ВРЪЗКИ МЕЖДУ ЗАБЕЛЕЖИТЕЛНИ ТОЧКИ В ЧЕТИРИЪГЪЛНИКА

[1)]Станислав Стефанов, Веселин Ненков
[1)]Технически университет – София

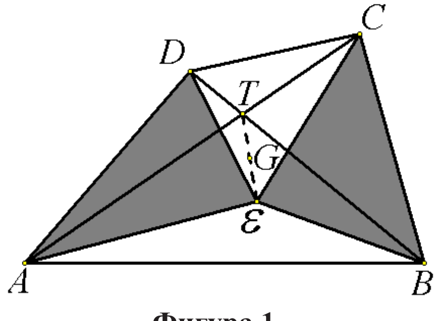
Резюме. В статията се разглеждат геометрични връзки между различни забележителни точки в четириъгълника. Намерени са три забележителни окръжности и две забележителни прави, съдържащи някои от тези точки.
Keywords: quadrilateral; notable point; line; circle

В тази публикация ще разгледаме някои геометрични връзки между различни забележителни точки в изпъкнал четириъгълник. Преди да се спрем на въпросните връзки, ще дадем някои необходими сведения за самите точки.

1. Основни свойства на някои забележителни точки

Различни свойства на редица забележителни точки в изпъкналия четириъгълник са подробно изследвани и описани в отделни публикации, посочени накрая в литературата. Тук ще се спрем на някои тях, които ще са ни необходими в изложението по-нататък. В (Haimov, 1997) е изучена забележителната точка *епицентър*. Това е точка $\mathcal{E}$ в четириъгълник $ABCD$, за която са изпълнени равенствата $S_{AB\mathcal{E}} = S_{CD\mathcal{E}}$ и $S_{AD\mathcal{E}} = S_{BC\mathcal{E}}$ (фиг. 1). От (Haimov, 1997) е известно следното свойство:

(1) Епицентърът $\mathcal{E}$ е симетричен на пресечната точка T на диагоналите AC и BD относно центъра на тежестта G на четириъгълника (фиг. 1).



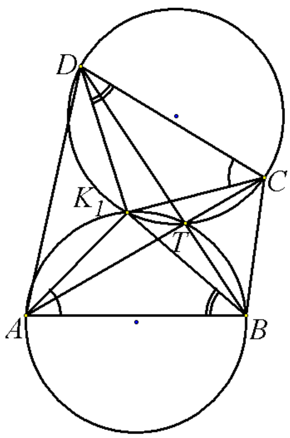
Фигура 1

В (Haimov, 2001) и (Haimov, 2005) се разглежда една двойка забележителни точки в изпъкнал четириъгълник, която е аналог на двойката точки на Брокар в триъгълника. По тази причина точките от тази двойка са наречени брокариани на четириъгълника. Брокарианите са свързани със същите двойки триъгълници, които определят епицентъра на четириъгълника $ABCD$. Втората обща точка K_1 на описаните за ΔABT и ΔCDT окръжности се нарича *брокариана на четириъгълника $ABCD$, съответна на страните му AB и CD* (фиг. 2). Аналогично се определя и *брокарианата K_2, съответна на страните AD и BC*. Брокарианите K_1 и K_2 притежават следните свойства.

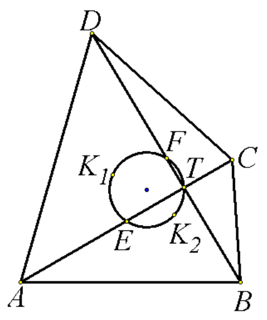
(2) Брокарианите K_1 и K_2 образуват със съответните им страни подобни триъгълници, т.е. ΔABK_1 ΔCDK_1 и $\Delta ADK_2 \sim \Delta CBK_2$.

(3) Брокарианите K_1 и K_2 лежат на една окръжност със средите E и F на диагоналите AC и BD и пресечната им точка T (фиг. 3).

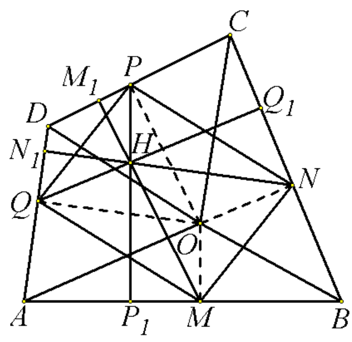
Последната окръжност се нарича *Брокарова окръжност*. Тя се характеризира с това, че върху нея лежат и други забележителни точки на четириъгълника.



Фигура 2



Фигура 3

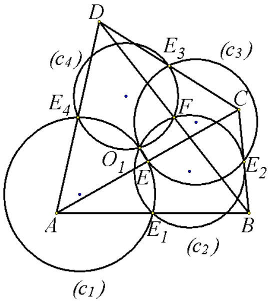


Фигура 4

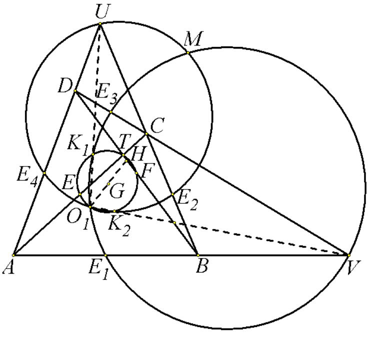
В (Nenkov, Stefanov, Haimov, 2016) и (Haimov, 2010) се разглеждат две свързани помежду си забележителни точки в изпъкнал четириъгълник – обобщения съответно на центъра на описаната окръжност на вписания четириъгълник и на неговия ортоцентър. Точките са наречени съответно псевдоцентър и ортоцентър. Псевдоцентърът обикновено се дефинира по два различни начина. По-простият от тях е следният: ако R_{ABC}, R_{BCD}, R_{CDA} и R_{DAB} са радиусите на описаните съответно около триъгълниците ABC, BCD, CDA и DAB окръжности, то в равнината на изпъкналия четириъгълник $ABCD$ съществува единствена точка O, за разстоянията от която до върховете на $ABCD$ са изпълнени равенствата $AO.R_{BCD} = BO.R_{CDA} = CO.R_{DAB} = DO.R_{ABC}$ (фиг. 4). Точката O се нарича *псевдоцентър* на $ABCD$. Тази точка ще наричаме още *първи псевдоцентър* на $ABCD$.

Едно основно свойство на псевдоцентъра O се състои в това, че ортогоналните му проекции върху правите, определени от страните на четириъгълника, са върхове на успоредник. Правите през върховете на този успоредник, перпендикулярни на срещуположните страни на $ABCD$, се пресичат в една точка H. Тази точка се нарича *ортоцентър* на четириъгълника $ABCD$.

Освен псевдоцентъра друго обобщение на центъра на описаната окръжност за вписания четириъгълник, разгледано в (Стефанов, 2017), е така нареченият втори псевдоцентър. Той се определя чрез следващата конструкция. Ако E_1, E_2, E_3, E_4, E и F са средите съответно на отсечките AB, BC, CD, DA, AC и BD, то с (c_1), (c_2), (c_3) и (c_4) означаваме описаните окръжности съответно на триъгълниците E_4E_1E, E_1E_2F, E_2E_3E и E_3E_4F. Оказва се, че окръжностите (c_1), (c_2), (c_3) и (c_4) имат обща точка O_1. Точката O_1 се нарича *втори псевдоцентър* на $ABCD$ (фиг. 5).



Фигура 5



Фигура 6

Нека правите AD и BC се пресичат в точка U, а правите AB и DC се пресичат в точката V. Правите UK_1 и VK_2 ще наричаме *антисимедиани* на $ABCD$, а описаните окръжности на ΔE_2E_4U и ΔE_1E_3V ще наричаме съответно *Брокарова окръжност, съответна на страните BC и DA*, и *Брокарова окръжност, съответна на страните AB и CD*. Във връзка с тези понятия са изпълнени следните свойства.

(4) Трите Брокарови окръжности минават през втория псевдоцентър O_1 на $ABCD$ (фиг. 6).

(5) Двете антисимедиани UK_1 и VK_2 минават през втория псевдоцентър O_1 на $ABCD$ (фиг. 6).

(6) Вторият псевдоцентър O_1 е симетричен на ортоцентъра H спрямо центъра на тежестта G на четириъгълника $ABCD$ (фиг. 6).

В изпъкналия четириъгълник $ABCD$ се разглежда точка, която е аналог на точката на Лемоан в триъгълника (Haimov, 2011). Нека h_1, h_2, h_3 и h_4 са разстоянията от произволна точка L в равнината на $ABCD$ съответно до правите AB, BC, CD и DA. Точката L, за която $\frac{h_1}{h_3} = \frac{AB}{CD}$ и $\frac{h_2}{h_4} = \frac{BC}{DA}$, се нарича *точка на Лемоан* за $ABCD$ (фиг. 7).

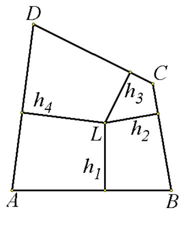
Накрая ще припомним, че описаните около триъгълниците ABU, BCV, CDU и DAV окръжности имат обща точка M, която се нарича *точка на Микел* за четириъгълника $ABCD$ (фиг. 8). Следващите свойства на $ABCD$, свързани с точката на Микел, са доказани в (Nenokov, Stefanov, Haimov, 2017).

(7) Точката на Микел M образува със срещуположните страни двойки подобни триъгълници, т.е. $\Delta ADM \sim \Delta BCM$ и $\Delta ABM \sim \Delta DCM$ (фиг. 8).

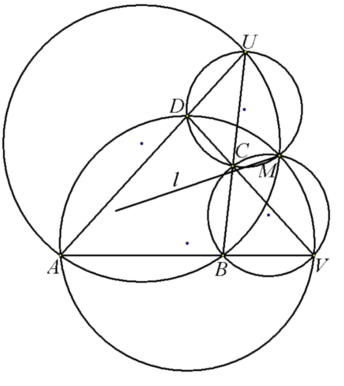
(8) Ъглите AMC, BMD и UMV имат обща ъглополовяща l, която се нарича *ос на Микел* за $ABCD$ (фиг. 8).

(9) Изпълнени са равенствата $AM.CM = BM.DM = UM.VM = r^2$, където числото r^2 се нарича *константа на Микел* (фиг. 8).

(10) Точката на Микел M лежи върху Брокаровите окръжности на четириъгълника, които са съответни на двойките срещуположни страни (фиг. 6).



Фигура 7



Фигура 8

С точката на Микел M е свързано едно преобразуване в равнината на четириъгълника $ABCD$, което играе първостепенна роля при доказателствата на почти всички твърдения в настоящата статия. То се дефинира като композиция от осева симетрия g спрямо оста на Микел и инверсия I с полюс точката M и степен константата на Микел r^2. Това изображение ще означаваме с $Ig(M, r^2)$ и ще наричаме *инверсна изогоналност* спрямо четириъгълника $ABCD$. Изображението $Ig(M, r^2)$ притежава свойствата:

$(*)$ при Ig окръжност, неминаваща през полюса M, се изобразява в окръжност, неминаваща през M;

$(**)$ при Ig права през M се изобразява в права през M;

$(***)$ при Ig брокарианите K_1 и K_2 се изобразяват една в друга, т.е. $Ig(K_1) = K_2$ и $Ig(K_2) = K_1$;

$(****)$ при Ig първият псевдоцентър O се изобразява в пресечната точка на диагоналите T, т.е. $Ig(O) = T$ и $Ig(T) = O$;

$(*****)$ при Ig вторият псевдоцентър O_1 се изобразява в точката на Лемоан L, т.е. $Ig(O_1) = L$ и $Ig(L) = O_1$.

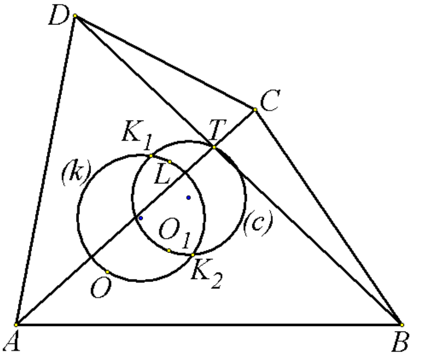
След тези уводни бележки ще пристъпим към разглеждане връзките между изброените забележителни точки в четириъгълника.

2. Окръжност на Лемоан и окръжност на епицентъра

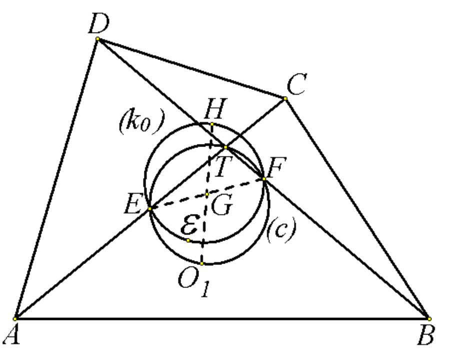
Както е известно, центърът на описаната окръжност, точката на Лемоан и точките на Брокар в триъгълника лежат на една окръжност. Сега ще установим, че техните аналози в произволен изпъкнал четириъгълник също лежат на една окръжност.

Теорема 1. *Първият псевдоцентър O, точката на Лемоан L и брокарианите K_1 и K_2 лежат на една окръжност, която е образ на Брокаровата окръжност при инверсната изогоналност Ig* (фиг. 9).

Доказателство. От свойства (3) и (4) следва, че точките K_1, K_2, T и O_1 лежат на Брокаровата окръжност (c) за четириъгълника $ABCD$. Освен това според свойствата $(***)$, $(****)$ и $(*****)$ на Ig, имаме $Ig(K_1) = K_2$, $Ig(K_2) = K_1$, $Ig(T) = O$ и $Ig(O_1) = L$. От последните равенства и $(*)$ следва, че точките K_2, K_1, O и L лежат на една окръжност (k) (фиг. 9). С това теоремата е доказана.



Фигура 9



Фигура 10

Определение 1. Окръжността, върху която лежат брокарианите K_1 и K_2, точката на Лемоан L и първият псевдоцентър O, ще наричаме *окръжност на Лемоан*.

Според доказаната теорема окръжността на Лемоан (k) е инверсно изогонална на Брокаровата окръжност (c).

Теорема 2. *Средите E и F съответно на диагоналите AC и BD, епицентърът $\mathcal{E}$ и ортоцентърът H на изпъкналия четириъгълник $ABCD$ лежат на една окръжност, симетрична на Брокаровата относно центъра на тежестта G* (фиг. 10).

Доказателство. Симетрията относно центъра на тежестта G означаваме с g_0 (фиг. 10). Според свойство (1) епицентърът $\mathcal{E}$ и пресечната точка на диагоналите T са симетрични относно G. Следователно $g_0(T) = \mathcal{E}$. Същевременно центърът на тежестта G е среда на отсечката EF. Затова $g_0(E) = F$ и $g_0(F) = E$. Накрая от свойство (4) имаме $g_0(O_1) = H$. Тъй като точките T, E, F и O_1 лежат на Брокаровата окръжност (c), то и техните образи при симетрията g_0 лежат на една окръжност (k_0), която е симетрична на Брокаровата (c) относно G.

Определение 2. Окръжността, върху която лежат средите E и F на диагоналите на $ABCD$, епицентър $\mathcal{E}$ и ортоцентърът H, ще наричаме *окръжност на епицентъра*.

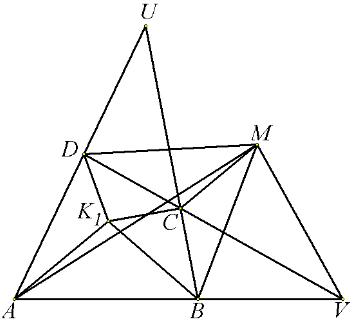
Според доказаната теорема окръжността на епицентъра (k_0) е симетрична на Брокаровата окръжност (c) относно центъра на тежестта G на четириъгълника $ABCD$.

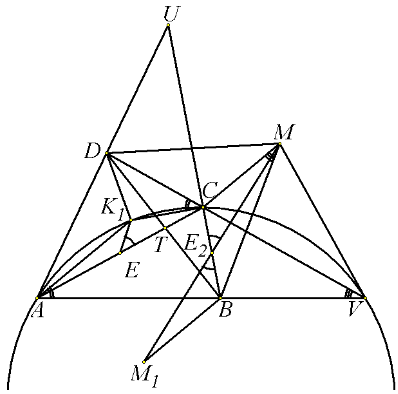
3. Права на Микел и права на Лемоан

Сега ще докажем колинеарността на две тройки от разглежданите забележителни за четириъгълника точки и че двете прави, върху които лежат тези точки, са съответни при инверсната изогоналност. Ще използваме следващите две леми.

Лема 1. *Брокарианата K_1, съответна на страните AB и CD, и точката на Микел M са свързани с равенството* $\dfrac{AK_1}{CK_1} = \dfrac{BM}{CM}$.

Доказателство. От свойство (2) е известно, че $\Delta ABK_1 \sim \Delta CDK_1$ (фиг. 11). Затова е изпълнено $\dfrac{AK_1}{CK_1} = \dfrac{AB}{CD}$. Аналогично от свойство (7) следва $\dfrac{BM}{CM} = \dfrac{AB}{CD}$. Като сравним двете равенства, получаваме $\dfrac{AK_1}{CK_1} = \dfrac{BM}{CM}$, с което лемата е доказана.





Фигура 11 **Фигура 12**

Лема 2. *Изпълнено е равенството е* $\sphericalangle K_1ET = \sphericalangle ME_2U$.

Доказателство. Точката, симетрична на M относно средата E_2 на страната BC, означаваме с M_1 (фиг. 12). Четириъгълникът M_1BMC е успоредник, поради което $M_1B = CM$. Оттук и равенството $\dfrac{AK_1}{CK_1} = \dfrac{BM}{CM}$ (по лема 1) получаваме:

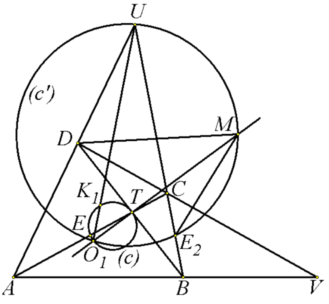
$$(i) \qquad \frac{AK_1}{CK_1} = \frac{BM}{M_1B}.$$

Ще докажем, че $\Delta AK_1C \sim \Delta MBM_1$. От (i) следва, че за това е достатъчно да докажем равенството $\sphericalangle AK_1C = \sphericalangle MBM_1$. Понеже от свойство (2) следва $\sphericalangle BAK_1 = \sphericalangle K_1CD$, то четириъгълникът $AVCK_1$ е вписан в окръжност. Оттук имаме $\sphericalangle AK_1C = 180^0 - \sphericalangle AVC$. Същевременно точката на Микел M лежи на описаната около ΔBCV окръжност и затова $\sphericalangle BMC = \sphericalangle BVC = \sphericalangle AVC$. Оттук следва, че $\sphericalangle AK_1C = 180^0 - \sphericalangle AVC = 180^0 - \sphericalangle BMC = = \sphericalangle MBM_1$. Така се убеждаваме, че $\sphericalangle AK_1C = \sphericalangle MBM_1$, което доказва подобието на триъгълниците AK_1C и MBM_1. В тези триъгълници отсечките K_1E и BE_2 са съответни медиани, а C и M_1 – съответни върхове. Следователно $\sphericalangle K_1EC = \sphericalangle BE_2M_1$, т.е. $\sphericalangle K_1ET = \sphericalangle ME_2U$. С това лемата е доказана.

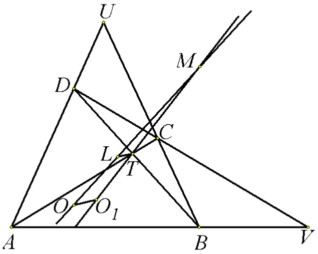
Теорема 3. *Вторият псевдоцентър* O_1*, пресечната точка на диагоналите* T *и точката на Микел* M *лежат на една права* (фиг. 13).

Доказателство. От свойства (4) и (5) е известно, че вторият псевдоцентър O_1 лежи на антисимедианата K_1U и е обща точка на Брокаровата окръжност (c) и Брокаровата окръжност (c'), съответна на страните AD и BC (фиг. 13). Освен това от свойство (3) за (c) и аналогичното му за

(c'), имаме $K_1, E, T \in (c)$ и $U, M, E \in (c')$ (фиг. 13). Като вземем предвид и равенството $\sphericalangle K_1ET = \sphericalangle UE_2M$ (по лема 2), получаваме последователно $\sphericalangle TO_1K_1 = \sphericalangle TEK_1 = \sphericalangle ME_2U = \sphericalangle MO_1U$, т.е. $\sphericalangle TO_1U = \sphericalangle MO_1U$, където ъглите са ориентирани еднакво. Така заключаваме, че $O_1T^{\rightarrow}$ и $O_1M^{\rightarrow}$ сключват равни ъгли с $O_1U^{\rightarrow}$, откъдето следва, че те съвпадат. С това се убеждаваме, че точките O_1, T и M лежат на една права.



Фигура 13



Фигура 14

Определение 3. Правата, върху която лежат вторият псевдоцентър O_1, пресечната точка на диагоналите T и точката на Микел M, ще наричаме *права на Микел*.

Теорема 4. *Първият псевдоцентърът O, точката на Лемоан L и точката на Микел M лежат на една права, която е образ на правата на Микел при инверсната изогоналност* (фиг. 14).

Доказателство. Според теорема 3 и определение 3 точките O_1, T и M лежат върху правата на Микел. Тъй като тази права минава през полюса M на инверсната изогоналност Ig, според свойство $(**)$ тя се изобразява в права през M. От друга страна, поради свойства $(****)$ и $(*****)$ имаме $Ig(T) = O$ и $Ig(O_1) = L$. Следователно точките L, O и M лежат на една права, която е образ на правата на Микел при инверсната изогоналност Ig (фиг. 14).

Определение 4. Правата, върху която лежат първият псевдоцентър O, точката на Лемоан L и точката на Микел M, ще наричаме *права на Лемоан*.

От последната теорема следва, че правата на Микел и правата на Лемоан са инверсно изогонални.

4. Други връзки между забележителни точки в четириъгълника

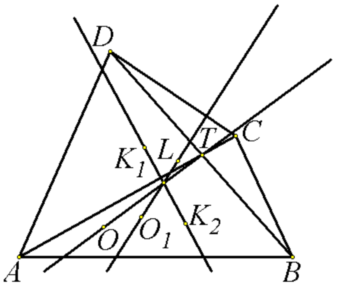
Теорема 5. *Правата, определена от двата псевдоцентъра O и O_1, е успоредна на правата, определена от точката на Лемоан L и пресечната точка T на диагоналите* (фиг. 14).

Доказателство. От свойства $(****)$ и $(*****)$ на инверсната изогоналност Ig имаме $Ig(T) = O$ и $Ig(O_1) = L$ (фиг. 14). Затова са изпълнени равенствата $MT.MO = r^2$ и $MO_1.ML = r^2$. Оттук следва $MO_1.ML = MT.MO$. Следователно $\frac{MO_1}{MT} = \frac{MO}{ML}$. Като вземем предвид, че точките O_1, T и M лежат върху правата на Микел, а точките O, L и M лежат върху правата на Лемоан, заключаваме, че $TL \parallel OO_1$.

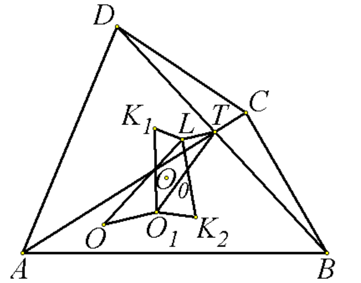
В заключение привеждаме без доказателство още две интересни твърдения, свързващи разглежданите забележителни точки.

Теорема 6. *Правите OT, O_1L и K_1K_2 се пресичат в една точка* (фиг. 15).

Теорема 7. *Четириъгълниците $O_1K_2LK_1$ и O_1OLT имат общ първи псевдоцентър* (фиг. 16).



Фигура 15



Фигура 16

REFERENCES / ЛИТЕРАТУРА

Haimov, H. (1997). The epicenter – a notable point in the quadrilateral (In Bulgarian). *Mathematics*, 1, 18 – 24. [Хаимов, Х. (1997). Епицентърът – забележителна точка в четириъгълника, *Математика, 1*, 18 – 24.]

Haimov, H. (2001). The Brocardians – notable points in the quadrilateral (In Bulgarian). *Mathematics and Informatics*, 6, 17 – 23. [Хаимов, Х. (2001). Брокарианите – забележителни точки в четириъгълника, *Математика и информатика,* 6, 17 – 23.]

Haimov, H. (2005). Brocardians of the quadrilateral (In Bulgarian). *Mathematics, 5*, 15 – 22. [Хаимов, Х. (2005). Брокариани на четириъгълника, *Математика, 5*, 15 – 22.]

Haimov, H. (2010). Geometry of the quadrilateral (In Bulgarian). *Mathematics Plus, 2*, 28 – 51. [Хаимов, Х. (2010). Геометрия на четириъгълника, *Математика плюс, 2*, 28 – 51.]

Haimov, H. (2011). Lemoin point (In Bulgarian). *Mathematics, 6*, 3 – 12. [Хаимов, Х. (2011). Точка на Лемоан, *Математика,*6*,* 3 – 12.]

Nenkov, V., S. Stefanov & H. Haimov (2016). Pseudocenter and orthocenter –

notable points in the quadrilateral (in Bulgarian). *Mathematics and Informatics*, 6, 614 – 625. [Ненков, В., С. Стефанов & Х. Хаимов (2016). [Псевдоцентър и ортоцентър – забележителни точки в четириъгълника, *Математика и информатика, 6,* 614 – 625.]
Nenkov, V., S. Stefanov & H. Haimov (2017). Geometry of the quadrilateral. Miquel point. Inverse isogonality (In Bulgarian). *Mathematics and Informatics*, 1, 81 – 93. [Ненков, В., С. Стефанов & Х. Хаимов (2017). Геометрия на четириъгълника. Точка на Микел. Инверсна изогоналност, *Математика и информатика,* 1, 81 – 93.]
Stefanov, S. (2017). Second pseudocenter of the quadrilateral (in Bulgarian). *Mathematics and Informatics*, 2, 261 – 270. [Стефанов, Ст. (2017). Втори псевдоцентър на четириъгълник, *Математика и информатика*, 3, 261 – 270.]
Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice)*. Sofia: ADE. (ISBN 978-954-92139-1-1.)
Malcheski, R., S. Grozdev & K. Anevska (2015). *Geometry of complex numbers*, Sofia: Arhimedes 2000. (ISBN 978-954-779-1886.)
Georgieva, M. & S. Grozdev (2016). *Morfodinamikata za razvitieto na noosfernia intelekt.* (4th ed.) (In Bulgarian). Sofia: Iztok-Zapad. (ISBN 978-619-152-869-1). 327 pages [Георгиева, М. & С. Гроздев 2016). [*Морфодинамиката за развитието на ноосферния интелект*. (4-то изд.) София: Изток – Запад.]

CONNECTIONS AMONG NOTABLE POINTS IN THE QUADRILATERAL

Abstract. The paper considers some geometric connections among different notable points in the quadrilateral. What are obtained are three notable circles and two notable lines which contain some of these points.

✉ **Mr. Stanislav Stefanov**
Technical University of Sofia
Sofia, Bulgaria
E-mail: stanislav.toshkov@abv.bg

✉ **Dr. Veselin Nenkov, Assoc. Prof.**
E-mail: vnenkov@mail.bg