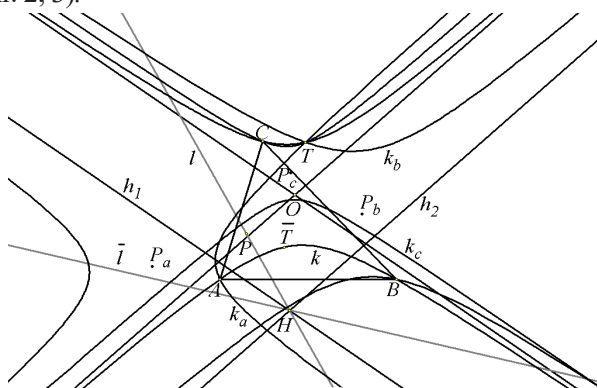
**Твърдение 2.** Ако  $l$  е произволна права през ортоида  $H$ , коничните сечения  $k_a$ ,  $k_b$  и  $k_c$  минават през постоянна точка  $T$  от  $k$  (фиг. 2, 3).



Фигура 2

От твърдение 2 следва, че на всяка права  $l$  през  $H$  съответства точка  $T$  от  $k$ . Нека  $\bar{l}$  е правата през  $H$ , която е спрягната с  $l$  спрямо  $k$ . На правата  $\bar{l}$  съответства точка  $\bar{T}$  от  $k$ . Точките  $T$  и  $\bar{T}$  са свързани по следния начин:

**Твърдение 3.** Точките  $T$  и  $\bar{T}$  са разположени диаметрално противоположно върху  $k$  (фиг. 2, 3).



Фигура 3

## 2. Доказателства и уточнения на формулираните твърдения

За да бъдат узаконени формулираните твърдения, те се нуждаят от строги доказателства. Тези доказателства ще извършим с помощта на барицентрични координати спрямо  $\triangle ABC$ , като  $A(1,0,0)$ ,  $B(0,1,0)$  и  $C(0,0,1)$  (Paskalev & Chobanov, 1985).

Нека координатните представяния на точките  $P$  и  $O$  са следните  $P(\lambda, \mu, \nu)$  и  $O(x_0, y_0, z_0)$ , където  $\lambda + \mu + \nu = 1$  и  $x_0 + y_0 + z_0 = 1$ . Отгук следва, че описаната крива  $k$  има следното уравнение

$$(1) \quad (1 - 2x_0)x_0yz + (1 - 2y_0)y_0zx + (1 - 2z_0)xy = 0.$$

Параметричните уравнения на правата  $p_1$ , минаваща през  $P$  и успоредна на  $OM_a$  (фиг. 1), са следните

$$p_1: x = \lambda - 2x_0t_1, \quad y = \mu + (1 - 2y_0)t_1, \quad z = \nu + (1 - 2z_0)t_1.$$

От тези уравнения намираме координатите на пресечната точка  $P'_1$  на  $p_1$  с правата  $BC: x = 0$  във вида  $P'_1\left(0, \frac{(1 - 2x_0)\lambda + 2x_0\mu}{2x_0}, \frac{(1 - 2z_0)\lambda + 2x_0\nu}{2x_0}\right)$ . От-

тук получаваме, че точката  $P_1$ , която е симетрична на  $P$  спрямо  $P'_1$ , има следното координатно представяне

$$(2) \quad P_1\left(-\lambda, \frac{(1 - 2y_0)\lambda + x_0\mu}{x_0}, \frac{(1 - 2z_0)\lambda + x_0\nu}{x_0}\right).$$

По същия начин се получават координатите на аналогичните точки  $P_2$  и  $P_3$  във вида

$$(3) \quad P_2\left(\frac{y_0\lambda + (1 - 2x_0)\mu}{y_0}, -\mu, \frac{z_0\nu + (1 - 2z_0)\mu}{y_0}\right), \quad P_3\left(\frac{z_0\lambda + (1 - 2x_0)\nu}{z_0}, \frac{z_0\mu + (1 - 2y_0)\nu}{z_0}, -\nu\right).$$

За да определим спрегнатите прави  $s_2$  и  $s_3$  съответно на  $AP_2$  и  $AP_3$  през техните среди (фиг. 1), е необходимо да знаем спрегнатите направления на векторите  $AP_2$  и  $AP_3$ . В (Grozdev & Nenkov, 2015) е показано, че ако векторът  $v(v_1, v_2, v_3)$  е спрегнат с вектора  $u(u_1, u_2, u_3)$  спрямо  $k$ , то са изпълнени равенствата

$$(4) \quad \begin{aligned} v_1 &= (1 - 2x_0)[(y_0 - z_0)u_1 - x_0u_2 + x_0u_3], \\ v_2 &= (1 - 2y_0)[y_0u_1 + (z_0 - x_0)u_2 - y_0u_3], \\ v_3 &= (1 - 2z_0)[-z_0u_1 + z_0u_2 + (x_0 - y_0)u_3]. \end{aligned}$$

От (3) и (4) намираме спрегнатите направления на векторите  $\overline{AP_2}$  и  $\overline{AP_3}$ , а от тях определяме параметричните уравнения на правите  $s_2$  и  $s_3$  във вида:

$$s_2 : \begin{cases} x = \frac{y_0(1+\lambda) + (1-2x_0)\mu}{2y_0} + (1-2x_0)[(1-y_0)(1-2z_0)\mu + (1-2y_0)y_0\nu]t_2, \\ y = -\frac{\mu}{2} - (1-2y_0)y_0[(1-2z_0)\mu + 2y_0\nu]t_2, \\ z = \frac{y_0\nu + (1-2z_0)\mu}{2y_0} + (1-2z_0)[(2y_0z_0 + 2x_0 - 1)\mu + (1-2y_0)y_0\nu]t_2, \end{cases}$$

$$s_3 : \begin{cases} x = \frac{z_0(1+\lambda) + (1-2x_0)\nu}{2z_0} + (1-2x_0)[(1-2z_0)z_0\mu + (1-z_0)(1-2y_0)\nu]t_3, \\ y = \frac{z_0\mu + (1-2y_0)\nu}{2z_0} + (1-2y_0)[(1-2z_0)z_0\mu + (2y_0z_0 + 2x_0 - 1)\nu]t_3, \\ z = -\frac{\nu}{2} - (1-2z_0)z_0[2z_0\mu + (1-2y_0)\nu]t_3. \end{cases}$$

От последните уравнения намираме координатите на пресечната точка  $P_a$  на правите  $s_2$  и  $s_3$  във вида:

$$(5) P_a \left( \frac{(1-2y_0)(1-2z_0)\lambda + (1-2z_0)(x_0 - y_0)\mu + (1-2y_0)(x_0 - z_0)\nu}{(1-2y_0)(1-2z_0)}, \frac{y_0\nu}{1-2z_0}, \frac{z_0\mu}{1-2y_0} \right).$$

От (4) и (5) лесно се вижда, че векторът, определен от средата на отсечката  $P_2P_3$  и точката  $P_a$ , е спрегнат с вектора  $\overline{P_2P_3}$ . Следователно правата, минаваща през средата на  $P_2P_3$  и спрегната с  $\overline{P_2P_3}$  спрямо  $k$ , минава през  $P_a$ . Затова точката  $P_a$  разглеждаме като център на описано около  $\Delta AP_2P_3$  конично сечение  $k_a$ . Аналогично определяме точките  $P_b$  и  $P_c$  като центрове на описани съответно около триъгълниците  $BP_3P_1$  и  $CP_1P_2$  конични сечения  $k_b$  и  $k_c$ . Техните координати са следните:

$$(6) P_b \left( \frac{x_0\nu}{1-2z_0}, \frac{(1-2x_0)(y_0 - x_0)\lambda + (1-2z_0)(1-2x_0)\mu + (1-2z_0)(y_0 - z_0)\nu}{(1-2z_0)(1-2x_0)}, \frac{z_0\lambda}{1-2x_0} \right),$$

$$P_c \left( \frac{x_0\mu}{1-2y_0}, \frac{y_0\lambda}{1-2x_0}, \frac{(1-2x_0)(z_0 - x_0)\lambda + (1-2y_0)(z_0 - y_0)\mu + (1-2x_0)(1-2y_0)\nu}{(1-2x_0)(1-2y_0)} \right).$$

Сега ще намерим уравнението на кривата  $k_a$ . За целта разглеждаме координати и спрямо  $\Delta AP_2P_3$ . Ако точка  $M$  има координати  $(x, y, z)$  спрямо  $\Delta ABC$  и координати  $(x', y', z')$  спрямо  $\Delta AP_2P_3$ , от (3) следва, че връзките между тези координати се изразяват с равенствата:

$$\begin{aligned}
 (7) \quad x &= x' + \frac{y_0\lambda + (1-2x_0)\mu}{y_0} y' + \frac{z_0\lambda + (1-2x_0)\nu}{z_0} z', \\
 y &= -\mu y' + \frac{z_0\mu + (1-2y_0)\nu}{z_0} z', \\
 z &= \frac{y_0\nu + (1-2z_0)\mu}{y_0} y' - \nu z', \\
 (8) \quad x' &= \frac{tx + [t - (1-2z_0)z_0\mu - 2y_0z_0\nu]y + [t - x_0y_0\mu - (1-2y_0)y_0\nu]z}{t}, \\
 y' &= \frac{y_0z_0\nu y + [z_0\mu + (1-2y_0)\nu]y_0z}{t}, \\
 z' &= \frac{[(1-2z_0)\mu + y_0\nu]z_0y + y_0z_0\mu z}{t},
 \end{aligned}$$

където  $t = (1-2z_0)z_0\mu^2 + (1-2y_0)(1-2z_0)\mu\nu + (1-2y_0)y_0\nu^2$ .

Ако координатите на  $P_a$  спрямо  $\Delta AP_2P_3$  са  $(x'_a, y'_a, z'_a)$ , то от (5) и (8) следват равенствата

$$(9) \quad x'_a = \frac{2y_0z_0 + 2x_0 - 1}{(1-2y_0)(1-2z_0)}, \quad y'_a = \frac{y_0z_0}{(1-2y_0)(1-2z_0)}, \quad z'_a = \frac{y_0z_0}{(1-2y_0)(1-2z_0)}.$$

(Координатите (9) показват, че точката  $P_a$  лежи върху правата, минаваща през върха  $A$  и средата на отсечката  $P_2P_3$ .)

Сега да обърнем внимание, че според (1) уравнението на  $k_a$  спрямо  $\Delta AP_2P_3$  е  $(1-2x'_a)x'_ay'z' + (1-2y'_b)y'_bz'x' + (1-2z'_c)z'_cx'y' = 0$ . В това уравнение заместваме равенствата (8) и (9). След известни преобразувания получаваме

$$(10) \quad k_a : -\{(1-2x_0)x_0yz + (1-2y_0)y_0zx + (1-2z_0)xy - [(1-2z_0)\lambda - (1-2x_0)\nu]z_0y + [(1-2y_0)\lambda - (1-2x_0)\mu]y_0z\}(x+y+z) = 0.$$

По аналогичен начин се получават уравненията на кривите  $k_b$  и  $k_c$  във вида

$$(11) \quad k_b : (1-2x_0)x_0yz + (1-2y_0)y_0zx + (1-2z_0)xy - \{[(1-2z_0)\mu - (1-2y_0)\nu]z_0x + [(1-2x_0)\mu - (1-2y_0)\lambda]x_0z\}(x+y+z) = 0,$$

$$(12) \quad k_c : (1-2x_0)x_0yz + (1-2y_0)y_0zx + (1-2z_0)xy - \{[(1-2y_0)\nu - (1-2z_0)\mu]y_0x + [(1-2x_0)\nu - (1-2z_0)\lambda]x_0y\}(x+y+z) = 0.$$

От уравненията (10), (11), (12) и резултатите, получени в (Grozdev & Nenkov, 2014, b), имаме

**Следствие 1.** Ако кривата  $k$  е елипса, то кривите  $k_a$ ,  $k_b$  и  $k_c$  са елипси (фиг. 2).

**Следствие 2.** Ако кривата  $k$  е хипербола, то кривите  $k_a$ ,  $k_b$  и  $k_c$  са хиперболи (фиг. 3, 4).

По-нататък от (1) и (10) следва, че кривите  $k$  и имат обща точка  $T(x_T, y_T, z_T)$ , чиито координати се изразяват с формулите:

$$(13) \quad \begin{aligned} x_T &= \frac{[(1-2z_0)\lambda - (1-2x_0)\nu][(1-2y_0)\lambda - (1-2x_0)\mu]x_0}{\tau}, \\ y_T &= \frac{[(1-2z_0)\mu - (1-2y_0)\nu][(1-2x_0)\mu - (1-2y_0)\lambda]y_0}{\tau}, \\ z_T &= \frac{[(1-2y_0)\nu - (1-2z_0)\mu][(1-2x_0)\nu - (1-2z_0)\lambda]z_0}{\tau}. \end{aligned}$$

където

$$(14) \quad \begin{aligned} \tau &= [(1-2z_0)\lambda - (1-2x_0)\nu][(1-2y_0)\lambda - (1-2x_0)\mu]x_0 \\ &+ [(1-2z_0)\mu - (1-2y_0)\nu][(1-2x_0)\mu - (1-2y_0)\lambda]y_0 + \\ &+ [(1-2y_0)\nu - (1-2z_0)\mu][(1-2x_0)\nu - (1-2z_0)\lambda]z_0. \end{aligned}$$

От (11), (12) и (13) лесно се вижда, че точката  $T$  лежи и върху кривите  $k_b$  и  $k_c$ . С това твърдение 1 е доказано.

Ако правата  $l$  минава през ортоида  $H(1-2x_0, 1-2y_0, 1-2z_0)$  и е колинеарна с вектора  $(\alpha \ \beta \ \gamma)$  ( $\alpha + \beta + \gamma = 0$ ), нейните параметрични уравнения са следните

$$(15) \quad l: x = 1 - 2x_0 + \alpha\rho, \quad y = 1 - 2y_0 + \beta\rho, \quad z = 1 - 2z_0 + \gamma\rho.$$

Когато  $P$  лежи върху  $l$ , от (15) следва, че при подходяща стойност на параметъра  $\rho$  са изпълнени равенствата  $\lambda = 1 - 2x_0 + \alpha\rho$ ,  $\mu = 1 - 2y_0 + \beta\rho$  и  $\nu = 1 - 2z_0 + \gamma\rho$ . Заместваме тези равенства в (13) и получаваме:

$$(16) \quad \begin{aligned} x_T &= -\frac{[2y_0\alpha + (1-2x_0)\beta][2z_0\alpha + (1-2x_0)\gamma]x_0}{(1-2x_0)x_0\beta\gamma + (1-2y_0)y_0\gamma\alpha + (1-2z_0)z_0\alpha\beta}, \\ y_T &= -\frac{[2z_0\beta + (1-2y_0)\gamma][2x_0\beta + (1-2y_0)\alpha]y_0}{(1-2x_0)x_0\beta\gamma + (1-2y_0)y_0\gamma\alpha + (1-2z_0)z_0\alpha\beta}, \\ z_T &= -\frac{[2x_0\gamma + (1-2z_0)\alpha][2y_0\gamma + (1-2z_0)\beta]z_0}{(1-2x_0)x_0\beta\gamma + (1-2y_0)y_0\gamma\alpha + (1-2z_0)z_0\alpha\beta}. \end{aligned}$$

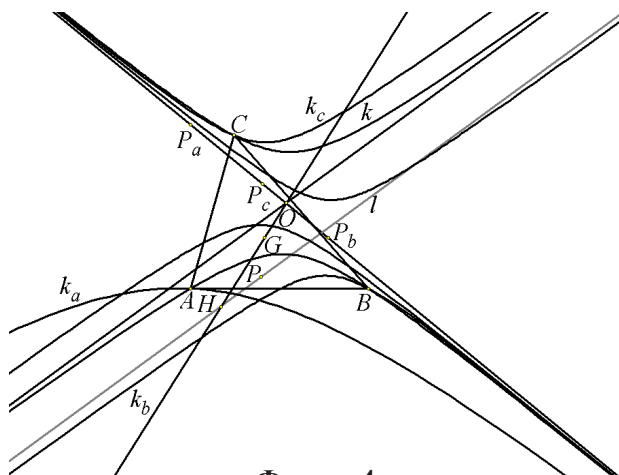
Координатите (16) зависят от координатите на вектора  $\vec{l}$ , но не зависят от параметъра  $\rho$ . Поради това точката  $T$  зависи от правата  $l$ , но не зависи от положението на точката  $P$  върху нея. С това твърдение 2 е доказано.

Ако  $k$  е хипербола, от следствие 2 следва, че  $k_a$ ,  $k_b$  и  $k_c$  също са хиперболи. Когато  $k$  е хипербола и векторът  $l(\alpha, \beta, \gamma)$  е колинеарен с асимптота на  $k$  (фиг. 4), координатите на  $l$  удовлетворяват равенството

$$(17) \quad (1-2x_0)x_0\beta\gamma + (1-2y_0)y_0\gamma\alpha + (1-2z_0)z_0\alpha\beta = 0.$$

От (16) и (17) следва, че когато правата  $l$  е успоредна на някоя асимптота на хиперболата  $k$ , общата точка на кривите  $k$ ,  $k_a$ ,  $k_b$  и  $k_c$  е безкрайна. Формулираме това заключение във вид на следното

**Следствие 3.** Ако правата  $l$  е успоредна на асимптота на хиперболата  $k$ , четирите хиперболи  $k$ ,  $k_a$ ,  $k_b$  и  $k_c$  имат обща асимптота (фиг. 4).



Фигура 4

Кривата  $k$  е хипербола тогава и само тогава, когато числото  $\Delta = \sqrt{-(1-2x_0)(1-2y_0)(1-2z_0)}$  е реално. Освен това векторите  $((1-3x_0)\Delta + (1-2x_0)(y_0 - z_0), (1-3y_0)\Delta + (1-2y_0)(z_0 - x_0), (1-3z_0)\Delta + (1-2z_0)(x_0 - y_0))$ ,  $((1-3x_0)\Delta - (1-2x_0)(y_0 - z_0), (1-3y_0)\Delta - (1-2y_0)(z_0 - x_0), (1-3z_0)\Delta - (1-2z_0)(x_0 - y_0))$  са колинеарни с асимптотите на  $k$ . Следователно уравненията на асимптотите  $x_1$  и  $x_2$  на хиперболата  $k$  имат следните уравнения:

$$\begin{aligned} & [(y_0 - z_0)\Delta + (1-2y_0)y_0 + (1-2z_0)z_0 - 6x_0y_0z_0]x + \\ & + [(z_0 - x_0)\Delta + (1-2z_0)z_0 + (1-2x_0)x_0 - 6x_0y_0z_0]y + \\ & x_1 : + [(x_0 - y_0)\Delta + (1-2x_0)x_0 + (1-2y_0)y_0 - 6x_0y_0z_0]z = 0, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & [(y_0 - z_0)\Delta - (1 - 2y_0)y_0 - (1 - 2z_0)z_0 + 6x_0y_0z_0]x + \\ x_2 : & + [(z_0 - x_0)\Delta - (1 - 2z_0)z_0 - (1 - 2x_0)x_0 + 6x_0y_0z_0]y + \\ & + [(x_0 - y_0)\Delta - (1 - 2x_0)x_0 - (1 - 2y_0)y_0 + 6x_0y_0z_0]z = 0. \end{aligned}$$

Правите  $h_1$  и  $h_2$ , минаващи през  $H$  и успоредни съответно на  $x_1$  и  $x_2$  (те са колинеарни със съответните им направляващи вектори посочени по-горе) (фиг. 3), имат следните уравнения:

$$h_1 : u_1x + v_1y + w_1z = 0, h_2 : u_2x + v_2y + w_2z = 0,$$

където

$$(18) \quad \begin{aligned} u_1 &= (y_0 - z_0)\Delta + (1 - 3x_0)(1 - 2y_0)(1 - 2z_0), v_1 = (z_0 - x_0)\Delta + (1 - 2x_0)(1 - 3y_0)(1 - 2z_0) \\ w_1 &= (x_0 - y_0)\Delta + (1 - 2x_0)(1 - 2y_0)(1 - 3z_0), u_2 = (y_0 - z_0)\Delta - (1 - 3x_0)(1 - 2y_0)(1 - 2z_0) \\ v_2 &= (z_0 - x_0)\Delta - (1 - 2x_0)(1 - 3y_0)(1 - 2z_0), w_2 = (x_0 - y_0)\Delta - (1 - 2x_0)(1 - 2y_0)(1 - 3z_0) \end{aligned}$$

От следствие 3 следва, че центровете  $O$ ,  $P_a$ ,  $P_b$  и  $P_c$  съответно на хиперболите  $k$ ,  $k_a$ ,  $k_b$  и  $k_c$  лежат на една права, която е асимптота на  $k$  (фиг. 4). Ако заместим  $\lambda = 1 - \mu - \nu$ ,  $x_0 = 1 - y_0 - z_0$  и координатите (5) на точката  $P_a$  в уравнението на  $x_1$ , получаваме следния израз за  $\nu$ :

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{(1 - 2z_0)}{y_0(1 - 2y_0)[(1 - 3z_0)\Delta + (1 - 2z_0)(x_0 - y_0)]} \left\{ [(1 - 3y_0)z_0\mu + (1 - 2y_0)(y_0 - z_0)]\Delta - \right. \\ & \left. - z_0(1 - 2y_0)(z_0 - x_0)\mu + (1 - 2y_0)[2(1 - 3z_0)y_0^2 + 2(1 - 3y_0)z_0^2 + 6x_0y_0 - y_0 - z_0] \right\}. \end{aligned}$$

От (13) следва, че когато  $T$  е безкрайна точка, нейните координати се представят във вида

$$\begin{aligned} x_T &= [(1 - 2z_0)\lambda - (1 - 2x_0)\nu][[(1 - 2y_0)\lambda - (1 - 2x_0)\mu]x_0, \\ y_T &= [(1 - 2z_0)\mu - (1 - 2y_0)\nu][[(1 - 2x_0)\mu - (1 - 2y_0)\lambda]y_0, \\ z_T &= [(1 - 2y_0)\nu - (1 - 2z_0)\mu][[(1 - 2x_0)\nu - (1 - 2z_0)\lambda]z_0. \end{aligned}$$

В тези координати заместваме  $\lambda = 1 - \mu - \nu$ ,  $x_0 = 1 - y_0 - z_0$  и получената стойност за  $\nu$ . Така получаваме следните равенства

$$\begin{aligned} x_T &= -\frac{z_0x_0(1 - 2z_0)(\mu - 1 + 2y_0)^2}{y_0(1 - 2y_0)[(1 - 3z_0)\Delta + (1 - 2z_0)(x_0 - y_0)]^2} \times \\ & \times [(z_0 - x_0)\Delta - (1 - 2x_0)(1 - 3y_0)(1 - 2z_0)][(x_0 - y_0)\Delta - (1 - 2x_0)(1 - 2y_0)(1 - 3z_0)], \end{aligned}$$

$$y_T = -\frac{z_0(1-2z_0)(\mu-1+2y_0)^2[(z_0-x_0)\Delta-(1-2x_0)(1-3y_0)(1-2z_0)]}{y_0[(1-3z_0)\Delta+(1-2z_0)(x_0-y_0)]^2} \times$$

$$\times \left\{ (y_0-z_0)\Delta - \left[ 2(1-3z_0)y_0^2 + 2(1-3y_0)z_0^2 + 6x_0y_0 - y_0 - z_0 \right] \right\},$$

$$z_T = -\frac{z_0(1-2z_0)^2(\mu-1+2y_0)^2[(x_0-y_0)\Delta-(1-2x_0)(1-2y_0)(1-3z_0)]}{y_0(1-2y_0)[(1-3z_0)\Delta+(1-2z_0)(x_0-y_0)]^2} \times$$

$$\times \left\{ (y_0-z_0)\Delta - \left[ 2(1-3z_0)y_0^2 + 2(1-3y_0)z_0^2 + 6x_0y_0 - y_0 - z_0 \right] \right\}.$$

Накрая чрез току-що получените изрази за  $x_T$ ,  $y_T$  и  $z_T$  установяваме, че е изпълнено равенството  $u_2x_T + v_2y_T + w_2z_T = 0$ , което означава, че  $T$  е безкрайната точка на правата  $h_2$ . Така получихме следното уточнение на следствие 3.

**Следствие 4.** Ако правата  $l$  е успоредна на едната асимптота на хиперболата  $k$ , то другата ѝ асимптота е обща асимптота за хиперболите  $k$ ,  $k_a$ ,  $k_b$  и  $k_c$  (фиг. 4).

Трябва да отбележим още, че когато  $k$  е хипербола, изразът за  $\tau$  от (14) се

представя по следния начин  $\tau = \frac{(u_1\lambda + v_1\mu + w_1\nu)(u_2\lambda + v_2\mu + w_2\nu)}{4[(1-2x_0)(1-2y_0)(1-2z_0) - x_0y_0z_0]}$ , където

$u_i$ ,  $v_i$  и  $w_i$  ( $i = 1, 2$ ) се изразяват с равенствата (18). Освен това правите  $h_1$  и  $h_2$  са хармонично спрегнати спрямо правите  $\bar{l}$  и  $\bar{l}$  (фиг. 3).

Накрая от (4) и (16) следва, че точката  $\bar{T}$ , която съответства на правата  $\bar{l}$ , спрегната с  $l$  спрямо  $k$ , има следните координати

$$(19) \quad x_{\bar{T}} = \frac{(1-2x_0)x_0\beta\gamma}{(1-2x_0)x_0\beta\gamma + (1-2y_0)y_0\gamma\alpha + (1-2z_0)z_0\alpha\beta},$$

$$y_{\bar{T}} = \frac{(1-2y_0)y_0\gamma\alpha}{(1-2x_0)x_0\beta\gamma + (1-2y_0)y_0\gamma\alpha + (1-2z_0)z_0\alpha\beta},$$

$$z_{\bar{T}} = \frac{(1-2z_0)z_0\alpha\beta}{(1-2x_0)x_0\beta\gamma + (1-2y_0)y_0\gamma\alpha + (1-2z_0)z_0\alpha\beta}.$$

От (16) и (19) следват равенствата  $x_T + x_{\bar{T}} = 2x_0$ ,  $y_T + y_{\bar{T}} = 2y_0$  и  $z_T + z_{\bar{T}} = 2z_0$ . Следователно точките  $T$  и  $\bar{T}$  са симетрични спрямо  $O$  (фиг. 2, 3). С това е доказано и твърдение 3.

От твърдение 3 следва

**Следствие 5.** Ако  $k \equiv \Gamma$  е описаната около  $\Delta ABC$  окръжност, то на всеки две перпендикулярни прави, минаващи през ортоцентъра на  $\Delta ABC$ , съответстват диаметрално противоположни точки от  $\Gamma$ .

## REFERENCES/ЛИТЕРАТУРА

- Grozdev, S. & V. Nenkov (2014, a). Generalizations of some classical theorems of the triangle geometry (In Russian). *Theoretical and applied aspects of mathematics, informatics and education. Proceedings of the International Scientific Conference, Archangelsk, SAFU*, 35-54. (ISBN 978-5-261-00990-0) [Гроздев, С. & В. Ненков. (2014, 1). Обобщения некоторых классических теорем геометрии треугольника. *Теоретические и прикладные аспекты математики, информатики и образования. Сборник материалов международной научной конференции. Архангельск, САФУ*, 35-54. (ISBN 978-5-261-00990-0).]
- Grozdev, S. & V. Nenkov (2014, b). Homothetic conics in the triangle plane (In Bulgarian). *Mathematics and Informatics*, 2, 139 – 154. [Гроздев, С. & В. Ненков (2014, b). Хомотетични конични сечения в равнината на триъгълник. *Математика и информатика*, 2, 139 – 154.]
- Grozdev, S. & V. Nenkov (2015). Geometric construction of Ceva curve (In Bulgarian). *Mathematics and Informatics*, 1, 52 – 57. [Гроздев, С. & В. Ненков (2015). Геометрична конструкция на крива на Чева, *Математика и информатика*, 1, 52 – 57.]
- Mateev, A. (1977). *Projective Geometry* (In Bulgarian). Sofia: Nauka i Izkustvo. [Матеев, А. (1977). *Проективна геометрия*. София: Наука и изкуство.]
- Pascalev, G. & I. Chobanov (1985). *Notable points in the triangle* (In Bulgarian). Sofia: Narodna Prosveta. [Паскалев, Г. & И. Чобанов. (1985). *Забележителни точки в триъгълника*. София: Народна просвета.]

## CENTRAL CONIC TRIPLETS THROUGH A FIXED POINT ON A FIXED CONIC

**Abstract.** The paper presents a generalization of a problem for circles through a fixed point in the plane of a given triangle.

✉ **Prof. Sava Grozdev, DSc.**  
University of Finance, Business and Entrepreneurship  
1, Gusla Str.  
1618 Sofia, Bulgaria  
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

✉ **Dr. Veselin Nenkov, Assoc. Prof.**  
E-mail: vnenkov@mail.bg