ДИАГОНАЛНИ ТОЧКОВИ КОНФИГУРАЦИИ. ПРАВИЛО НА ТРИЪГЪЛНИКА. ИНВАРИАНТИ

Здравко Лалчев, Ирина Вутова
Софийски университет „Св. Климент Охридски“

Резюме. В настоящата разработка е направено специфично продължение (с аналитични средства) на идеята за лице и обем от училищния курс по геометрия. Показано е, че геометричните фигури четириъгълник и октаедър са конкретизации на диагонални точкови конфигурации и че инвариантите на тези конфигурации са аналози на понятията лице на четириъгълник и обем на октаедър. Предложен е единен подход при развитие на концепцията за „диагонални“ инварианти в 2-мерно, 3-мерно, 4-мерно и n-мерно ($n > 4$) пространство. С цел улесняване на обобщенията и опростяване на доказателствата са въведени компактни означения, а също така е изведено и последователно прилагане на „правилото на триъгълника“.

Keywords: n-dimensional space; coordinate; point, vector; diagonal configuration of points; determinant; invariant; triangle rule

1. Предварителни бележки

Известно е, че много от стереометричните понятия и твърдения (в това число и от училищния курс по геометрия) са „естествени“ пространствени обобщения (аналози) на планиметрични понятия и теореми. Поразителната и дълбока аналогия „равнина – пространство“ вдъхновява изследователите на училищната математика да търсят и нови, незабелязани досега пространствени „следи“ в равнината, както и равнинни „продължения“ в пространството. В тази връзка, представлява интерес случаят с добре познатото следствие от една от теоремите за лице на триъгълник, а именно: „Лицето на четириъгълника е равно на полупроизведението на дължините на диагоналите на четириъгълника и синуса на ъгъла между тях“. Елементарно геометричната формулировка на следствието не „подсказва“ стереометричния „аналог“ на четириъгълника и прави неясна неговата „трансформация“ в пространството. През деветдесетте години на XX век един от авторите на настоящото изследване, преподавател по математика в Софийския университет „Св. Климент Охридски“ (тогава асистент, по-късно професор) Здравко Лалчев открива пространствен „модел“ на четириъгълника и достига до стереометричен аналог на планиметричната теорема, посочена по-горе. И по-конкретно, след като прилага аналитикогеометричен подход, използвайки инструментариума на векторната алгебра, той формулира и доказва теоремата: „Обемът на октаедъра е равен на обема на тетраедър, определен от векторите по диагоналите на октаедъра“ (Λαλτσεφ, 1993). Последната теорема е пространствено обобщение на теоремата за лице на четириъгълник („Лицето на четириъгълника е равно на лицето на триъгълник, определен от векторите по диагоналите на четириъгълника“). Теоремата за октаедъра е публикувана за първи път в гръцкото математико-дидактическо списание „ΔΙΑΣΤΑΣΗ“ през 1993 г. в статия, озаглавена Αναγωγη πολυεδρων („Редукция на многостени“). Сегашната разработка е идейно продължение на цитираната статия за октаедъра и може да се разглежда като един „любопитен“ геометричен поглед (с елементарни линейноалгебрични средства) към пространства с повече от три измерения.

2. Двумерно пространство

2.1. Детерминанта на наредена двойка вектори. Лема

Нека в равнината (2-мерно пространство) е въведена афинна координатна система.

Нека a_1, a_2са два вектора с координати съответно:

$$\boldsymbol{a_1} = (\alpha_{11}, \alpha_{12}),$$
$$\boldsymbol{a_2} = (\alpha_{21}, \alpha_{22}).$$

Да въведем следните означения:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_1 \end{vmatrix}.$$

Детерминантите$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \end{vmatrix}$ и$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_1 \end{vmatrix}$ ще наричаме **детерминанти** съответно на наредените двойки вектори $(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2})$ и $(\boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_1})$.

Тъй като два обекта могат да бъдат наредени по 2! начина, то с двойката вектори $(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2})$ можем да свържем 2 детерминанти от втори ред. Въпросните детерминанти се получават една от друга чрез разместване на редове и техните абсолютни стойности са равни.

Нека отбележим и някои непосредствени следствия от въведените определение и означения.

1) При размяна местата на два вектора детерминантата променя своя „знак“, т.е.

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_1 \end{vmatrix}.$$

2) При замяна на един вектор с неговия противоположен детерминантата променя своя „знак“, т.е.

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -\boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ -\boldsymbol{a}_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\boldsymbol{a}_1 \\ -\boldsymbol{a}_2 \end{vmatrix}.$$

Коментар. Известно е, че ако базата на координатната система определя триъгълник с лице 1, то детерминантата на двойката вектори ($\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$) е равна на ориентираното лице на триъгълник с определящи вектори $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ (Gjonov & Stoev, 1994).

Лема (правило на триъгълника). Нека A, B, X са три точки с координати съответно: A(α_1, α_2), B(β_1, β_2), X(x_1, x_2) и $\boldsymbol{c}$ е вектор с координати (γ_1, γ_2). Нека векторите $\boldsymbol{AX}$, $\boldsymbol{XB}$, $\boldsymbol{AB}$ са образувани съответно от наредените двойки точки (A, X), (X, B), (A, B). Тогава за детерминатите:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{AX} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \boldsymbol{XB} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} \boldsymbol{AB} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{AX} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{XB} \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{AB} \end{vmatrix}$$

са в сила равенствата:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{AX} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{XB} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{AB} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{AX} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{XB} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{AB} \end{vmatrix}.$$

(Забележка. Или: $-\begin{vmatrix} \boldsymbol{XA} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{XB} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{AB} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{XA} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{XB} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{BA} \end{vmatrix}$.)

Доказателство

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{AX} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{XB} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{AB} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 - \alpha_1 & x_2 - \alpha_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_1 - x_1 & \beta_2 - x_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 - \alpha_1 + \beta_1 - x_1 & x_2 - \alpha_2 + \beta_2 - x_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta_1 - \alpha_1 & \beta_2 - \alpha_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{AB} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix}.$$

Второто равенство се доказва по същия начин.

2.2. Векторна детерминанта на елементарна точкова конфигурация. Инварианта.

За целите на изложението да припомним понятието елементарна точкова конфигурация в равнината. И така: нека A_1, A_2, A_3 са 3 точки в равнината (2-мерно пространство). Като свържем с отсечка всяка една от точките с останалите 2 точки, получаваме 3 отсечки: A_1A_2, A_1A_3, A_2A_3. Така получената конфигурация ще наричаме **елементарна точкова конфигурация** в двумерно пространство. Точките A_1, A_2, A_3 ще наричаме **върхове**, а отсечките A_1A_2, A_1A_3, A_2A_3 ще наричаме **ръбове** на конфигурацията.

Нека в равнината е дадена (елементарна) точкова конфигурация с върхове A_1, A_2, A_3, които имат координати съответно:

$$A_1(\alpha_{11},\alpha_{12}),\ A_2(\alpha_{21},\alpha_{22}),\ A_3(\alpha_{31},\alpha_{32}).$$

Да образуваме векторите $\mathbf{A_1A_2}$, $\mathbf{A_1A_3}$. Техните координати са съответно:

$$\mathbf{A_1A_2} = (\alpha_{21} - \alpha_{11}, \alpha_{22} - \alpha_{12}),$$
$$\mathbf{A_1A_3} = (\alpha_{31} - \alpha_{11}, \alpha_{32} - \alpha_{12}).$$

Съгласно въведените определение и означения детерминантата на наредената двойка векори ($\mathbf{A_1A_2}$, $\mathbf{A_1A_3}$) има вида:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{21} - \alpha_{11}, \alpha_{22} - \alpha_{12} \\ \alpha_{31} - \alpha_{11}, \alpha_{32} - \alpha_{12} \end{vmatrix}.$$

Казано по-кратко: $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A_1A_2} \\ \boldsymbol{A_1A_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{21} - \alpha_{11}, \alpha_{22} - \alpha_{12} \\ \alpha_{31} - \alpha_{11}, \alpha_{32} - \alpha_{12} \end{vmatrix}.$

Коментар. Известно е, че ако базата на координатната система определя триъгълник с лице 1 и $A_1A_2A_3$ е триъгълник с върхове A_1, A_2, A_3, то детерминантата $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A_1A_2} \\ \boldsymbol{A_1A_3} \end{vmatrix}$ на двойката вектори ($\mathbf{A_1A_2}$, $\mathbf{A_1A_3}$) е равна на ориентираното лице на триъгълник $A_1A_2A_3$ (Gjonov & Stoev, 1994).

Горните разсъждения ни дават основание да казваме, че детерминантата $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A_1A_2} \\ \boldsymbol{A_1A_3} \end{vmatrix}$ на наредената двойка вектори ($\mathbf{A_1A_2}$, $\mathbf{A_1A_3}$) е **векторна детерминанта** на елементарната точкова конфигурация $A_1A_2A_3$.

Тъй като три обекта могат да бъдат наредени по 3! начина, то с елементарната точкова конфигурация $A_1A_2A_3$ можем да свържем 6 детерминати от втори ред, а именно:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A_1A_2} \\ \boldsymbol{A_1A_3} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \boldsymbol{A_1A_3} \\ \boldsymbol{A_1A_2} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \boldsymbol{A_2A_1} \\ \boldsymbol{A_2A_3} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \boldsymbol{A_2A_3} \\ \boldsymbol{A_2A_2} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \boldsymbol{A_3A_1} \\ \boldsymbol{A_3A_2} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \boldsymbol{A_3A_2} \\ \boldsymbol{A_3A_1} \end{vmatrix}.$$

Да отбележим, че въпросните детерминанти се получават една от друга чрез разместване на редове или изнасяне на знака „минус“ по редове и техните абсолютни стойности са равни.

Горните разсъждения ни дават основание абсолютната стойност на която и да е от шестте детерминанти ($\begin{vmatrix} \boldsymbol{A_1A_2} \\ \boldsymbol{A_1A_3} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \boldsymbol{A_1A_3} \\ \boldsymbol{A_1A_2} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \boldsymbol{A_2A_1} \\ \boldsymbol{A_2A_3} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \boldsymbol{A_2A_3} \\ \boldsymbol{A_2A_2} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \boldsymbol{A_3A_1} \\ \boldsymbol{A_3A_2} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \boldsymbol{A_3A_2} \\ \boldsymbol{A_3A_1} \end{vmatrix}$) да наречем **инварианта** на (елементарната) точкова конфигурация (A_1, A_2, A_3).

2.3. Диагонална точкова конфигурация в двумерно пространство. Инварианта. (Теорема за лице на четириъгълник)

В началото на точката ще въведем понятието **диагонална точкова конфигурация** в двумерно пространство.

Нека в двумерно пространство са дадени четири точки A_1, A_2, B_1, B_2, които образуват наредена четворка (в посочения ред). В този случай можем да считаме, че е дадена точкова конфигурация с **върхове** A_1, A_2, B_1, B_2.

Нека върховете на конфигурацията $A_1A_2B_1B_2$ са разделени на две двойки (A_1, B_1) и (A_2, B_2). Точките на всяка от двойките (A_1, B_1) и (A_2, B_2) ще наричаме **противоположни** и всяка отсечка, определена от двойка противоположни върхове, ще наричаме **диагонал** на конфигурацията. (В случая отсечките A_1B_1 и A_2B_2 са диагоналите на конфигурацията $A_1A_2B_1B_2$.)

Всеки две точки, които не са противоположни, ще казваме, че са **съседни** и отсечката, определена от двойка съседни точки, ще наричаме **ръб** на конфигурацията. (В случая отсечките A_1A_2, A_1B_2, B_1A_2, B_1B_2 са ръбовете на конфигурацията $A_1A_2B_1B_2$.)

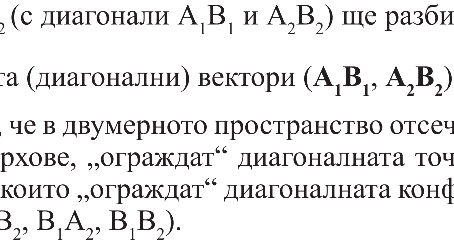
Конфигурация от четири точки (в двумерното пространство) с фиксирани диагонали ще наричаме **диагонална точкова конфигурация**. (В случая наредената четворка точки (A_1, A_2, B_1, B_2) е диагонална точкова конфигурация (с диагонали A_1B_1 и A_2B_2).)

Нека $A_1A_2B_1B_2$ е диагонална точкова конфигурация (с диагонали A_1B_1 и A_2B_2). Да образуваме векторите по диагоналите на конфигурацията $\mathbf{A_1B_1}$ **и** $\mathbf{A_2B_2}$.

Ще въведем и понятието детерминанта на диагоналната точкова конфигурация. И по-конкретно, под **детерминанта на диагоналната точкова конфигурация** $A_1A_2B_1B_2$ (с диагонали A_1B_1 и A_2B_2) ще разбираме детерминантата $\begin{vmatrix} A_1B_1 \\ A_2B_2 \end{vmatrix}$ на двойката (диагонални) вектори ($\mathbf{A_1B_1}$, $\mathbf{A_2B_2}$)

Ще предполагаме, че в двумерното пространство отсечките, определени от двойките съседни върхове, „ограждат“ диагоналната точкова конфигурация. (В случая отсечките, които „ограждат“ диагоналната конфигурация $A_1A_2B_1B_2$, са ръбовете A_1A_2, A_1B_2, B_1A_2, B_1B_2).

Забележка. В равнината съществува множество от точки, което отговаря на определението за диагонална точкова конфигурация. Като пример за такава коннфигурация може да служи четириъгълник с върхове A_1, A_2,B_1, B_2 и диагонали A_1B_1 и A_2B_2 (черт. 1).



Чертеж 1

Теорема. Нека в равнината (2-мерно пространство) е дадена афинна координатна система. Нека точките A_1, A_2, B_1, B_2 са върхове на диагонална точкова конфигурация с диагонали A_1B_1,A_2B_2 и X е произволна точка. Тогава за детерминантите на елементарните точкови конфигурации:

$$XA_1A_2,\ XA_1B_2,\ XB_1A_2,\ XB_1B_2$$

и диагоналната точкова конфигурация $A_1A_2B_1B_2$ е в сила равенството:

$$\begin{vmatrix} XA_1 \\ XA_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XA_1 \\ XB_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XB_1 \\ XA_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XB_1 \\ XB_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1B_1 \\ A_2B_2 \end{vmatrix}$$

Доказателство:

$$\begin{vmatrix} XA_1 \\ XA_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XA_1 \\ XB_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XB_1 \\ XA_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XB_1 \\ XB_2 \end{vmatrix} =$$

$$\left(\begin{vmatrix} XA_1 \\ XA_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XA_1 \\ XB_2 \end{vmatrix}\right) + \left(-\begin{vmatrix} XB_1 \\ XA_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XB_1 \\ XB_2 \end{vmatrix}\right) =$$

$$= \begin{vmatrix} XA_1 \\ B_2A_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XB_1 \\ B_2A_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} B_1A_1 \\ B_2A_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1B_1 \\ A_2B_2 \end{vmatrix}.$$

Коментари

Равенството в теоремата се „конструира“, като се приложи „матричен“ принцип за построяване на вариациите от два елемента от втори клас с повторение. По-конкретно:

1) Първите редове на детерминантите от лявата страна на равенството се получават, като векторите XA_1 и XB_1 се запишат последователно по 2 пъти, т.е.

$XA_1XA_1XB_1XB_1XA_1XA_1XB_1XB_1$.

2) Вторите редове на детерминантите от лявата страна на равенството се получават, като векторите XA_2XA_2и $XB_2\ XB_2$ се запишат, редувайки се по два пъти, т.е.

$$XA_2XB_2XA_2XB_2.$$

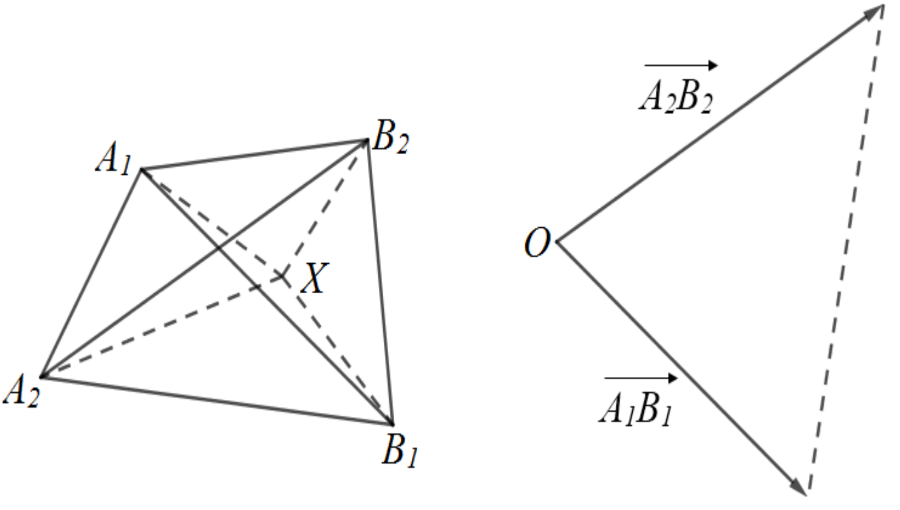
3) В резултат на действията в първите две точки се достига до детерминантите

$$\begin{vmatrix} XA_1 \\ XA_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} XA_1 \\ XB_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} XB_1 \\ XA_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} XB_1 \\ XB_2 \end{vmatrix}.$$

4) Знаците пред събираемите в алгебричния сбор се определят от броя на буквата „B“ в съответната детерминанта. Ако буквата „B“ участва четно число пъти, знакът е „+“, ако буквата „B“ участва нечетно число пъти, знакът е „–“.

5) Дясната страна е $\begin{vmatrix} A_1B_1 \\ A_2B_2 \end{vmatrix}$.

Нека $A_1A_2B_1B_2$ е четириъгълник (диагонална точкова конфигурация) с върхове A_1,A_2, B_1,B_2 и диагонали A_1B_1, A_2B_2 (и страни A_1A_2, A_2B_1, B_1B_2, B_2A_1) и X е произволна точка (черт. 2).



Чертеж 2

Във връзка с доказаната теорема ще отбележим следното:

1) точката X разделя четириъгълника $A_1A_2B_1B_2$ на 4 триъгълника (елементарни точкови конфигурации) XA_1A_2, $XA_1B_2XB_1B_2$, XB_1A_2;

2) алгебричният сбор от ориентираните лица на триъгълниците XA_1A_2, XA_1B_2, XB_1B_2, XB_1A_2 не зависи от точката X и е равен на ориентираното лице на триъгълника, определен от векторите $\mathbf{A_1B_1}$, $\mathbf{A_2B_2}$ (по диагоналите на четириъгълник $A_1A_2B_1B_2$);

3) тъй като алгебричният сбор от ориентираните лица на триъгълниците XA_1A_2, XA_1B_2,XB_1B_2, XB_1A_2 е равен на ориентираното лице на четириъгълник $A_1A_2B_1B_2$, то доказаната теорема означава, че ориентираното лице на четириъгълник $A_1A_2B_1B_2$ е равно на ориентираното лице на триъгълник, определен от векторите$\mathbf{A_1B_1}$, $\mathbf{A_2B_2}$ (по диагоналите на четириъгълник $A_1A_2B_1B_2$).

Извод. Теоремата и коментарът в предходните точки ни дават основание да кажем, че абсолютната стойност на детерминантата $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A_1} & \boldsymbol{B_1} \\ \boldsymbol{A_2} & \boldsymbol{B_2} \end{vmatrix}$ е **инварианта** на диагоналната точкова конфигурация $A_1A_2B_1B_2$ с диагонали A_1B_1 и A_2B_2.

3. Тримерно пространство

3.1. Детерминанта на наредена тройка вектори. Лема

Нека в пространството (3-мерно пространство) е въведена афинна координатна система.

Нека $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}$ са три вектора с координати съответно:

$$\boldsymbol{a_1} = (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}),$$
$$\boldsymbol{a_2} = (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}),$$
$$\boldsymbol{a_3} = (\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33}).$$

Да въведем следните означения:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix}, \ldots\ldots\ldots, \begin{vmatrix} \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_3 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_1 \end{vmatrix}.$$

Детерминантите $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix}, \ldots\ldots\ldots, \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_3 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_1 \end{vmatrix}$ ще наричаме съответно **детерминанти** на наредените тройки вектори $(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3})$, $(\boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_3})$, ……., $(\boldsymbol{a_3}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_1})$.

Тъй като три обекта могат да бъдат наредени по 3! начина, то с тройката вектори $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}$ можем да свържем 6 детерминанти от трети ред. Въпросните детерминанти се получават една от друга чрез разместване на редове и техните абсолютни стойности са равни.

Нека отбележим и някои непосредствени следствия от въведените определение и означения.

1) При размяна местата на два вектора детерминантата на системата променя своя „знак“. Например:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_3 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_1 \end{vmatrix} \text{ и т.н.}$$

2) При замяна на един вектор с неговия противоположен детерминантата на системата променя своя „знак“. Например:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -\boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ -\boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ -\boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix}, \text{ и т.н.}$$

Коментар. Известно е, че ако базата на координатната система определя тетраедър с обем 1, то детерминантата на тройката вектори $(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3})$ е равна на ориентирания обем на тетраедър, с определящи вектори $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}$ (Gjonov & Stoev, 1994).

Лема (правило на триъгълника). Нека A, B и X са три точки с координати съответно: A(α_1, α_2, α_3), B(β_1 β_2,β_3), X(x_1, x_2, x_3) и $\boldsymbol{c_1}$,$\boldsymbol{c_2}$ са два вектора с координати съответно (γ_{11},γ_{12},γ_{13}),(γ_{21},γ_{22},γ_{23}). Нека векторите $\boldsymbol{AX}$,$\boldsymbol{XB}$,$\boldsymbol{AB}$ са образувани съответно от наредените двойки точки (A, X), (X, B), (A, B). Тогава за детерминантите

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{AX} \\ \boldsymbol{c_1} \\ \boldsymbol{c_2} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \boldsymbol{XB} \\ \boldsymbol{c_1} \\ \boldsymbol{c_2} \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} \boldsymbol{AB} \\ \boldsymbol{c_1} \\ \boldsymbol{c_2} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} \boldsymbol{c_1} \\ \boldsymbol{AX} \\ \boldsymbol{c_2} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \boldsymbol{c_1} \\ \boldsymbol{XB} \\ \boldsymbol{c_2} \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} \boldsymbol{c_1} \\ \boldsymbol{AB} \\ \boldsymbol{c_2} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} \boldsymbol{c_1} \\ \boldsymbol{c_2} \\ \boldsymbol{AX} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \boldsymbol{c_1} \\ \boldsymbol{c_2} \\ \boldsymbol{XB} \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} \boldsymbol{c_1} \\ \boldsymbol{c_2} \\ \boldsymbol{AB} \end{vmatrix}$$

са в сила равенствата:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{AX} \\ \boldsymbol{c_1} \\ \boldsymbol{c_2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{XB} \\ \boldsymbol{c_1} \\ \boldsymbol{c_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{AB} \\ \boldsymbol{c_1} \\ \boldsymbol{c_2} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} \boldsymbol{c_1} \\ \boldsymbol{AX} \\ \boldsymbol{c_2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{c_1} \\ \boldsymbol{XB} \\ \boldsymbol{c_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{c_1} \\ \boldsymbol{AB} \\ \boldsymbol{c_2} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} \boldsymbol{c_1} \\ \boldsymbol{c_2} \\ \boldsymbol{AX} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{c_1} \\ \boldsymbol{c_2} \\ \boldsymbol{XB} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{c_1} \\ \boldsymbol{c_2} \\ \boldsymbol{AB} \end{vmatrix}.$$

Доказателство:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{AX} \\ \boldsymbol{c_1} \\ \boldsymbol{c_2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{XB} \\ \boldsymbol{c_1} \\ \boldsymbol{c_2} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 - \alpha_1 & x_2 - \alpha_2 & x_3 - \alpha_3 \\ \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_1 - x_1 & \beta_2 - x_2 & \beta_3 - x_3 \\ \gamma_{12} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 - \alpha_1 + \beta_1 - x_1 & x_2 - \alpha_2 + \beta_2 - x_2 & x_3 - \alpha_3 + \beta_3 - x_3 \\ \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \beta_1 - \alpha_1 & \beta_2 - \alpha_2 & \beta_3 - \alpha_3 \\ \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{AB} \\ \boldsymbol{c_1} \\ \boldsymbol{c_2} \end{vmatrix}.$$

Останалите равенства се доказват по същия начин.

3.2. Векторна детерминанта на елементарна точкова конфигурация. Инварианта.

За целите на изложението да припомним понятието елементарна точкова конфигурация в пространството. И така: Нека A_1, A_2, A_3, A_4 са 4 точки в пространството (3-мерно пространство). Като свържем с отсечка всяка една от точките с останалите 3 точки, получаваме шест отсечки: A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, A_2A_3, A_2A_4, A_3A_4. Така получената конфигурация ще наричаме **елементарна точкова конфигурация** в тримерното пространство. Точките A_1, A_2, A_3, A_4 ще наричаме **върхове**, а отсечките A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, A_2A_3, A_2A_4, A_3A_4 ще наричаме **ръбове** на конфигурацията.

Нека в 3-мерно пространство е дадена елементарна точкова конфигурация $A_1A_2A_3A_4$ с върхове A_1, A_2, A_3, A_4 и координати съответно:

$$A_1(\alpha_{11},\alpha_{12},\alpha_{13}),\ A_2(\alpha_{21},\alpha_{22},\alpha_{23}),\ A_3(\alpha_{31},\alpha_{32},\alpha_{33}),\ A_4(\alpha_{41},\alpha_{42},\alpha_{43}).$$

Да образуваме векторите $\mathbf{A_1A_2}$, $\mathbf{A_1A_3}$, $\mathbf{A_1A_4}$. Те имат координати съответно:

$$\mathbf{A_1A_2} = (\alpha_{21}-\alpha_{11},\ \alpha_{22}-\alpha_{12},\alpha_{23}-\alpha_{13}),$$
$$\mathbf{A_1A_3} = (\alpha_{31}-\alpha_{11},\ \alpha_{32}-\alpha_{12},\ \alpha_{33}-\alpha_{13}),$$
$$\mathbf{A_1A_4} = (\alpha_{41}-\alpha_{11},\ \alpha_{42}-\alpha_{12},\ \alpha_{43}-\alpha_{13}).$$

Съгласно въведените определения и означения детерминантата на тройката вектори ($\mathbf{A_1A_2}$, $\mathbf{A_1A_3}$,$\mathbf{A_1A_4}$) има вида:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{21}-\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{23}-\alpha_{13} \\ \alpha_{31}-\alpha_{11}\alpha_{32}-\alpha_{12}\alpha_{33}-\alpha_{13} \\ \alpha_{41}-\alpha_{11}\alpha_{42}-\alpha_{12}\alpha_{43}-\alpha_{13} \end{vmatrix}.$$

Казано по-кратко: $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A_1A_2} \\ \boldsymbol{A_1A_3} \\ \boldsymbol{A_1A_4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{21}-\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{23}-\alpha_{13} \\ \alpha_{31}-\alpha_{11}\alpha_{32}-\alpha_{12}\alpha_{33}-\alpha_{13} \\ \alpha_{41}-\alpha_{11}\alpha_{42}-\alpha_{12}\alpha_{43}-\alpha_{13} \end{vmatrix}.$

Последното равенство ни дава основание да кажем, че детерминантата $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A_1A_2} \\ \boldsymbol{A_1A_3} \\ \boldsymbol{A_1A_4} \end{vmatrix}$ е детерминанта и на (елементарната) точкова конфигурация $A_1A_2A_3A_4$.

Коментар. Известно е, че ако базата на координатната система определя тетраедър с обем 1 и $A_1A_2A_3A_4$ е тетраедар с върхове A_1, A_2, A_3, A_4, то детерминантата $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A_1A_2} \\ \boldsymbol{A_1A_3} \\ \boldsymbol{A_1A_4} \end{vmatrix}$ на тройката ($\mathbf{A_1A_2}$, $\mathbf{A_1A_3}$, $\mathbf{A_1A_4}$) вектори е равна на ориентирания обем на тетраедъра $A_1A_2A_3A_4$ (Gjonov & Stoev, 1994).

Тъй като четири обекта могат да бъдат наредени по 4! начина, то с елементарната точкова конфигурация $A_1A_2A_3A_4$ можем да свържем 24 детерминанти от трети ред, а именно:

$$\begin{vmatrix} A_1A_2 \\ A_1A_3 \\ A_1A_4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1A_2 \\ A_1A_4 \\ A_1A_3 \end{vmatrix}, \ldots\ldots, \begin{vmatrix} A_4A_1 \\ A_4A_2 \\ A_4A_3 \end{vmatrix}.$$

Да отбележим, че въпросните детерминати се получават една от друга чрез разместване на редове или изнасяне на знака „минус“ по редове и техните абсолютни стойности са равни.

Горните разсъждения ни дават основание абсолютната стойност на детерминантата $\begin{vmatrix} A_1A_2 \\ A_1A_3 \\ A_1A_4 \end{vmatrix}$ (или която и да е от останалите 23) да наречем **инварианта** на елементарната точкова конфигурация с върхове:A_1, A_2, A_3, A_4.

3.3. Диагонална точкова конфигурация в тримерно пространство. Теорема (на Лалчев) за обем на октаедър. Инварианта.

В началото на точката ще въведем понятието **диагонална точкова конфигурация** в тримерно пространство.

Нека в тримерно пространство са дадени шест точки A_1, A_2, A_3,B_1, B_2, B_3, които образуват наредена шесторка (в посочения ред). В този случай можем да считаме, че е дадена точкова конфигурация с **върхове** A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3.

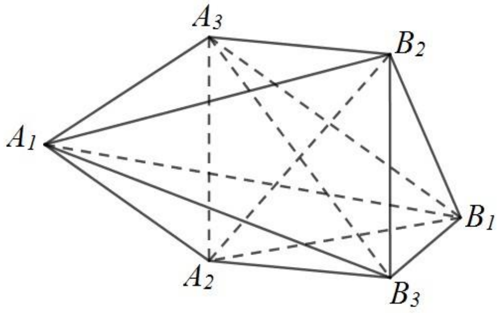
Нека върховете на конфигурацията $A_1A_2A_3B_1B_2B_3$ са разделени на три двойки (A_1, B_1), (A_2, B_2) и (A_3, B_3). Точките на всяка от двойките (A_1, B_1), (A_2, B_2) и (A_3, B_3) ще наричаме **противоположни** и всяка отсечка, определена от двойка противоположни върхове, ще наричаме **диагонал** на конфигурацията. (В случая отсечките A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 са диагоналите на конфигурацията $A_1A_2A_3B_1B_2B_3$.)

Всеки две точки, които не са противоположни, ще казваме, че са **съседни,** и отсечката, определена от двойка съседни точки, ще наричаме **ръб** на конфигурацията. (В случая, отсечките A_1A_2,A_1A_3, A_1B_2, A_1B_3,A_2A_3, A_2B_1, A_2B_3,A_3B_1, A_3B_2, B_1B_2,B_1B_3, B_2B_3 (общо 12 на брой) са ръбовете на конфигурацията $A_1A_2A_3B_1B_2B_3$.)

Конфигурация от шест точки (в тримерното пространство) с фиксирани диагонали ще наричаме **диагонална точкова конфигурация**. (В случая конфигурацията от точките A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 е диагонална точкова конфигурация (с диагонали A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3)).

Ще предполагаме, че в тримерното пространство триъгълниците, определени от тройките точки, във всяка от които точките са две по две съседни, „ограждат“ съответната диагоналната точкова конфигурация. (В случая триъгълниците, които „ограждат“ диагоналната точкова конфигурация, са осем на брой, а именно: $A_1A_2A_3$, $A_1A_2B_3$, $A_1B_2A_3$, $A_1B_2B_3$, $B_1A_2A_3$, $B_1A_2B_3$, $B_1B_2A_3$, $B_1B_2B_3$.)

Забележка. В тримерното пространство съществува множество от точки, което отговаря на определението диагонална точкова конфигурация. Като пример за такава конфигурация може да послужи октаедър с върхове A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 и диагонали A_1B_1,A_2B_2, A_3B_3, (черт. 3).



Чертеж 3

Теорема. Нека в пространството (3-мерно пространство) е дадена афинна координатна система. Нека точките A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 са върхове на (диагонална) точкова конфигурация с диагонали A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 и X е произволна точка. Тогава за детерминантите на елементарните точкови конфигурации:

$XA_1A_2A_3$, $XA_1A_2B_3$, $XA_1B_2A_3$, $XA_1B_2B_3$,
$XB_1A_2A_3$, $XB_1B_2A_3$, $XB_1B_2A_3$, $XB_1B_2B_4$

и диагоналната конфигурация $A_1A_2A_3B_1B_2B_3$ е в сила равенството:

$$\begin{vmatrix} XA_1 \\ XA_2 \\ XA_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XA_1 \\ XA_2 \\ XB_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XA_1 \\ XB_2 \\ XA_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XA_1 \\ XB_2 \\ XB_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XB_1 \\ XA_2 \\ XA_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XB_1 \\ XA_2 \\ XB_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XB_1 \\ XB_2 \\ XA_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XB_1 \\ XB_2 \\ XB_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} A_1B_1 \\ A_2B_2 \\ A_3B_3 \end{vmatrix}.$$

Доказателство:

$$\begin{vmatrix} XA_1 \\ XA_2 \\ XA_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XA_1 \\ XA_2 \\ XB_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XA_1 \\ XB_2 \\ XA_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XA_1 \\ XB_2 \\ XB_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XB_1 \\ XA_2 \\ XA_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XB_1 \\ XA_2 \\ XB_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XB_1 \\ XB_2 \\ XA_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XB_1 \\ XB_2 \\ XB_3 \end{vmatrix} =$$

$$\left(\begin{vmatrix} XA_1 \\ XA_2 \\ XA_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XA_1 \\ XA_2 \\ XB_3 \end{vmatrix}\right) + \left(-\begin{vmatrix} XA_1 \\ XB_2 \\ XA_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XA_1 \\ XB_2 \\ XB_3 \end{vmatrix}\right) + \left(-\begin{vmatrix} XB_1 \\ XA_2 \\ XA_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XB_1 \\ XA_2 \\ XB_3 \end{vmatrix}\right) + \left(\begin{vmatrix} XB_1 \\ XB_2 \\ XA_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XB_1 \\ XB_2 \\ XB_3 \end{vmatrix}\right) =$$

$$= \begin{vmatrix} XA_1 \\ XA_2 \\ B_3A_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XA_1 \\ XB_2 \\ B_3A_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XB_1 \\ XA_2 \\ B_3A_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XB_1 \\ XB_2 \\ BA_3 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} XA_1 \\ XA_2 \\ B_3A_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XA_1 \\ XB_2 \\ B_3A_3 \end{vmatrix}\right) + \left(-\begin{vmatrix} XB_1 \\ XA_2 \\ B_3A_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XB_1 \\ XB_2 \\ BA_3 \end{vmatrix}\right) =$$

$$=\begin{vmatrix} XA_1 \\ B_2A_2 \\ B_3A_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XB_1 \\ B_2A_2 \\ B_3A_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1A_1 \\ B_2A_2 \\ B_3A_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} A_1B_1 \\ A_2B_2 \\ A_3B_3 \end{vmatrix}.$$

Коментари

Равенството в теоремата се „конструира“, като се приложи „матричен“ принцип за построяване на вариациите от два елемента трети клас с повторение. По-конкретно:

1) Първите редове на детерминантите от лявата страна на равенството се получават, като векторът $\boldsymbol{XA_1}$ се запише последователно 4 (= 2^2) пъти и след това на същия ред се запише векторът $\boldsymbol{XB_1}$също 4 (= 2^2) пъти, т.е.

$$\boldsymbol{XA_1XA_1XA_1XA_1XB_1XB_1XB_1XB_1}.$$

2) Вторите редове на детерминантите от лявата страна на равенството се получават, като векторът $\boldsymbol{XA_2}$ се запише 2 (= 2^1) пъти, след това векторът $\boldsymbol{XB_2}$ се запише 2(= 2^1) пъти, след това векторът $\boldsymbol{XA_2}$ се запише още 2 пъти и накрая векторът $\boldsymbol{XB_2}$се запише още 2 пъти, т.е.

$$\boldsymbol{XA_2\ \ XA_2XB_2XB_2XA_2\ XA_2XB_2XB_2}.$$

3) Третите редове на детерминантите от лявата страна се получават, като векторите $\boldsymbol{XA_3}$ и $\boldsymbol{XB_3}$се запишат по 4 пъти, редувайки се, т.е.

$$\boldsymbol{XA_3XB_3XA_3XB_3XA_3XB_3\ \ XA_3XB_3}.$$

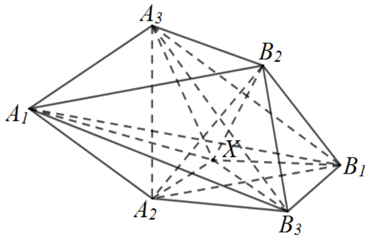
4) В резултат на действията в предходните точки се достига до детерминантите

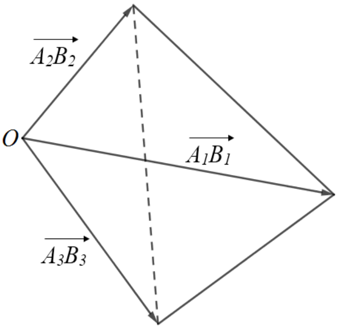
$$\begin{vmatrix} XA_1 \\ XA_2 \\ XA_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} XA_1 \\ XA_2 \\ XB_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} XA_1 \\ XB_2 \\ XA_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} XA_1 \\ XB_2 \\ XB_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} XB_1 \\ XA_2 \\ XA_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} XB_1 \\ XA_2 \\ XB_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} XB_1 \\ XB_2 \\ XA_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} XB_1 \\ XB_2 \\ XB_3 \end{vmatrix}.$$

5) Знаците пред събираемите в алгебричния сбор се определят от броя на буквата „B“ в съответната детерминанта. Ако буквата „B“ участва четно число пъти, знакът е „+“, ако буквата „B“ участва нечетно число пъти, знакът е „–“.

6) Дясната страна е $\begin{vmatrix} A_1B_1 \\ A_2B_2 \\ A_3B_3 \end{vmatrix}$.

Нека $A_1A_2A_3B_1B_2B_3$ е октаедър с върхове:A_1,A_2, A_3,B_1, B_2, B_3, диагонали A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 (и ръбове A_1A_2,A_1A_3, A_1B_2, A_1B_3,A_2A_3, A_2B_1, A_2B_3,A_3B_1, A_3B_2, B_1B_2, A_1B_3, B_2B_3 и стени $A_1A_2A_3$, $A_1A_2B_3$, $A_1B_2A_3$, $A_1B_2B_3$, $B_1A_2A_3$, $B_1A_2B_3$, $B_1B_2A_3$, $B_1B_2B_3$) и X е произволна точка (черт. 4).





Чертеж 4

Във връзка с доказаната теорема ще кажем следното.

1) Точката X разделя октаедъра$A_1A_2A_3B_1B_2B_3$ на 8 тетраедъра $XA_1A_2A_3$, $XA_1A_2B_3$, $XA_1B_2A_3$, $XA_1B_2B_3$, $XB_1A_2A_3$, $XB_1A_2B_3$, $XB_1B_2A_3$, $XB_1B_2B_3$.

2) Алгебричният сбор от ориентираните обеми на тетраедрите $XA_1A_2A_3$, $XA_1A_2B_3$, $XA_1B_2A_3$, $XA_1B_2B_3$, $XB_1A_2A_3$, $XB_1A_2B_3$, $XB_1B_2A_3$, $XB_1B_2B_3$ не зависи от точката X и е равен на ориентирания обем на тетраедър, определен от векторите $\mathbf{A_1B_1}$, $\mathbf{A_2B_2}$, $\mathbf{A_3B_3}$ (по диагоналите на октаедър $A_1A_2A_3B_1B_2B_3$).

3) Тъй като алгебричният сбор от ориентираните обеми на тетраедрите $XA_1A_2A_3$, $XA_1A_2B_3$, $XA_1B_2A_3$, $XA_1B_2B_3$, $XB_1A_2A_3$, $XB_1A_2B_3$, $XB_1B_2A_3$, $XB_1B_2B_3$ е равен на ориентирания обем на октаедър $A_1A_2A_3B_1B_2B_3$, то теоремата означава, че ориентираният обем на октаедър $A_1A_2A_3B_1B_2B_3$ е равен на ориентирания обем на тетраедър, определен от векторите $\mathbf{A_1B_1}$, $\mathbf{A_2B_2}$, $\mathbf{A_3B_3}$ (по диагоналите на октаедър$A_1A_2A_3B_1B_2B_3$).

Извод. Теоремата и коментарът в предходните точки ни дават основание да кажем, че абсолютната стойност на детерминантата $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A_1B_1} \\ \boldsymbol{A_2B_2} \\ \boldsymbol{A_3B_3} \end{vmatrix}$ е **инварианта** на диагоналната точкова конфигурация $A_1A_2A_3B_1B_2B_3$ с диагонали A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3.

4. Четиримерно пространство

4.1. Детерминанта на наредена четворка вектори. Лема

Нека в 4-мерно пространство е дадена афинна координатна система.

Нека $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$,$\boldsymbol{a_3}$,$\boldsymbol{a_4}$ са четири вектора с координати съответно:

$$\boldsymbol{a_1} = (\alpha_{11}\ \alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{14}),$$
$$\boldsymbol{a_2} = (\alpha_{21,} \alpha_{22}, \alpha_{23}, \alpha_{24}),$$

$$\boldsymbol{a_3} = (\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33}, \alpha_{34}),$$
$$\boldsymbol{a_4} = (\alpha_{41}, \alpha_{42}, \alpha_{43}, \alpha_{44}).$$

Да въведем следните означения:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}\alpha_{14} \\ \alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}\alpha_{24} \\ \alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33}\alpha_{34} \\ \alpha_{41}\alpha_{42}\alpha_{43}\alpha_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_1} \\ \boldsymbol{a_2} \\ \boldsymbol{a_3} \\ \boldsymbol{a_4} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}\alpha_{24} \\ \alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}\alpha_{14} \\ \alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33}\alpha_{34} \\ \alpha_{41}\alpha_{42}\alpha_{43}\alpha_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_2} \\ \boldsymbol{a_1} \\ \boldsymbol{a_3} \\ \boldsymbol{a_4} \end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix} \alpha_{41}\alpha_{42}\alpha_{43}\alpha_{44} \\ \alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33}\alpha_{34} \\ \alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}\alpha_{24} \\ \alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}\alpha_{14} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_4} \\ \boldsymbol{a_3} \\ \boldsymbol{a_2} \\ \boldsymbol{a_1} \end{vmatrix}.$$

Детерминантите $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_1} \\ \boldsymbol{a_2} \\ \boldsymbol{a_3} \\ \boldsymbol{a_4} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_2} \\ \boldsymbol{a_1} \\ \boldsymbol{a_3} \\ \boldsymbol{a_4} \end{vmatrix}, \ldots\ldots\ldots, \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_4} \\ \boldsymbol{a_3} \\ \boldsymbol{a_2} \\ \boldsymbol{a_1} \end{vmatrix}$ ще наричаме, съответно **детерминанти** на наредените четворки вектори $(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}, \boldsymbol{a_4})$, $(\boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_3}, \boldsymbol{a_4})$, ……., $(\boldsymbol{a_4}, \boldsymbol{a_3}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_1})$.

Тъй като четири обекта могат да бъдат наредени по 4! начина, то с четворката вектори $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}, \boldsymbol{a_4}$ можем да свържем 24 детерминанти от четвърти ред. Но въпросните детерминанти се получават една от друга чрез разместване на редове, откъдето техните абсолютни стойности са равни.

Нека отбележим и някои непосредствени следствия от въведените определение и означения.

1) При размяна местата на два вектора детерминантата на наредената четворка променя своя „знак“. Например:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_1} \\ \boldsymbol{a_2} \\ \boldsymbol{a_3} \\ \boldsymbol{a_4} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_2} \\ \boldsymbol{a_1} \\ \boldsymbol{a_3} \\ \boldsymbol{a_4} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_1} \\ \boldsymbol{a_2} \\ \boldsymbol{a_3} \\ \boldsymbol{a_4} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_3} \\ \boldsymbol{a_2} \\ \boldsymbol{a_1} \\ \boldsymbol{a_4} \end{vmatrix} \text{ и т.н.}$$

2) При замяна на един вектор с неговия противоположен детерминантата на наредената четворка променя своя „знак“. Например:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_1} \\ \boldsymbol{a_2} \\ \boldsymbol{a_3} \\ \boldsymbol{a_4} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -\boldsymbol{a_1} \\ \boldsymbol{a_2} \\ \boldsymbol{a_3} \\ \boldsymbol{a_4} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_1} \\ \boldsymbol{a_2} \\ \boldsymbol{a_3} \\ \boldsymbol{a_4} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_1} \\ -\boldsymbol{a_2} \\ \boldsymbol{a_3} \\ \boldsymbol{a_4} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_1} \\ \boldsymbol{a_2} \\ \boldsymbol{a_3} \\ \boldsymbol{a_4} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_2} \\ \boldsymbol{a_1} \\ -\boldsymbol{a_3} \\ \boldsymbol{a_4} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_1} \\ \boldsymbol{a_2} \\ \boldsymbol{a_3} \\ \boldsymbol{a_4} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_2} \\ \boldsymbol{a_1} \\ \boldsymbol{a_3} \\ -\boldsymbol{a_4} \end{vmatrix} \text{ и т.н.}$$

Лема (правило на триъгълника). Нека A, B и X са три точки с координати съответно: A$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, B$(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$, X$(x_1, x_2, x_3, x_4)$, $\boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2}, \boldsymbol{c_3}$ са три вектора с координати съответно: $(\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{14})$, $(\gamma_{21}, \gamma_{22}, \gamma_{23}, \gamma_{24})$, $(\gamma_{31}, \gamma_{32}, \gamma_{33}, \gamma_{34})$. Нека векторите $\boldsymbol{AX}$, $\boldsymbol{XB}$, $\boldsymbol{AB}$ са образувани съответно от наредените двойки точки (A, X), (X, B), (A, B). Тогава за детерминантите

$$\begin{vmatrix} AX \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} XB \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} AB \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} c_1 \\ AX \\ c_2 \\ c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_1 \\ XB \\ c_2 \\ c_3 \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} c_1 \\ AB \\ c_2 \\ c_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \\ AX \\ c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \\ XB \\ c_3 \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \\ AB \\ c_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ AX \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ XB \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ AB \end{vmatrix}$$

са в сила равенствата:

$$\begin{vmatrix} AX \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XB \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} AB \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} c_1 \\ AX \\ c_2 \\ c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 \\ XB \\ c_2 \\ c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 \\ AB \\ c_2 \\ c_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \\ AX \\ c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \\ XB \\ c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \\ AB \\ c_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ AX \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ XB \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ AB \end{vmatrix}.$$

Доказателство:

$$\begin{vmatrix} AX \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XB \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_1-\alpha_1 & x_2-\alpha_2 & x_3-\alpha_3 & x_4-\alpha_4 \\ \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \gamma_{14} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & \gamma_{24} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & \gamma_{34} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_1-x_1 & \beta_2-x_2 & \beta_3-x_3 & \beta_4-x_4 \\ \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \gamma_{14} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & \gamma_{24} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & \gamma_{34} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_1-\alpha_1+\beta_1-x_1 & x_2-\alpha_2+\beta_2-x_2 & x_3-\alpha_3+\beta_3-x_3 & x_4-\alpha_4+\beta_4-x_4 \\ \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \gamma_{14} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & \gamma_{24} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & \gamma_{34} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \beta_1-\alpha_1 & \beta_2-\alpha_2 & \beta_3-\alpha_3 & \beta_4-\alpha_4 \\ \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \gamma_{14} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & \gamma_{24} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & \gamma_{34} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} AB \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{vmatrix}.$$

Останалите равенства се доказват по същия начин.

4.2. Векторна детерминанта на елементарна точкова конфигурация. Инварианта

За целите на изложението да припомним понятието елементарна точкова конфигурация в четиримерно пространство. И така: нека A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 са пет точки в четиримерно пространство. Като свържем с отсечка всяка една от точките с останалите 4 точки, получаваме 10 отсечки: A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, A_1A_5, A_2A_3, A_2A_4, A_2A_5, A_3A_4, A_3A_5, A_4A_5. Така получената конфигурация ще наричаме **елементарна точкова конфигурация** в четиримерното пространство. Точките A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 ще наричаме **върхове**, а отсечките A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, A_1A_5, A_2A_3, A_2A_4, A_2A_5, A_3A_4, A_3A_5, A_4A_5 ще наричаме **ръбове** на конфигурацията.

Нека в 4-мерно пространство е дадена елементарна точкова конфигурация с върхове A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 и координати съответно:

$$A_1(\alpha_{11},\alpha_{12},\alpha_{13},\alpha_{14}),\ A_2(\alpha_{21},\alpha_{22},\alpha_{23},\alpha_{24}),\ A_3(\alpha_{31},\alpha_{32},\alpha_{33},\alpha_{34}),$$
$$A_4(\alpha_{41},\alpha_{42},\alpha_{43},\alpha_{44}),\ A_5(\alpha_{51},\alpha_{52},\alpha_{53},\alpha_{54}).$$

Да образуваме векторите $\mathbf{A_1A_2}$, $\mathbf{A_1A_3}$, $\mathbf{A_1A_4}$, $\mathbf{A_1A_5}$. Те имат координати съответно:

$$\mathbf{A_1A_2} = (\alpha_{21}-\alpha_{11},\ \alpha_{22}-\alpha_{12},\alpha_{23}-\alpha_{13},\ \alpha_{24}-\alpha_{14}),$$
$$\mathbf{A_1A_3} = (\alpha_{31}-\alpha_{11},\ \alpha_{32}-\alpha_{12},\ \alpha_{33}-\alpha_{13},\alpha_{34}-\alpha_{14}),$$
$$\mathbf{A_1A_4} = (\alpha_{41}-\alpha_{11},\ \alpha_{42}-\alpha_{12},\ \alpha_{43}-\alpha_{13},\ \alpha_{44}-\alpha_{14}),$$
$$\mathbf{A_1A_5} = (\alpha_{51}-\alpha_{11},\ \alpha_{52}-\alpha_{12},\ \alpha_{53}-\alpha_{13},\ \alpha_{54}-\alpha_{14}).$$

Съгласно въведените определения и означения детерминантата на четворката вектори ($\mathbf{A_1A_2}$, $\mathbf{A_1A_3}$,$\mathbf{A_1A_4}$, $\mathbf{A_1A_5}$) има вида:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{21}-\alpha_{11} & \alpha_{22}-\alpha_{12} & \alpha_{23}-\alpha_{13} & \alpha_{24}-\alpha_{14} \\ \alpha_{31}-\alpha_{11} & \alpha_{32}-\alpha_{12} & \alpha_{33}-\alpha_{13} & \alpha_{34}-\alpha_{14} \\ \alpha_{41}-\alpha_{11} & \alpha_{42}-\alpha_{12} & \alpha_{43}-\alpha_{13} & \alpha_{44}-\alpha_{14} \\ \alpha_{51}-\alpha_{11} & \alpha_{52}-\alpha_{12} & \alpha_{53}-\alpha_{13} & \alpha_{54}-\alpha_{14} \end{vmatrix}.$$

Казано по друг начин: $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A_1A_2} \\ \boldsymbol{A_1A_3} \\ \boldsymbol{A_1A_4} \\ \boldsymbol{A_1A_5} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{21}-\alpha_{11} & \alpha_{22}-\alpha_{12} & \alpha_{23}-\alpha_{13} & \alpha_{24}-\alpha_{14} \\ \alpha_{31}-\alpha_{11} & \alpha_{32}-\alpha_{12} & \alpha_{33}-\alpha_{13} & \alpha_{34}-\alpha_{14} \\ \alpha_{41}-\alpha_{11} & \alpha_{42}-\alpha_{12} & \alpha_{43}-\alpha_{13} & \alpha_{44}-\alpha_{14} \\ \alpha_{51}-\alpha_{11} & \alpha_{52}-\alpha_{12} & \alpha_{53}-\alpha_{13} & \alpha_{54}-\alpha_{14} \end{vmatrix}.$

Тъй като пет обекта могат да бъдат наредени по 5! начина, то с петорката точки A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 можем да свържем 120 детерминати от четвърти ред, а именно:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A_1A_2} \\ \boldsymbol{A_1A_3} \\ \boldsymbol{A_1A_4} \\ \boldsymbol{A_1A_5} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \boldsymbol{A_1A_3} \\ \boldsymbol{A_1A_2} \\ \boldsymbol{A_1A_4} \\ \boldsymbol{A_1A_5} \end{vmatrix}, \ldots\ldots\ldots, \begin{vmatrix} \boldsymbol{A_5A_4} \\ \boldsymbol{A_5A_3} \\ \boldsymbol{A_5A_2} \\ \boldsymbol{A_5A_1} \end{vmatrix}.$$

Да отбележим, че въпросните детерминанти се получават една от друга чрез разместване на редове или изнасяне на знака „минус“ по редове и техните абсолютни стойности са равни.

Горните разсъждения ни дават основание абсолютната стойност на детерминантата $\begin{vmatrix} A_1A_2 \\ A_1A_3 \\ A_1A_4 \\ A_1A_5 \end{vmatrix}$ (или която и да е от останалите 119) да наречем **инварианта** на елементарната точкова конфигурация с върховеA_1, A_2, A_3, A_4, A_5.

4.3. Диагонална точкова конфигурация в четиримерно пространство. Теорема. Инварианта

В началото на точката ще въведем понятието **диагонална точкова конфигурация** в четиримерно пространство.

Нека в четиримерното пространство са дадени осем точки A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4, които образуват наредена осморка (в посочения ред). В този случай можем да считаме, че е дадена точкова конфигурация с **върхове**A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4.

Нека върховете на конфигурацията (A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4) са разделени на четири двойки – (първа, трета), (втора, четвърта), (трета, шеста) и (четвърта, осма), т.е. (A_1, B_1), (A_2, B_2), (A_3, B_3) и (A_4, B_4). Точките на всяка от двойките (A_1, B_1), (A_2, B_2), (A_3, B_3), (A_4, B_4) ще наричаме **противоположни** и всяка отсечка, определена от двойка противоположни върхове, ще наричаме **диагонал** на конфигурацията. (В случая отсечките A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4 са диагоналите на конфигурацията $A_1A_2A_3A_4B_1B_2B_3B_4$.)

Всеки две точки, които не са противоположни, ще казваме, че са **съседни** и отсечка, определена от двойка съседни точки, ще наричаме **ръб** на конфигурацията. (В случая отсечките: A_1A_2,A_1A_3,A_1A_4, A_1B_2, A_1B_3,A_1B_4,A_2A_3, A_2A_4, A_2B_1,A_2B_3, A_2B_4, A_3A_4, A_3B_1, A_3B_2, A_3B_4, A_4B_1, A_4B_2, A_4B_3, B_1B_2, B_1B_3, B_1B_4, B_2B_3, B_2B_4, B_3B_4 (общо 24 на брой) са ръбовете на конфигурацията.)

Конфигурация от осем точки (в четиримерно пространство) с фиксирани диагонали ще наричаме **диагонална точкова конфигурация**. (В случая конфигурацията от точките A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4 е диагонална точкова конфигурация (с диагонали A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4.)

Ще предполагаме, че в четиримерно пространство „тетраедрите“, определени от четворките точки, във всяка от които точките са две по две съседни, „ограждат“ съответната диагоналната точкова конфигурация. (В случая тетраедрите, които „ограждат“ конфигурацията, са общо 16, а именно: $A_1A_2A_3A_4$, $A_1A_2A_3B_4$, $A_1A_2B_3A_4$, $A_1A_2B_3B_4$, $A_1B_2A_3A_4$, $A_1B_2A_3B_4$, $A_1B_2B_3A_4$, $A_1B_2B_3B_4$, $B_1A_2A_3A_4$, $B_1A_2A_3B_4$, $B_1A_2B_3A_4$, $B_1A_2B_3B_4$, $B_1B_2A_3A_4$, $B_1B_2A_3B_4$, $B_1B_2B_3A_4$, $B_1B_2B_3B_4$.)

Теорема. Нека в четиримерно пространство е дадена афинна координатна система. Нека точките A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4 са върхове на (диагонална) точкова конфигурация с диагонали A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4 и X е произволна точка. Тогава за детерминантите на елементарните точкови конфигурации:

$XA_1A_2A_3A_4$, $XA_1A_2A_3B_4$, $XA_1A_2B_3A_4$, $XA_1A_2B_3B_4$,
$XA_1B_2A_3A_4$, $XA_1B_2A_3B_4$, $XA_1B_2B_3A_4$, $XA_1B_2B_3B_4$,
$XB_1A_2A_3A_4$, $XB_1A_2A_3B_4$, $XB_1A_2B_3A_4$, $XB_1A_2B_3B_4$,
$XB_1B_2A_3A_4$, $XB_1B_2A_3B_4$, $XB_1B_2B_3A_4$, $XB_1B_2B_3B_4$

и диагоналната конфигурация $A_1A_2A_3A_4B_1B_2B_3B_4$ е в сила равенството:

$$\begin{vmatrix} XA_1 \\ XA_2 \\ XA_3 \\ XA_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XA_1 \\ XA_2 \\ XA_3 \\ XB_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XA_1 \\ XA_2 \\ XB_3 \\ XA_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XA_1 \\ XA_2 \\ XB_3 \\ XB_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XA_1 \\ XB_2 \\ XA_3 \\ XA_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XA_1 \\ XB_2 \\ XA_3 \\ XB_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XA_1 \\ XB_2 \\ XB_3 \\ XA_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XA_1 \\ XB_2 \\ XB_3 \\ XB_4 \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} XB_1 \\ XA_2 \\ XA_3 \\ XA_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XB_1 \\ XA_2 \\ XA_3 \\ XB_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XB_1 \\ XA_2 \\ XB_3 \\ XA_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XB_1 \\ XA_2 \\ XB_3 \\ XB_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XB_1 \\ XB_2 \\ XA_3 \\ XA_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XB_1 \\ XB_2 \\ XA_3 \\ XB_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XB_1 \\ XB_2 \\ XB_3 \\ XA_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XB_1 \\ XB_2 \\ XB_3 \\ XB_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1B_1 \\ A_2B_2 \\ A_3B_3 \\ A_4B_4 \end{vmatrix}$$

Доказателство:

$$\begin{vmatrix} XA_1 \\ XA_2 \\ XA_3 \\ XA_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XA_1 \\ XA_2 \\ XA_3 \\ XB_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XA_1 \\ XA_2 \\ XB_3 \\ XA_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XA_1 \\ XA_2 \\ XB_3 \\ XB_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XA_1 \\ XB_2 \\ XA_3 \\ XA_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XA_1 \\ XB_2 \\ XA_3 \\ XB_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XA_1 \\ XB_2 \\ XB_3 \\ XA_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XA_1 \\ XB_2 \\ XB_3 \\ XB_4 \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} XB_1 \\ XA_2 \\ XA_3 \\ XA_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XB_1 \\ XA_2 \\ XA_3 \\ XB_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XB_1 \\ XA_2 \\ XB_3 \\ XA_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XB_1 \\ XA_2 \\ XB_3 \\ XB_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XB_1 \\ XB_2 \\ XA_3 \\ XA_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XB_1 \\ XB_2 \\ XA_3 \\ XB_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XB_1 \\ XB_2 \\ XB_3 \\ XA_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XB_1 \\ XB_2 \\ XB_3 \\ XB_4 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} XA_1 \\ XA_2 \\ XA_3 \\ B_4A_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XA_1 \\ XA_2 \\ XB_3 \\ B_4A_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XA_1 \\ XB_2 \\ XA_3 \\ B_4A_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XA_1 \\ XB_2 \\ XB_3 \\ B_4A_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XB_1 \\ XA_2 \\ XA_3 \\ B_4A_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XB_1 \\ XA_2 \\ XB_3 \\ B_4A_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XB_1 \\ XB_2 \\ XA_3 \\ B_4A_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XB_1 \\ XB_2 \\ XB_3 \\ B_4A_4 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} XA_1 \\ XA_2 \\ B_3A_3 \\ B_4A_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XA_1 \\ XB_2 \\ B_3A_3 \\ B_4A_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XB_1 \\ XA_2 \\ B_3A_3 \\ B_4A_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XB_1 \\ XB_2 \\ B_3A_3 \\ B_4A_4 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} XA_1 \\ B_2A_2 \\ B_3A_3 \\ B_4A_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XB_1 \\ B_2A_2 \\ B_3A_3 \\ B_4A_4 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} B_1A_1 \\ B_2A_2 \\ B_3A_3 \\ B_4A_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1B_1 \\ A_2B_2 \\ A_3B_3 \\ A_4B_4 \end{vmatrix}.$$

Коментари

Равенството в теоремата се „конструира“, като се приложи „матричен“ принцип за построяване на вариациите от два елемента четвърти клас с повторение. По-конкретно:

1) Първите редове на детерминантите от лявата страна на равенството се получават, като векторът $\boldsymbol{XA_1}$ се запише 8 (= 2^3) пъти последователно и след това на същия ред се запише векторът $\boldsymbol{XB_1}$ също 8 (= 2^3) пъти последователно, т.е.

$\boldsymbol{XA_1XA_1XA_1XA_1\ XA_1XA_1XA_1XA_1XB_1XB_1XB_1XB_1XB_1XB_1XB_1XB_1}$.

2) Вторите редове на детерминантите от лявата страна на равенството се получават, като векторът $\boldsymbol{XA_2}$ се запише 4 (= 2^2) пъти последователно, след това векторът $\boldsymbol{XB_2}$ се запише 4(= 2^2) пъти последователно, след което получената редица се запише още веднъж (общо 2 пъти), т.е.

$\boldsymbol{XA_2\ \ XA_2\ \ XA_2\ \ XA_2XB_2XB_2XB_2XB_2XA_2\ XA_2XA_2\ \ XA_2XB_2XB_2XB_2XB_2}$.

3) Третите редове на детерминантите от лявата страна се получават, като векторът $\boldsymbol{XA_3}$ се запише 2 (= 2^1) пъти последователно, след това векторът $\boldsymbol{XB_3}$ се запише 2 (= 2^1) пъти последователно, след което получената редица се запише още 3 пъти (общо 4 пъти), т.е.

$\boldsymbol{XA_3\ \ XA_3XB_3XB_3XA_3\ \ XA_3XB_3XB_3XA_3\ \ XA_3XB_3XB_3\ \ XA_3\ XA_3XB_3XB_3}$.

4) Четвъртите редове на детерминантите от лявата страна се получават, като векторът $\boldsymbol{XA_4}$ се запише веднъж, след което векторът $\boldsymbol{XB_4}$ се запише веднъж и получената редица се запише още 7 пъти (общо 8) пъти), т.е.

$\boldsymbol{XA_4XB_4XA_4XB_4XA_4XB_4\ XA_4XB_4\ XA_4XB_4\ XA_4XB_4\ XA_4XB_4XA_4XB_4}$.

5) В резултат на действията в предходните точки се достига до детерминантите:

$$\begin{vmatrix} XA_1 \\ XA_2 \\ XA_3 \\ XA_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} XA_1 \\ XA_2 \\ XA_3 \\ XB_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} XA_1 \\ XA_2 \\ XB_3 \\ XA_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} XA_1 \\ XA_2 \\ XB_3 \\ XB_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} XA_1 \\ XB_2 \\ XA_3 \\ XA_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} XA_1 \\ XB_2 \\ XA_3 \\ XB_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} XA_1 \\ XB_2 \\ XB_3 \\ XA_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} XA_1 \\ XB_2 \\ XB_3 \\ XB_4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} XB_1 \\ XA_2 \\ XA_3 \\ XA_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} XB_1 \\ XA_2 \\ XA_3 \\ XB_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} XB_1 \\ XA_2 \\ XB_3 \\ XA_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} XB_1 \\ XA_2 \\ XB_3 \\ XB_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} XB_1 \\ XB_2 \\ XA_3 \\ XA_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} XB_1 \\ XB_2 \\ XA_3 \\ XB_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} XB_1 \\ XB_2 \\ XB_3 \\ XA_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} XB_1 \\ XB_2 \\ XB_3 \\ XB_4 \end{vmatrix}.$$

6) Знаците пред събираемите в алгебричния сбор се определят от броя на буквите „B“ в съответната детермината. Ако буквата „B“ участва четно число пъти, знакът е „+“, ако буквата „B“ участва нечетно число пъти, знакът е „–“.

7) Дясната страна е $\begin{vmatrix} A_1B_1 \\ A_2B_2 \\ A_3B_3 \\ A_4B_4 \end{vmatrix}$.

Нека множество от пет точкиA_1, A_2, A_3, A_4, A_5 (елементарна точкова конфигурация) и определните от тях 10 отсечки – A_1A_2, A_1A_3, ..., A_4A_5 наречем **симплекс** в четиримерното пространство, а детерминантата $\begin{vmatrix} A_1A_2 \\ A_1A_3 \\ A_1A_4 \\ A_1A_5 \end{vmatrix}$ наречем **„ориентиран обем“** на симплекса $A_1A_2A_3A_4A_5$.Тогава теоремата придобива геометричен смисъл, който ще поясним по-долу.

Нека $A_1A_2A_3A_4B_1B_2B_3B_4$ е диагонална точкова конфигурация с върхове: A_1,A_2, A_3,A_4, B_1,B_2, B_3,B_4, диагонали: A_1B_1,A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4(и ръбове:A_1A_2,A_1A_3, $A_1A_4A_1B_2$, A_1B_3, A_1B_4, A_2A_3, A_2A_4,A_2B_1, A_2B_3, A_2B_4, A_3A_4, A_3B_1, A_3B_2, A_3B_4, A_4B_1, A_4B_2, A_4B_3,B_1B_2, B_1B_3, B_1B_4, B_2B_3, B_2B_4, B_3B_4 и „стени“: $A_1A_2A_3A_4$, $A_1A_2A_3B_4$, $A_1A_2B_3A_4$, $A_1A_2B_3B_4$, $A_1B_2A_3A_4$, $A_1B_2A_3B_4$, $A_1B_2B_3A_4$, $A_1B_2B_3B_4$, $B_1A_2A_3A_4$, $B_1A_2A_3B_4$, $B_1A_2B_3A_4$, $B_1A_2B_3B_4$, $B_1B_2A_3A_4$, $B_1B_2A_3B_4$, $B_1B_2B_3A_4$, $B_1B_2B_3B_4$) и X е произволна точка. Тогава:

1) Точката X разделя конфигурацията$A_1A_2A_3A_4B_1B_2B_3B_4$ на 16 симплекса –$XA_1A_2A_3A_4$, $XA_1A_2A_3B_4$, $XA_1A_2B_3A_4$, $XA_1A_2B_3B_4$, $XA_1B_2A_3A_4$, $XA_1B_2A_3B_4$, $XA_1B_2B_3A_4$, $XA_1B_2B_3B_4$, $XB_1A_2A_3A_4$, $XB_1A_2A_3B_4$, $XB_1A_2B_3A_4$, $XB_1A_2B_3B_4$, $XB_1B_2A_3A_4$, $XB_1B_2A_3B_4$, $XB_1B_2B_3A_4$, $XB_1B_2B_3B_4$.

2) Алгебричният сбор от ориентираните обеми на симплексите от **1)** не зависи от точката X и е равен на ориентирания обем на симплекс, определен от векторите $\mathbf{A_1B_1}$, $\mathbf{A_2B_2}$, $\mathbf{A_3B_3}$, $\mathbf{A_4B_4}$ (по диагоналите на конфигурацията $A_1A_2A_3A_4B_1B_2B_3B_4$).

3) Тъй като алгебричният сбор от ориентираните обеми на симплексите от **1)** е равен на ориентирания обем на диагоналната точкова конфигурация $A_1A_2A_3A_4B_1B_2B_3B_4$, то теоремата означава, че ориентираният обем на конфигурацията $A_1A_2A_3A_4B_1B_2B_3B_4$ е равен на ориентирания обем на симплекс, определен от векторите $\mathbf{A_1B_1}$,$\mathbf{A_2B_2}$, $\mathbf{A_3B_3}$, $\mathbf{A_4B_4}$ (по диагоналите на конфигурацията $A_1A_2A_3A_4B_1B_2B_3B_4$).

Извод. Теоремата и коментарът ни дават основание да кажем, че абсолютната стойност на детерминантата $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A_1B_1} \\ \boldsymbol{A_2B_2} \\ \boldsymbol{A_3B_3} \\ \boldsymbol{A_4B_4} \end{vmatrix}$ е **инварианта** на диагоналната точкова конфигурация $A_1A_2A_3A_4B_1B_2B_3B_4$ с диагонали A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4.

5. *N*-мерно пространство

5.1. Детерминанта на наредена *n*-орка вектори. Лема

Нека в *n*-мерно пространство е дадена афинна координатна система.

Нека $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$,$\boldsymbol{a_3}$, …,$\boldsymbol{a_n}$ са *n* вектора с координати съответно:

$$\boldsymbol{a_1} = (\alpha_{11}\ \alpha_{12},\alpha_{13},\ldots,\alpha_{1n}),$$
$$\boldsymbol{a_2} = (\alpha_{21}\ \alpha_{22},\alpha_{23},\ldots,\ \alpha_{2n}),$$
$$\boldsymbol{a_3} = (\alpha_{31},\alpha_{32},\alpha_{33},\ldots,\ \alpha_{3n}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\boldsymbol{a_n} = (\alpha_{n1},\alpha_{n2},\alpha_{n3},\ldots,\ \alpha_{nn}).$$

Да въведем следните означения:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13} \ldots\ \alpha_{1n} \\ \alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23} \ldots\ \alpha_{2n} \\ \alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33} \ldots\ \alpha_{3n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \\ \alpha_{n1}\alpha_{n2}\alpha_{n3} \ldots\ \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_1} \\ \boldsymbol{a_2} \\ \boldsymbol{a_3} \\ \ldots \\ \boldsymbol{a_n} \end{vmatrix}.$$

Детерминантата $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_1} \\ \boldsymbol{a_2} \\ \boldsymbol{a_3} \\ \ldots \\ \boldsymbol{a_n} \end{vmatrix}$ ще наричаме съответно **детерминанта** на наредената *n*-орка вектори $(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2},\boldsymbol{a_3}, \ldots,\boldsymbol{a_n})$.

Тъй като *n* обекта могат да бъдат наредени по *n*! начина, то с *n*-орката вектори $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$,$\boldsymbol{a_3}$, ...,$\boldsymbol{a_n}$ можем да свържем $n(n$-$1)\ldots3.2.1$ детерминанти от *n*-ти ред. Тъй като въпросните детерминанти се получават една от друга чрез разместване на редове, то техните абсолютни стойности са равни.

Нека отбележим и някои непосредствени следствия от въведените определение и означения.

1) При размяна местата на два вектора детерминантата на наредената четворка променя своя „знак“. Например:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \\ \dots \\ \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_3 \\ \dots \\ \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix}.$$

2) При замяна на един вектор с неговия противоположен детерминантата на наредената четворка променя своя „знак“. Например:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \\ \dots \\ \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -\boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \\ \dots \\ \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix}.$$

Лема (правило на триъгълника). Нека A, B и X са три точки с координати съответно: A($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots \alpha_n$), B($\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_n$), X($x_1, x_2, x_3, \dots x_n$) и $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3 \dots \boldsymbol{c}_{n-1}$ са n–1 вектора с координати съответно:($\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{13}, \dots \gamma_{1n}$), ($\gamma_{21}, \gamma_{22}, \gamma_{22}, \gamma_{23}, \dots \gamma_{2n}$), ($\gamma_{31}, \gamma_{32}, \gamma_{33}, \dots \gamma_{3n}$)…, ($\gamma_{n-11}, \gamma_{n-12}, \gamma_{n-13}, \dots, \gamma_{n-1n}$). Нека векторите $\boldsymbol{AX}, \boldsymbol{XB}, \boldsymbol{AB}$ са образувани съответно от наредените двойки точки (A, X), (X, B), (A, B). Тогава за детерминантите:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{AX} \\ \boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{c}_2 \\ \dots \\ \boldsymbol{c}_{n-1} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \boldsymbol{XB} \\ \boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{c}_2 \\ \dots \\ \boldsymbol{c}_{n-1} \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} \boldsymbol{AB} \\ \boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{c}_2 \\ \dots \\ \boldsymbol{c}_{n-1} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} \boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{AX} \\ \boldsymbol{c}_3 \\ \dots \\ \boldsymbol{c}_{n-1} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{XB} \\ \boldsymbol{c}_3 \\ \dots \\ \boldsymbol{c}_{n-1} \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} \boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{AB} \\ \boldsymbol{c}_3 \\ \dots \\ \boldsymbol{c}_{n-1} \end{vmatrix}; \dots; , \begin{vmatrix} \boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{c}_2 \\ \boldsymbol{c}_3 \\ \dots \\ \boldsymbol{XB} \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} \boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{c}_2 \\ \boldsymbol{c}_3 \\ \dots \\ \boldsymbol{AB} \end{vmatrix}$$

са в сила равенствата:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{AX} \\ \boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{c}_2 \\ \dots \\ \boldsymbol{c}_{n-1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{XB} \\ \boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{c}_2 \\ \dots \\ \boldsymbol{c}_{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{AB} \\ \boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{c}_2 \\ \dots \\ \boldsymbol{c}_{n-1} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} \boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{AX} \\ \boldsymbol{c}_3 \\ \dots \\ \boldsymbol{c}_{n-1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{XB} \\ \boldsymbol{c}_3 \\ \dots \\ \boldsymbol{c}_{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{AB} \\ \boldsymbol{c}_3 \\ \dots \\ \boldsymbol{c}_{n-1} \end{vmatrix}; \dots; \begin{vmatrix} \boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{c}_2 \\ \boldsymbol{c}_3 \\ \dots \\ \boldsymbol{AX} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{c}_2 \\ \boldsymbol{c}_3 \\ \dots \\ \boldsymbol{XB} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{c}_2 \\ \boldsymbol{c}_3 \\ \dots \\ \boldsymbol{AB} \end{vmatrix}.$$

Доказателство:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{AX} \\ c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_{n-1} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \boldsymbol{AX} \\ c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_{n-1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{XB} \\ c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_{n-1} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \boldsymbol{XB} \\ c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_1-\alpha_1 & x_2-\alpha_2 & x_3-\alpha_3 & \cdots & x_n-\alpha_n \\ \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{n-11} & \gamma_{n-12} & \gamma_{n-13} & \cdots & \gamma_{n-1n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_1-x_1 & \beta_2-x_2 & \beta_3-x_3 & \cdots & \beta_n-x_n \\ \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{n-11} & \gamma_{n-12} & \gamma_{n-13} & \cdots & \gamma_{n-1n} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_1-\alpha_1+\beta_1-x_1 & x_2-\alpha_2+\beta_2-x_2 & x_3-\alpha_3+\beta_3-x_3 & \cdots & x_n-\alpha_n+\beta_n-x_n \\ \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{n-11} & \gamma_{n-12} & \gamma_{n-13} & \cdots & \gamma_{n-1n} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \beta_1-\alpha_1 & \beta_2-\alpha_2 & \beta_3-\alpha_3 & \cdots & \beta_n-\alpha_n \\ \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{n-11} & \gamma_{n-12} & \gamma_{n-13} & \cdots & \gamma_{n-1n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{AB} \\ c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Останалите равенства се доказват по същия начин.

5.2. Векторна детерминанта на елементарна точкова конфигурация. Инварианта

За целите на изложението да припомним понятието елементарна точкова конфигурация в n-мерно пространство. И така: Нека A_1, A_2, A_3,… A_n, A_{n+1} са $n+1$ точки в n-мерно пространство. Като свържем с отсечка всяка една от точките с останалите n точки, получаваме $\frac{n(n+1)n(n+1)}{2\qquad 2}$ отсечки: A_1A_2,

$A_1A_3,\dots A_1A_n, A_1A_{n+1}, A_2A_3,\dots A_2A_n, A_2A_{n+1},\dots\dots, A_nA_{n+1}$. Така получената конфигурация ще наричаме **елементарна точкова конфигурация** в *n*-мерно пространство. Точките $A_1, A_2, A_3,\dots A_n, A_{n+1}$ ще наричаме **върхове**, а отсечките A_1A_2, $A_1A_3,\dots, A_1A_n, A_1A_{n+1}, A_2A_3,\dots, A_2A_n, A_2A_{n+1},\dots\dots, A_nA_{n+1}$ ще наричаме **ръбове** на конфигурацията.

Нека в *n*-мерно пространството е дадена елементарна точкова конфигурация $A_1A_2A_3...A_nA_{n+1}$ с върхове $A_1, A_2, A_3, \dots A_n, A_{n+1}$ и координати съответно:

$$A_1(\alpha_{11},\alpha_{12},\alpha_{13},\dots\alpha_{1n}),\ A_2(\alpha_{21}\,\alpha_{22},\alpha_{23},\dots\ \alpha_{2n}),\ A_3(\alpha_{31}\,\alpha_{32},\alpha_{33},\dots\ \alpha_{3n}),\dots$$
$$\dots A_n(\alpha_{n1},\alpha_{n2},\alpha_{n3},\dots\ \alpha_{nn}),\ A_{n+1}(\alpha_{n+11},\alpha_{n+12},\alpha_{n+13},\dots\alpha_{n+1n}).$$

Да образуваме векторите $\mathbf{A_1A_2}, \mathbf{A_1A_3},\dots,\mathbf{A_1A_n}, \mathbf{A_1A_{n+1}}$. Те имат координати съответно:

$$\mathbf{A_1A_2} = (\alpha_{21}-\alpha_{11}, \alpha_{22}-\alpha_{12},\alpha_{23}-\alpha_{13},\dots\alpha_{2n}-\alpha_{1n}),$$
$$\mathbf{A_1A_3} = (\alpha_{31}-\alpha_{11}, \alpha_{32}-\alpha_{12}, \alpha_{33}-\alpha_{13},\dots\alpha_{3n}-\alpha_{1n}),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\mathbf{A_1A_n} = (\alpha_{n1}-\alpha_{11}, \alpha_{n2}-\alpha_{12}, \alpha_{n3}-\alpha_{13},\dots\alpha_{nn}-\alpha_{1n}),$$
$$\mathbf{A_1A_{n+1}} = (\alpha_{n+11}-\alpha_{11}, \alpha_{n+12}-\alpha_{12}, \alpha_{n+13}-\alpha_{13},\dots\alpha_{n+1n}-\alpha_{1n}).$$

Съгласно въведените определения и означения детерминантата на *n*-орката вектори ($\mathbf{A_1A_2}, \mathbf{A_1A_3}, ...\mathbf{A_1A_n}, \mathbf{A_1A_{n+1}}$) има вида:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{21}-\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{23}-\alpha_{13}\dots\ \alpha_{2n}-\alpha_{1n} \\ \alpha_{31}-\alpha_{11}\alpha_{32}-\alpha_{12}\alpha_{33}-\alpha_{13}\dots\ \alpha_{3n}-\alpha_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{n1}-\alpha_{11}\alpha_{n2}-\alpha_{12}\alpha_{n3}-\alpha_{13}\ \dots\ \alpha_{n4}-\alpha_{1n} \\ \alpha_{n+11}-\alpha_{11}\alpha_{n+12}-\alpha_{12}\alpha_{n+13}-\alpha_{13}\ \dots\ \alpha_{n+14}-\alpha_{n+1n} \end{vmatrix}.$$

Или: $$\begin{vmatrix} A_1A_2 \\ A_1A_3 \\ \dots \\ A_1A_n \\ A_1A_{n+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{21}-\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{23}-\alpha_{13}\dots\ \alpha_{2n}-\alpha_{1n} \\ \alpha_{31}-\alpha_{11}\alpha_{32}-\alpha_{12}\alpha_{33}-\alpha_{13}\dots\ \alpha_{3n}-\alpha_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{n1}-\alpha_{11}\alpha_{n2}-\alpha_{12}\alpha_{n3}-\alpha_{13}\ \dots\ \alpha_{n4}-\alpha_{1n} \\ \alpha_{n+11}-\alpha_{11}\alpha_{n+12}-\alpha_{12}\alpha_{n+13}-\alpha_{13}\ \dots\ \alpha_{n+14}-\alpha_{n+1n} \end{vmatrix}.$$

Тъй като *n*+1 обекта могат да бъдат наредени по (*n* +1)! начина, то с *n*+1-орката точки $A_1, A_2, A_3, \dots A_n, A_{n+1}$ можем да свържем $(n+1)n(n-1)\dots..3.2.1$ детерминанти от *n*-ти ред, а именно:

$$\begin{vmatrix} A_1A_2 \\ A_1A_3 \\ \dots \\ A_1A_n \\ A_1A_{n+1} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1A_3 \\ A_1A_2 \\ \dots \\ A_1A_n \\ A_1A_{n+1} \end{vmatrix}, \dots\dots\dots, \begin{vmatrix} A_{n+1}A_n \\ A_{n+1}A_{n-1} \\ \dots \\ A_{n+1}A_2 \\ A_{n+1}A_1 \end{vmatrix}.$$

Да отбележим, че въпросните детерминанти се получават една от друга чрез разместване на редове или изнасяне на знака „минус“ по редове и техните абсолютни стойности са равни.

Горните разсъждения ни дават основание абсолютната стойност на детерминантата $\begin{vmatrix} A_1A_2 \\ A_1A_3 \\ \dots \\ A_1A_n \\ A_1A_{n+1} \end{vmatrix}$ (или която и да е от останалите $(n + 1)! -1$) да наречем **инварианта** на елементарната точкова конфигурация с върховеA_1, A_2, A_3,… A_n, A_{n+1}.

5.3. Диагонална точкова конфигурация в *n*-мерно пространство. Хипотеза. Инварианта

В началото на точката ще въведем понятието **диагонална точкова конфигурация** в *n*-мерно пространство.

Нека в *n*-мерно пространство са дадени 2*n* точки A_1, A_2, A_3, …, A_{n-1}, A_n, B_1, B_2, B_3,…, B_{n-1}, B_n, които образуват наредена 2*n*-орка (в посочения ред). В този случай можем да считаме, че е дадена точкова конфигурация с **върхове** A_1, A_2, A_3, ..., A_{n-1}, A_n, B_1, B_2, B_3,…, B_{n-1}, B_n.

Нека върховете на конфигурацията (A_1, A_2, A_3,…, A_{n-1}, A_n, B_1, B_2, B_3,…, B_{n-1}, B_n) са разделени на *n* двойки (A_1, B_1), (A_2, B_2), (A_3, B_3), …., (A_{n-1}, B_{n-1}), (A_n, B_n). Точките на всяка от двойките (A_1, B_1), (A_2, B_2), (A_3, B_3),…, (A_{n-1}, B_{n-1}),(A_n, B_n) ще наричаме **противоположни** и всяка отсечка, определена от двойка противоположни върхове, ще наричаме **диагонал** на конфигурацията. (В случая отсечките A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3,…, $A_{n-1}B_{n-1}$, A_nB_n са диагоналите на конфигурацията $A_1A_2A_3...A_{n-1}A_nB_1B_2B_3…B_{n-1}B_n$.)

Всеки две точки, които не са противоположни, ще казваме, че са **съседни,** и отсечка, определена от двойка съседни точки, ще наричаме **ръб** на конфигурацията.

(В случая (A_1,A_2), (A_1,A_3), …, (A_1,A_n), (A_1,B_2), (A_1,B_3),…, (A_1,B_n), (A_2,A_3), …, (A_2,A_n), (A_2,B_1), (A_2,B_3),…, (A_2,B_n), (A_3,A_4),…, (A_3,A_n), (A_3,B_1), (A_3,B_2), (A_3,B_4),…, (A_3,B_n),…(A_n,B_1), (A_n,B_2),…, (A_n,B_{n-1}), (B_1,B_2), (B_1,B_3),…, (B_1,B_n), (B_2,B_3),…, (B_2,B_n), (B_3,B_4),…, (B_3,B_n), …. , (B_{n-1},B_n) са двойките съседни точки и съответните отсечки (общо $\frac{2n(2n-1)2n(2n-1)}{2\qquad\qquad 2}- n = 2n(n- 1)$) са ръбовете на конфигурацията.

Конфигурация от 2*n* точки (в *n*-мерно пространство) с фиксирани диагонали ще наричаме **диагонална точкова конфигурация**. (В случая конфигурацията от точките A_1, A_2,A_3, … , A_n, B_1, B_2, B_3,… , B_n е диагонална точкова конфигурация (с диагонали A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3,…, A_nB_n.)

Ще предполагаме, че в *n*-мерното пространство „симплексите“, определени от *n*-орките точки, във всяка от които точките са две по две съседни, „ограждат“ съответната диагоналната точкова конфигурация. (В случая „симплексите“, които „ограждат“ конфигурацията, са общо 2^n, а именно $A_1A_2A_3\ldots A_{n-1}A_n$, $A_1A_2A_3\ldots A_{n-1}B_n$, $A_1A_2A_3\ldots B_{n-1}A_n$, $A_1A_2A_3\ldots B_{n-1}B_n$, …., $A_1A_2B_3\ldots A_{n-1}A_n$, …, $A_1A_2B_3\ldots B_{n-1}A_n$, $A_1A_2B_3\ldots B_{n-1}B_n$, $A_1B_2A_3\ldots A_{n-1}A_n$, $A_1B_2A_3\ldots A_{n-1}B_n$, $A_1B_2A_3\ldots B_{n-1}B_n$, …, $A_1B_2B_3\ldots B_{n-1}B_n$, $B_1A_2A_3\ldots A_{n-1}A_n$, $B_1A_2A_3\ldots A_{n-1}B_n$, $B_1A_2A_3\ldots B_{n-1}B_n$, …., $B_1A_2B_3\ldots B_{n-1}B_n$,$B_1B_2B_3\ldots B_{n-1}B_n$.)

Хипотеза. Нека в *n*-мерно пространство е дадена афинна координатна система. Нека точките A_1, A_2, A_3, …,A_{n-1}, A_n, B_1, B_2, B_3,…, B_{n-1}, B_n са върхове на (диагонална) точкова конфигурация с диагонали A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3,...., $A_{n-1}B_{n-1}$, A_nB_n и X е произволна точка. Тогава за детерминантите на елементарните точкови конфигурации:

$$(X, A_1, A_2, A_3,\ldots,A_{n-1}, A_n), (X, A_1, A_2, A_3,\ldots, A_{n-1}, B_n), (X, A_1, A_2, A_3,\ldots, B_{n-1}, A_n),$$
$$(X, A_1, A_2, A_3,\ldots,B_{n-1}\ B_n),\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.., (X, A_1, B_2, B_3,\ldots,B_{n-1}\ A_n),(X, A_1, B_2, B_3,\ldots,B_{n-1}\ B_n),$$
$$(X, B_1, A_2, A_3,\ldots,A_{n-1}, A_n), (X, B_1, A_2, A_3,\ldots, A_{n-1}, B_n), (X, B_1, A_2, A_3,\ldots, B_{n-1}, A_n),$$
$$(X, B_1, A_2, A_3,\ldots,B_{n-1}\ B_n),\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, (X, B_1, B_2, B_3,\ldots,B_{n-1}\ A_n),(X, B_1, B_2, B_3,\ldots,B_{n-1}\ B_n)$$

и диагоналната конфигурация $A_1A_2A_3...A_{n-1}A_nB_1B_2B_3...B_{n-1}B_n$, е в сила равенството:

$$\begin{vmatrix} XA_1\\ XA_2\\ XA_3\\ \ldots\\ XA_{n-1}\\ XA_n \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XA_1\\ XA_2\\ XA_3\\ \ldots\\ XA_{n-1}\\ XB_n \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XA_1\\ XA_2\\ XA_3\\ \ldots\\ XB_{n-1}\\ XA_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XA_1\\ XA_2\\ XA_3\\ \ldots\\ XB_{n-1}\\ XB_n \end{vmatrix} + \ldots(-1)^{n-2} \begin{vmatrix} XA_1\\ XB_2\\ XB_3\\ \ldots\\ XB_{n-1}\\ XA_n \end{vmatrix} + (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} XA_1\\ XB_2\\ XB_3\\ \ldots\\ XB_{n-1}\\ XB_n \end{vmatrix} +$$

$$- \begin{vmatrix} XB_1\\ XA_2\\ XA_3\\ \ldots\\ XA_{n-1}\\ XA_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XB_1\\ XA_2\\ XA_3\\ \ldots\\ XA_{n-1}\\ XB_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XB_1\\ XA_2\\ XA_3\\ \ldots\\ XB_{n-1}\\ XA_n \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XB_1\\ XA_2\\ XA_3\\ \ldots\\ XB_{n-1}\\ XB_n \end{vmatrix} + \ldots(-1)^{n-1} \begin{vmatrix} XB_1\\ XB_2\\ XB_3\\ \ldots\\ XB_{n-1}\\ XA_n \end{vmatrix} + (-1)^{n} \begin{vmatrix} XB_1\\ XB_2\\ XB_3\\ \ldots\\ XB_{n-1}\\ XB_n \end{vmatrix} =$$

$$=(-1)^n \begin{vmatrix} \boldsymbol{A_1B_1} \\ \boldsymbol{A_2B_2} \\ \boldsymbol{A_3B_3} \\ \dots \\ \boldsymbol{A_{n-1}B_{n-1}} \\ \boldsymbol{A_nB_n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \boldsymbol{A_1B_1} \\ \boldsymbol{A_2B_2} \\ \boldsymbol{A_3B_3} \\ \dots \\ \boldsymbol{A_{n-1}B_{n-1}} \\ \boldsymbol{A_nB_n} \end{vmatrix}.$$

Коментар. Равенството в теоремата се „конструира“, като се приложи „матричен“ принцип за построяване на вариациите от два елемента от *n* клас с повторение.

6. Вместо заключение

Както е известно, множеството от $n + 1$ точки A_1, A_2, A_3,…, A_n, A_{n+1} (елементарна точкова конфигурация) и определените от тях $\frac{(n+1)n(n+1)n}{2\quad\quad 2}$ отсечки A_1A_2, A_1A_3, ..., A_nA_{n+1} наричаме **симплекс** в *n*-мерното пространство.

Нека детерминантата $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A_1A_2} \\ \boldsymbol{A_1A_3} \\ \dots \\ \boldsymbol{A_1A_n} \\ \boldsymbol{A_1A_{n+1}} \end{vmatrix}$ наречем **„ориентиран обем“** на симплекса $A_1A_2A_3…A_nA_{n+1}$.

Тогава хипотезата може има следния геометричен смисъл.

Ако $A_1A_2A_3…A_nB_1B_2B_3…B_n$ е диагонална точкова конфигурация с върхове: A_1,A_2, A_3,…, A_n, B_1, B_2, B_3,…, B_n и диагонали A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3,…, A_nB_n, то алгебричният сбор от ориентираните обеми на симплексите: $XA_1A_2A_3…A_{n-1}A_n$, $XA_1A_2A_3…A_{n-1}B_4$, ……, $XB_1B_2B_3…A_n$, $XB_1B_2B_3…B_n$ не зависи от точката X и е равен на ориентирания обем на симплекс, определен от векторите $\mathbf{A_1B_1}$,$\mathbf{A_2B_2}$, $\mathbf{A_3B_3}$, **…,** $\mathbf{A_nB_n}$ (по диагоналите на конфигурацията $A_1A_2A_3…A_nB_1B_2B_3…B_n$).

Извод. Хипотезата ни дава основание да кажем, че абсолютната стойност на детерминантата $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A_1B_1} \\ \boldsymbol{A_2B_2} \\ \boldsymbol{A_3B_3} \\ \dots \\ \boldsymbol{A_nB_n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \boldsymbol{A_1B_1} \\ \boldsymbol{A_2B_2} \\ \boldsymbol{A_3B_3} \\ \dots \\ \boldsymbol{A_nB_n} \end{vmatrix}$ е **инварианта** на диагоналната точкова конфигурация $A_1A_2A_3…A_nB_1B_2B_3…B_n$ с диагонали A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3,…, A_nB_n.

REFERENCES/ЛИТЕРАТУРА

Vutova, I. (2014). *Heuristic and prognostic role of the theorems in the school curriculum in mathematics. Dissertation for the educational and research degree "doctor"* (In Bulgarian). Sofia. [Вутова, И. З. (2014). *Евристична и прогностична роля на теоремите в училищния курс по математика. Автореферат на дисертационен труд за присъждане на образователната и научна степен доктор*. София.]

Gavrilov, M. & I. Dimovski (1973). *Introduction to elementary algebra* (In Bulgarian). Sofia: Narodna Prosveta. [Гаврилов, М. & И. Димовски (1973). *Въведение в елементарната алгебра.* София: Народна просвета.]

Gjonov, A. & N. Stoev (1994). *Collection of problems in analytic geometry* (In Bulgarian). Sofia: SOFTEX. [Гьонов, А. & Н. Стоев (1994). *Сборник от задачи по аналитична геометрия*. София: СОФТЕХ.]

Dochev, K. & D. Dimitrov (1973). *Linear algebra* (In Bulgarian). Sofia: Nauka I izkustvo. [Дочев, К. & Д. Димитров (1973). *Линейна алгебра.* София: Наука и изкуство.]

Laltsef, Z. (1993). Anagwgh poluedrwn, *DIASTASH,* Trimhnia ia Maqhmatikh Epiqewrhsh twn PararthmatoV KentrikhV MakedoniaV thV E.M.E., TeucoV 3 – 4 /1993, Thessalonikh.

Lalchev, Z. I. Vutova & M. Varbanova (2005). *Vector-algebraic method to solve geometric problems for areas and volumes* (In Bulgarian). Sofia: Veda Slovena-JG. [Лалчев, З. В., И. З. Вутова & М. Г. Върбанова (2005). *Векторно-алгебричен метод за решаване на геометрични задачи от лица и обеми*. София: Веда Словена-ЖГ.]

Yaglom, I. M. & V. G. Ashkinuze (1962). *Ideas and methods of affine and projective geometry. Part I* (in Russian). Moscow: State Education-pedagogical Printing House of the Ministry of Education of the Russian Federation. [Яглом, И. М. & В. Г. Ашкинузе (1962). *Идеи и методы аффинной и проективной геометрии, I часть.* Москва: Государственное учебно-педагогическое издательство министерства просвещения РСФСР.]

DIAGONAL CONFIGURATIONS OF POINTS. TRIANGLE RULE. INVARIANTS

Abstract. Some new concepts such as diagonal configuration of points and its invariants are introduced in the present work. It is shown that the quadrilateral and the octahedron are concretization of a diagonal configuration of points and that the invariants of these configurations are analogues of the concepts of area of a quadrilateral and volume of an octahedron. The idea of invariants of diagonal configurations of points is consistently developed (an integrated approach is used) for 2-dimentional, 3-dimentional, 4-dimentional, *n*-dimentional ($n > 4$) space. Compact symbols are introduced in order to facilitate the general conclusions and to simplify the demonstrations, also the „triangle rule“ is deduced and consistently applied.

✉ **Prof. Dr. Zdravko Lalchev**
Faculty of Preschool and Primary Education
University of Sofia
69A, Shipchenski prohod Blvd.
1574 Sofia, Bulgaria
E-mail: zdravkol@abv.bg

✉ **Dr. Irina Voutova, Assist. Prof.**
Faculty of Mathematics and Informatics
University of Sofia
5, James Boucher Blvd.
1164 Sofia, Bulgaria
E-mail: irinazv@abv.bg