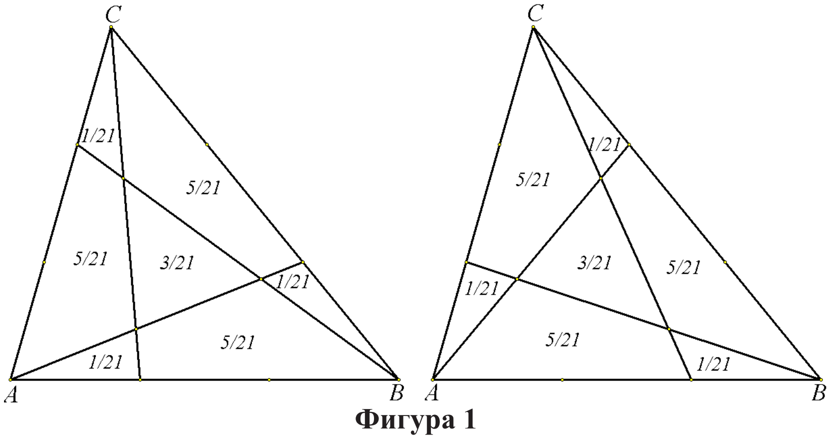
РАВНОЛИЦЕВИ ТРИЪГЪЛНИЦИ, ОПРЕДЕЛЕНИ ОТ ДВЕ ПРЕОБРАЗУВАНИЯ В РАВНИНАТА НА ТРИЪГЪЛНИК

Иван Стефанов, Деян Димитров, Борислав Борисов
Природо-математическа гимназия – Ловеч

Резюме. Статията е ученическа разработка под ръководството на доц. д-р Веселин Ненков. Новите резултати в нея получиха отлична оценка по време на представянето ѝ в международния конкурс „Методология и информационни технологии в образованието“ през 2018 г. и разработката получи първа награда. Тя е посветена на една известна задача за лица на триъгълници и четириъгълници, определени от секущи в триъгълника. Намерена е обща формула за лицето на един от триъгълниците. Определени са лицата на триъгълници, получени чрез изотомичното и изогоналното съответствие в равнината на даден триъгълник. Изследван е и въпросът за равнолицевост на получените триъгълници с пораждащите ги триъгълници.

Keywords: triangle; area; isotomic transformation; isogonal transformation; polynomial root

1. Триъгълник, определен от секущи, делящи страните на даден триъгълник в постоянно отношение. Една известна задача има следната формулировка: *Ако страните на триъгълник се разделят с точки по на три равни*

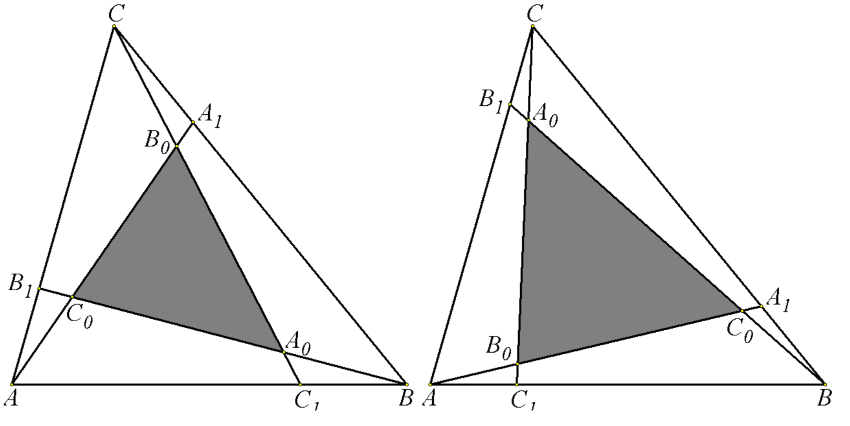


Фигура 1

части и първите (вторите) точки, взети по посока на часовниковата стрелка (или противоположната), се свържат с отсечки със срещуположните им върхове, триъгълникът се разделя на седем части, лицето на всяка от които е кратно на $\frac{1}{21}$ *част от лицето на триъгълника* (фиг. 1).

В тази задача лицето на централния триъгълник се оказва, че е равно на $\frac{3}{21}=\frac{1}{7}$ част от лицето на дадения триъгълник. Аналогично се разглежда случаят, при който страната на триъгълника се разделя на $n \geq 3$ равни части. В този случай Хауърд Гросман е получил, че лицето на централния триъгълник е равно на $\frac{(n-2)^2}{n^2-n+1}$ част от лицето на дадения.

Любопитният резултат, получен от Гросман, дава основание за поставяне на следната обща задача: *Даден е* ΔABC. *Точките* A_1, B_1 *и* C_1 *лежат съответно върху правите* BC, CA *и* AB *така, че* $BA_1 : CA_1 = CB_1 : AB_1 = AC_1 : BC_1 = \lambda$ $(\lambda \neq \pm 1, 0)$. *Ако* $A_0 = BB_1 \cap CC_1$, $B_0 = CC_1 \cap AA_1$ *и* $C_0 = AA_1 \cap BB_1$, *да се определи лицето на* $\Delta A_0B_0C_0$ (фиг. 2).



Фигура 2

За да решим тази задача, ще използваме барицентрични координати спрямо ΔABC, като $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ и $C(0,0,1)$.

От дефиницията на точките A_1, B_1 и C_1 следва, че техните координати се изразяват по следния начин:

$$(1)\quad A_1\left(0,\frac{1}{1-\lambda},-\frac{\lambda}{1-\lambda}\right),\ B_1\left(-\frac{\lambda}{1-\lambda},0,\frac{1}{1-\lambda}\right),\ C_1\left(\frac{1}{1-\lambda},-\frac{\lambda}{1-\lambda},0\right).$$

Като използваме координатите (1), представяме правите AA_1, BB_1 и CC_1 с помощта съответно на следните параметрични уравнения:

$$AA_1:\begin{cases} x=1+(1-\lambda)t_a, \\ y=-t_a, \\ z=\lambda t_a, \end{cases} \qquad BB_1:\begin{cases} x=\lambda t_b, \\ y=1+(1-\lambda)t_b,, \\ z=-t_b, \end{cases} CC_1:\begin{cases} x=-t_c, \\ y=\lambda t_c, \\ z=1+(1-\lambda)t_c. \end{cases}$$

След решаване на системите, образувани от уравненията на двойките прави, се получават координатите на точките A_0, B_0 и C_0 във вида:

$$(2) \qquad \begin{aligned} &A_0\left(-\frac{\lambda}{\lambda^2-\lambda+1},\frac{\lambda^2}{\lambda^2-\lambda+1},\frac{1}{\lambda^2-\lambda+1}\right), \\ &B_0\left(\frac{1}{\lambda^2-\lambda+1},-\frac{\lambda}{\lambda^2-\lambda+1},\frac{\lambda^2}{\lambda^2-\lambda+1}\right), \\ &C_0\left(\frac{\lambda^2}{\lambda^2-\lambda+1},\frac{1}{\lambda^2-\lambda+1},-\frac{\lambda}{\lambda^2-\lambda+1}\right). \end{aligned}$$

(Координатите (2) са валидни и в случая, когато $\lambda=-1$, т.е когато A_1, B_1 и C_1 са средите съответно на BC, CA и AB. В този случай, както трябва да се очаква, точките A_0, B_0 и C_0 съвпадат с медицентъра на ΔABC.)

Ориентираното лице на триъгълника с върхове $M(x_M,y_M,z_M)$, $N(x_N,y_N,z_N)$ и $P(x_P,y_P,z_P)$ се определя по формулата

$$(3) \qquad \tilde{S}_{MNP}=\begin{vmatrix} x_M & y_M & z_M \\ x_N & y_N & z_N \\ x_P & y_P & z_P \end{vmatrix}.S\,,$$

където S е лицето на ΔABC.

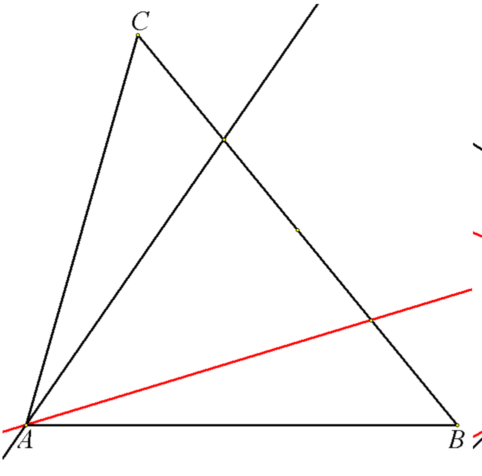
От (2) и (3) следва, че $\tilde{S}_{A_0B_0C_0}=\dfrac{(\lambda+1)^2}{\lambda^2-\lambda+1}\cdot S$. Тъй като коефициентът пред S е винаги положително число, то $\Delta A_0B_0C_0$ е винаги еднакво ориентиран с ΔABC. Затова в тази формула $\tilde{S}_{A_0B_0C_0}=S_{A_0B_0C_0}$. Като вземем предвид и факта, че $\lambda\neq-1$, горната формула може да се запише така:

$$(4) \qquad S_{A_0B_0C_0}=\frac{(\lambda+1)^3}{\lambda^3+1}.S\,.$$

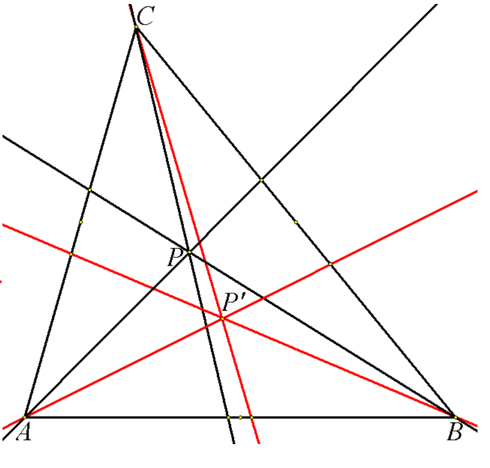
Формулата на Гросман се получава от (4) при $\lambda=-\frac{1}{n-1}$ и $\lambda=-(n-1)$. При $\lambda=-\frac{1}{2}$ и $\lambda=-2$ от (4) получаваме резултата, потвърждаващ твърдението на първоначалната задача, който е илюстриран на фиг. 1.

2. Изотомично съответствие в равнината на триъгълник. Две прави през един и същи връх на ΔABC се наричат *изотомични*, когато пресичат срещуположната на върха страна в точки, симетрични спрямо средата на тази страна (фиг. 3). Ако $P(x_P,y_P,z_P)$ е точка в равнината на ΔABC, изотомичните на правите AP, BP и CP се пресичат в една точка P''. Точката P'' се нарича *изотомична* на P спрямо ΔABC (фиг. 4). Координатите на P'' се изразяват по следния начин:

$$(5)\ P''\left(\frac{y_Pz_P}{y_Pz_P+z_Px_P+x_Py_P},\frac{z_Px_P}{y_Pz_P+z_Px_P+x_Py_P},\frac{x_Py_P}{y_Pz_P+z_Px_P+x_Py_P}\right).$$



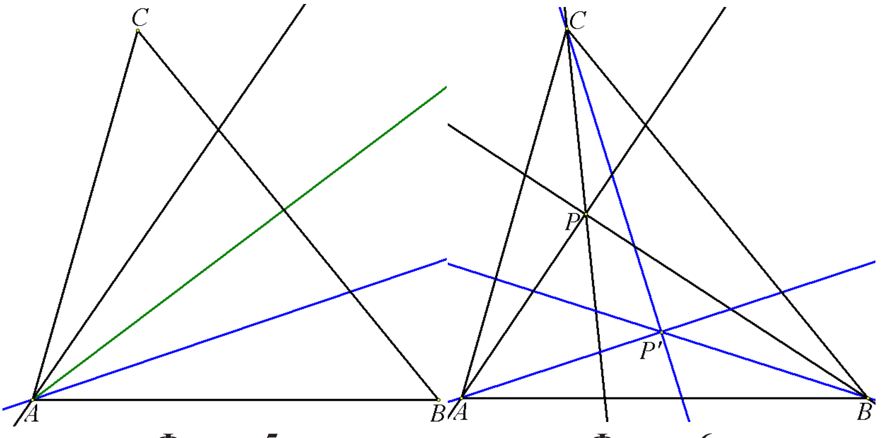
Фигура 3



Фигура 4

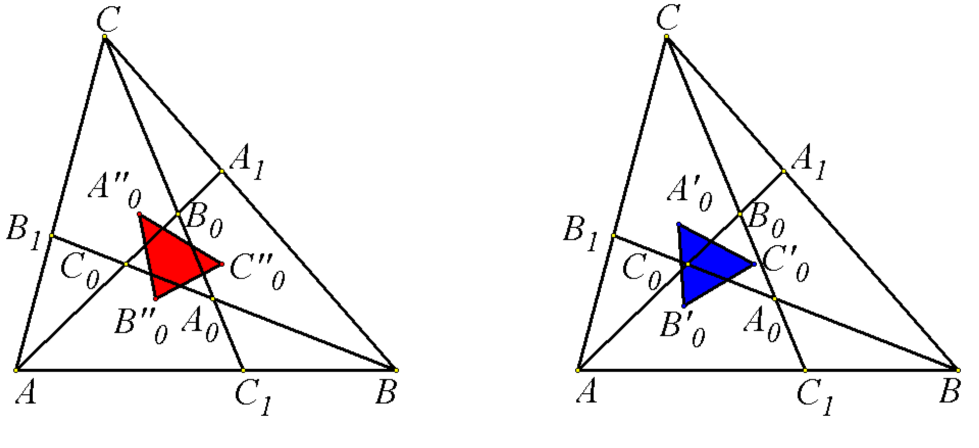
3. Изогонално съответствие в равнината на триъгълник. Две прави през един и същ връх на ΔABC се наричат *изогонални*, когато са симетрични спрямо ъглополовящата на триъгълника през този връх (фиг. 5). Ако $P(x_P,y_P,z_P)$ е точка в равнината на ΔABC, изогоналните на правите AP, BP и CP се пресичат в една точка P'. Точката P' се нарича *изогонална* на P спрямо ΔABC (фиг. 6). Координатите на P' се изразяват по следния начин:

$$(6)\ P'\left(\frac{a^2y_Pz_P}{a^2y_Pz_P+b^2z_Px_P+c^2x_Py_P},\frac{b^2z_Px_P}{a^2y_Pz_P+b^2z_Px_P+c^2x_Py_P},\frac{c^2x_Py_P}{a^2y_Pz_P+b^2z_Px_P+c^2x_Py_P}\right).$$



Фигура 5 **Фигура 6**

4. Триъгълници, определени от изотомичните изогонално спрегнати точки на A_0, B_0 и C_0 спрямо ΔABC. Ако A_0'', B_0'' и C_0'' са точките, които са изотомични съответно на A_0, B_0 и C_0 спрямо ΔABC (фиг. 7), а точките A_0', B_0' и C_0' са изогонално спрегнатите на същите точки спрямо ΔABC (фиг. 8), възниква въпросът за определяне на лицата на триъгълниците $A_0''B_0''C_0''$ и $A_0'B_0'C_0'$ (фиг. 7, 8).



Фигура 7 **Фигура 8**

От (2), (5) и (6) за координатите на точките A_0'', B_0'', C_0'', A_0', B_0' и C_0' намираме

$$(7) \qquad \begin{aligned} &A_0''\left(\frac{-\lambda}{\lambda^2-\lambda+1},\frac{1}{\lambda^2-\lambda+1},\frac{\lambda^2}{\lambda^2-\lambda+1}\right),\\ &B_0''\left(\frac{\lambda^2}{\lambda^2-\lambda+1},\frac{-\lambda}{\lambda^2-\lambda+1},\frac{1}{\lambda^2-\lambda+1}\right),\\ &C_0''\left(\frac{1}{\lambda^2-\lambda+1},\frac{\lambda^2}{\lambda^2-\lambda+1},\frac{-\lambda}{\lambda^2-\lambda+1}\right),\end{aligned}$$

$$(8) \qquad \begin{aligned} &A_0'\left(\frac{-\lambda a^2}{-\lambda a^2+b^2+\lambda^2c^2},\frac{b^2}{-\lambda a^2+b^2+\lambda^2c^2},\frac{\lambda^2c^2}{-\lambda a^2+b^2+\lambda^2c^2}\right),\\ &B_0'\left(\frac{\lambda^2a^2}{\lambda^2a^2-\lambda b^2+c^2},\frac{-\lambda b^2}{\lambda^2a^2-\lambda b^2+c^2},\frac{c^2}{\lambda^2a^2-\lambda b^2+c^2}\right),\\ &C_0'\left(\frac{a^2}{a^2+\lambda^2b^2-\lambda c^2},\frac{\lambda^2b^2}{a^2+\lambda^2b^2-\lambda c^2},\frac{-\lambda c^2}{a^2+\lambda^2b^2-\lambda c^2}\right).\end{aligned}$$

От (3) и (7) следва, че лицето на $\Delta A_0''B_0''C_0''$ се определя по формулата

$$(9) \qquad S_{A_0''B_0''C_0''}=\frac{(\lambda+1)^3}{\lambda^3+1}\cdot S\,.$$

От последната формула се вижда, че $\Delta A_0''B_0''C_0''$ е винаги еднакво ориентиран с ΔABC, а от (4) и (9) следва, че триъгълниците $A_0''B_0''C_0''$ и $A_0B_0C_0$ са равнолицеви.

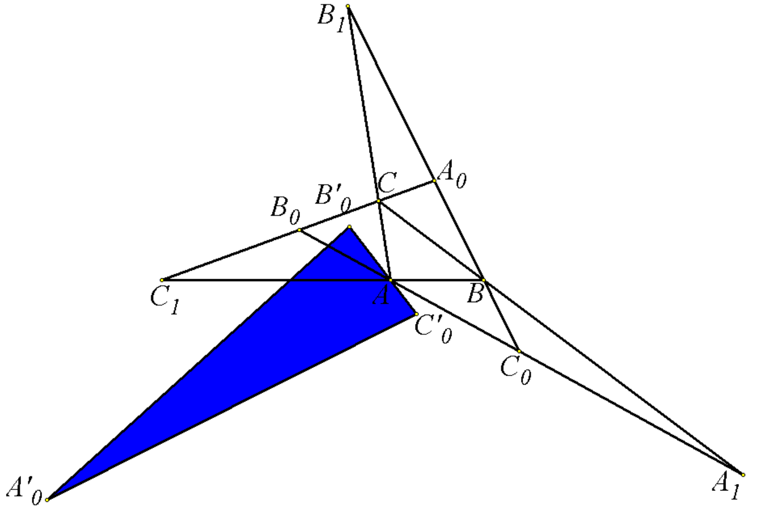
От (3) и (8) се получава, че ориентираното лице на $\Delta A_0'B_0'C_0'$ може да се пресметне по формулата

$$(10) \qquad \tilde{S}_{A_0'B_0'C_0'}=\frac{\left(\lambda^3+1\right)^2a^2b^2c^2}{\left(-\lambda a^2+b^2+\lambda^2c^2\right)\left(\lambda^2a^2-\lambda b^2+c^2\right)\left(a^2+\lambda^2b^2-\lambda c^2\right)}S\,.$$

От (10) се вижда, че триъгълниците $A_0'B_0'C_0'$ и ABC са противоположно ориентирани (фиг. 9), когато имаме едно или три от неравенствата $-\lambda a^2+b^2+\lambda^2c^2<0$, $\lambda^2a^2-\lambda b^2+c^2<0$ и $a^2+\lambda^2b^2-\lambda c^2<0$. Ако допуснем, че съществува стойност на λ, при която са изпълнени едновременно първите две неравенства, след почленното им събиране се получава $\left(c^2+a^2\right)\lambda^2-\left(a^2+b^2\right)\lambda+\left(b^2+c^2\right)<0$. За дискриминантата на квадратния относно λ тричлен имаме неравенството $-16S^2-\left(5a^4+2b^2c^2+2c^2a^2\right)<0$.

Но това означава, че квадратният тричлен приема положителни стойности за всички λ, което противоречи на полученото неравенство. Следователно триъгълниците $A_0'B_0'C_0'$ и ABC са противоположно ориентирани, когато е изпълнено точно едно от горните три неравенства. Това означава, че тези случаи определят множество от триъгълници, в което съществуват триъгълници $A_0'B_0'C_0'$, противоположно ориентирани с пораждащите ги триъгълници $A_0B_0C_0$ (фиг. 9).

Трябва да се отбележи още, че е възможно квадратните тричлени $-\lambda a^2+b^2+\lambda^2c^2$, $\lambda^2a^2-\lambda b^2+c^2$ и $a^2+\lambda^2b^2-\lambda c^2$ да приемат едновременно положителни стойности при всички реални значения на λ. Такъв е случаят, когато са изпълнени едновременно неравенствата $a^2-2bc<0$, $b^2-2ca<0$ и $c^2-2ab<0$. Тези неравенства са в сила, когато съответните дискриминанти на квадратните тричлени са отрицателни. Един триъгълник, за който са изпълнени едновременно последните неравенства, е триъгълникът със страни $a=3$, $b=4$ и $c=4,5$ (имаме $a^2-2bc=-27$, $b^2-2ca=-11$ и $c^2-2ab=-3,75$). Следователно за този триъгълник не съществуват триъгълници $A_0'B_0'C_0'$, които са противоположно ориентирани с него. Това означава, че съществува множество от триъгълници, в което всеки триъгълник $A_0'B_0'C_0'$ е еднакво ориентиран с пораждащия го триъгълник $A_0B_0C_0$. Лесно се забелязва, че равностранните триъгълници принадлежат на това множество.



Фигура 9

5. Равнолицевост на триъгълниците $A_0B_0C_0$ и $A_0'B_0'C_0'$. Беше отбелязано, че триъгълниците $A_0''B_0''C_0''$ и $A_0B_0C_0$ винаги са равнолицеви. Така възниква въпросът за определяне на стойностите на λ, при които триъгълниците $A_0'B_0'C_0'$ и $A_0B_0C_0$ са равнолицеви. Възможни са два основни случая.

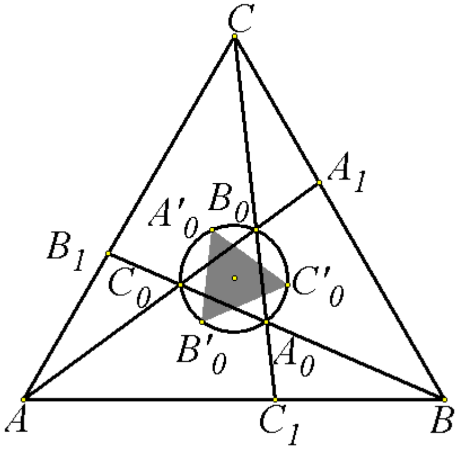
5.1. Триъгълниците $A_0B_0C_0$ и $A_0'B_0'C_0'$ са еднакво ориентирани. От (4) и (10) следва, че стойностите на λ, при които $\tilde{S}_{A_0'B_0'C_0'} = S_{A_0B_0C_0}$, са корени на полинома

$$(11) \qquad \varphi(\lambda) = M\lambda^4 - 2N\lambda^3 + K\lambda^2 - 2M\lambda + N,$$

където

$$(12) \quad M = a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2 - 3a^2b^2c^2, N = a^2b^4 + b^2c^4 + c^2a^4 - 3a^2b^2c^2,$$
$$K = a^6 + b^6 + c^6 - 3a^2b^2c^2.$$

Оказва се, че за всички реални стойности на a, b, c и λ е изпълнено неравенството $\varphi(\lambda) \geq 0$, като равенство се достига само при $a = b = c$. Следователно еднакво ориентираните триъгълници $A_0B_0C_0$ и $A_0'B_0'C_0'$ са равнолицеви само когато ΔABC е равностранен. Нещо повече, в този случай $A_0B_0C_0$ и $A_0'B_0'C_0'$ са еднакви равностранни триъгълници с обща описана окръжност (фиг. 10).



Фигура 10

5.2. Триъгълниците $A_0B_0C_0$ и $A_0'B_0'C_0'$ са противоположно ориентирани. От (4) и (10) следва, че стойностите на λ, при които $\tilde{S}_{A_0'B_0'C_0'} = -S_{A_0B_0C_0}$, са корени на полинома

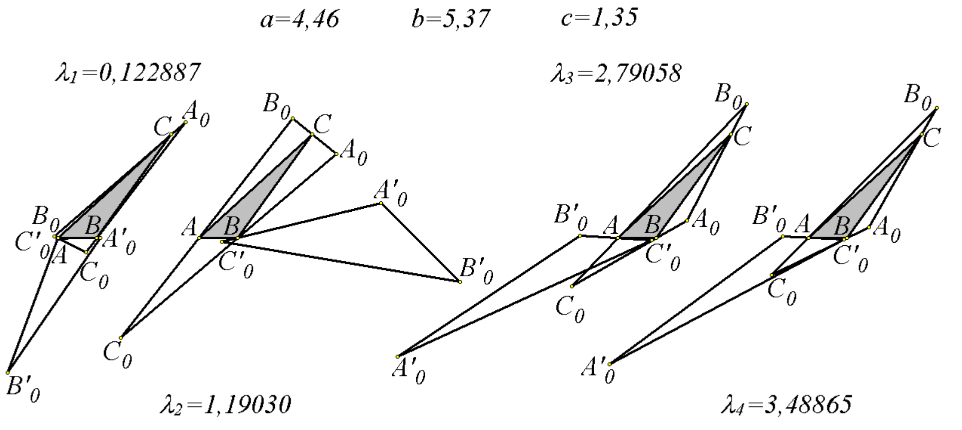
$$(13) \qquad \psi(\lambda) = T\lambda^6 - U\lambda^5 + 2V\lambda^4 - W\lambda^3 + 2U\lambda^2 - V\lambda + T,$$

където

$$T = 2a^2b^2c^2, U = a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2 + 3a^2b^2c^2,$$
$$(14) \qquad V = a^2b^4 + b^2c^4 + c^2a^4 + 3a^2b^2c^2, W = a^6 + b^6 + c^6 + 11a^2b^2c^2.$$

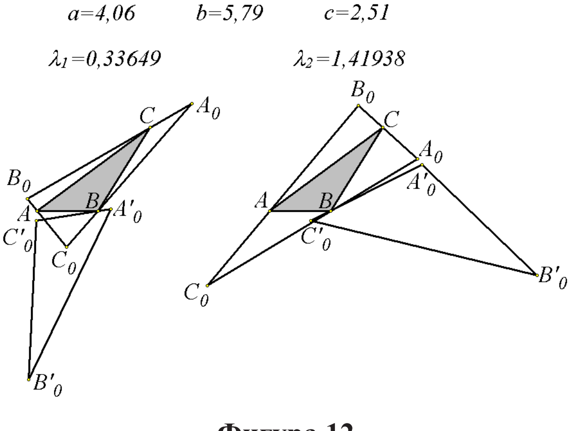
Оказва се, че в зависимост от a, b, c полиномът $\psi(\lambda)$ има най-много четири реални корена. Това означава, че има следните възможности.

1) Съществуват триъгълници ABC, които притежават по четири двойки равнолицеви триъгълници $A_0B_0C_0$ и $A_0'B_0'C_0'$ (фиг. 11).



Фигура 11

2) Съществуват триъгълници ABC, които притежават по две двойки равнолицеви триъгълници $A_0B_0C_0$ и $A_0'B_0'C_0'$ (фиг. 12).



Фигура 12

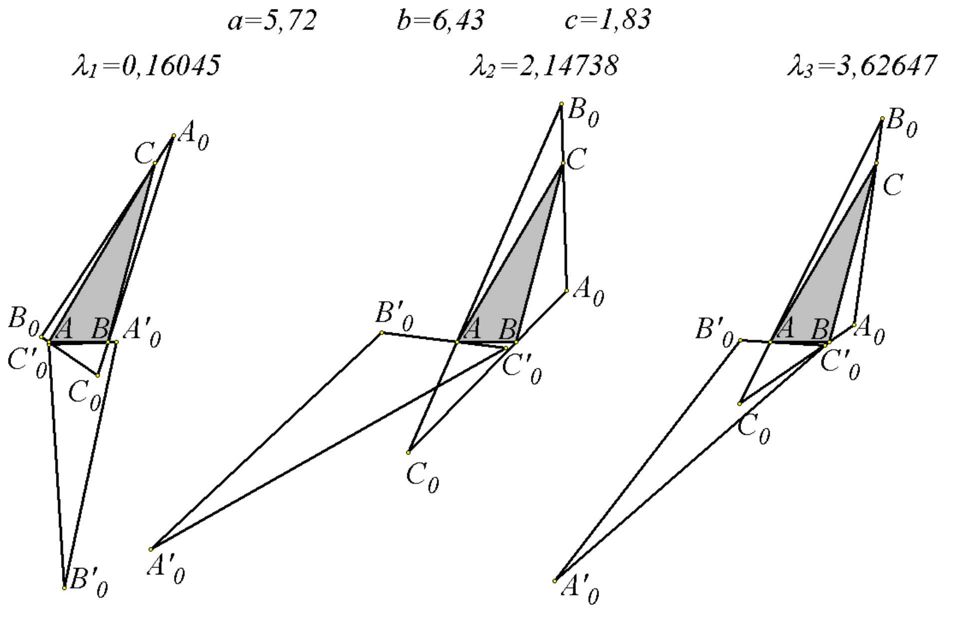
3) Съществуват триъгълници ABC, които не притежават нито една двойка равнолицеви триъгълници $A_0B_0C_0$ и $A_0'B_0'C_0'$. Такъв е триъгълникът ABC със страни $a = 3,31$, $b = 2,02$ и $c = 0,97$.

Освен споменатите случаи е възможно $\psi(\lambda) = 0$ да има корен при $\lambda = 1$. Нека представим $\psi(\lambda)$ във вида $\psi(\lambda) = \psi_1(\lambda)(\lambda - 1) + U + V - W + 2T$, където

$$\psi_1(\lambda) = T\lambda^5 - (U - T)\lambda^4 + (2V - U + T)\lambda^3 -$$
$$-(U - 2V + W - T)\lambda^2 + (U + 2V - W + T)\lambda + V + U - W + T.$$

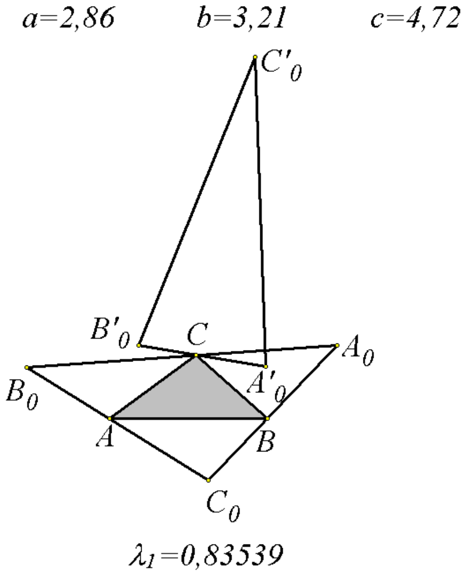
Ако $r = 0$, то $\lambda = 1$ е корен на $\psi(\lambda) = 0$, който няма геометричен смисъл. Тогава според казаното за $\psi(\lambda)$ полиномът от пета степен $\psi_1(\lambda)$ има най-много три реални корена. Следователно имаме следните възможности.

4) Съществуват триъгълници ABC, които притежават по три двойки равнолицеви триъгълници $A_0B_0C_0$ и $A_0'B_0'C_0'$ (фиг. 13).



Фигура 13

5) Съществуват триъгълници ABC, които притежават по една двойка равнолицеви триъгълници $A_0B_0C_0$ и $A_0'B_0'C_0'$ (фиг. 14).



Фигура 14

6. Основни изводи

1) Триъгълникът $A_0B_0C_0$ е еднакво ориентиран с ΔABC за всички реални стойности на $\lambda\ (\lambda \neq \pm 1, 0)$.

2) Триъгълниците $A_0''B_0''C_0''$ и $A_0B_0C_0$ са еднакво ориентирани и равнолицеви за всички реални стойности на $\lambda\ (\lambda \neq \pm 1, 0)$.

3) Ако триъгълниците $A_0'B_0'C_0'$ и $A_0B_0C_0$ са еднакво ориентирани, те са равнолицеви тогава и само тогава, когато ABC е равностранен триъгълник.

4) Множеството на триъгълниците ABC, в което съществуват триъгълници $A_0'B_0'C_0'$, противоположно ориентирани с пораждащите ги триъгълници $A_0B_0C_0$ според броя на двойките равнолицеви триъгълници $A_0'B_0'C_0'$ и $A_0B_0C_0$, се разлага на пет непресичащи се подмножества:

– подмножество на триъгълниците ABC, които не притежават нито една двойка равнолицеви триъгълници $A_0'B_0'C_0'$ и $A_0B_0C_0$;

– подмножество на триъгълниците ABC, които притежават точно една двойка равнолицеви триъгълници $A_0'B_0'C_0'$ и $A_0B_0C_0$;

– подмножество на триъгълниците ABC, които притежават точно две двойки равнолицеви триъгълници $A_0'B_0'C_0'$ и $A_0B_0C_0$;

– подмножество на триъгълниците ABC, които притежават точно три двойки равнолицеви триъгълници $A_0'B_0'C_0'$ и $A_0B_0C_0$;

– подмножество на триъгълниците ABC, които притежават точно четири двойки равнолицеви триъгълници $A_0'B_0'C_0'$ и $A_0B_0C_0$.

REFERENCES/ЛИТЕРАТУРА

Gardner, M. (1980). *Mathematical recreations* (In Bulgarian). Tom 3. Sofia: Nauka i Izkustvo. [Гарднер, М. (1980). *Математически развлечения*. Том 3. София: Наука и изкуство.]

Paskalev, G. & P. Penchev (1983). *Problems for mathematical Olympiad preparation* (In Bulgarian). Sofia: Narodna Prosveta. [Паскалев, Г. & П. Пенчев. (1983). *Задачи за подготовка за математически олимпиади*. София: Народна просвета.]

Paskalev, G. & I. Chobanov (1985). *Notable points in the triangle* (In Bulgarian). Sofia: Narodna Prosveta. [Паскалев, Г. & И. Чобанов. (1985). *Забележителни точки в триъгълника*. София: Народна просвета.]

Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice)*. Sofia: ADE. (ISBN 978-954-92139-1-1), 295 pages

Grozdev, S. & Nenkov V. (2012). *Three notable points on the medians of a triangle* (In Bulgarian). Sofia: Arhimedes 2000. [Гроздев, С. & В. Ненков. (2012). *Три забележителни точки върху медианите на триъгълника*. София: Архимед 2000.]

Grozdev, S. & V. Nenkov (2012). *Around the orthocenter in the plain and the space* (In Bulgarian). Sofia: Arhimedes 2000. [Гроздев, С. & В. Ненков. (2012). *Около ортоцентъра в равнината и пространството*. София: Архимед 2000.]

Malcheski, R., S. Grozdev & K. Anevska, K. (2015). *Geometry of complex numbers*, Sofia: Arhimedes 2000. (ISBN 978-954-779-1886)

Grozdev, S. & V. Nenkov (2017). Some constructions, generated by the duality principle (In Bulgarian). *Mathematics and informatics, 4*, 391 – 400. [Гроздев, С. & В. Ненков. (2017). Няколко конструкции, породени от принципа за дуалност, *Математика и информатика, 4*, 391 – 400.]

Grozdev, S. & V. Nenkov (2018). Second degree curves and triangles generated by isogonality (In Bulgarian). *Mathematics Plus, 1*. [Гроздев, С. & В. Ненков. (2018). Криви от втора степен и триъгълници, породени от изогоналност, *Математика плюс, 1*.]

Grozdev, S. & V. Nenkov (2018). Counting real zeroes of polynomials by Sturm's method. *Mathematics Plus, 1*. [Гроздев, С. & В. Ненков. (2018). Преброяване на реалните корени на полиноми по метода на Щурм, *Математика плюс, 1*.]

TRIANGLES WITH EQUAL AREAS, GENERATED BY TWO TRANSFORMATIONS IN THE TRIANGLE PLANE

Abstract. The paper is an elaboration by high school students under the scientific advices of Assoc. Prof. Dr. Veselin Nenkov. The new results in it were estimated highly during its presentation at the International competition "Methodology and Information Technologies in Education" in 2018 and the work was awarded first prize. It is dedicated to a well-known problem for triangle and quadrilateral areas determined by triangle secants. A general formula is found for the area of one of the triangles. The areas of triangles are determined when obtained by isotomic and isogonal transformations in the plane of a given triangle. What is investigated is the question for equal areas of the obtained triangles and the generating ones.

✉ **Mr. Ivan Stefanov, Student**
✉ **Mr. Deyan Dimitrov, Student**
✉ **Mr. Borislav Borisov, Student**
Mathematics High School – Lovech
1, Acad. Urumov Str.
5500 Lovech, Bulgaria
E-mail: vankata068068@abv.bg
E-mail: dido3637@gmail.com
E-mail: borislavst27@gmail.com