

ДВЕ ТРАНСФОРМАЦИИ В РАВНИНАТА НА ЧЕТИРИЪГЪЛНИК И ТЯХНОТО ПРИЛОЖЕНИЕ

Димитър Опарлаков

Математическа гимназия – Варна

Резюме. Статията е ученическа разработка под ръководството на ас. Станислав Стефанов. Разработената тема участва в международния конкурс „Методология и информационни технологии в образованието“ през 2018 г. В нея са систематизирани и представени някои основни резултати от геометрията на четириъгълника, свързани с две нови универсални изображения в равнината на четириъгълника, имащи важни приложения в геометрията на последния. Основното от тези приложения се състои в обобщаване на теоремите на Микел, Гаус и Гаус-Боденмилер за пълния четириъгълник, както и на съпътстващи ги твърдения. Въпросните изображения служат и за доказване на геометрични връзки между новооткрити забележителни точки в равнината на четириъгълника, както и за извеждането от свойства на едни от тях и свойства на други, образи на първите при изобразяването. Макар и с разнородни дефиниции, двете изображения са тясно свързани помежду си. Едното от тях се явява разпространение на другото от определено множество от точки в равнината на дадения четириъгълник в цялата равнина.

Keywords: quadrilateral; remarkable point; line; circle

Точка на Микел

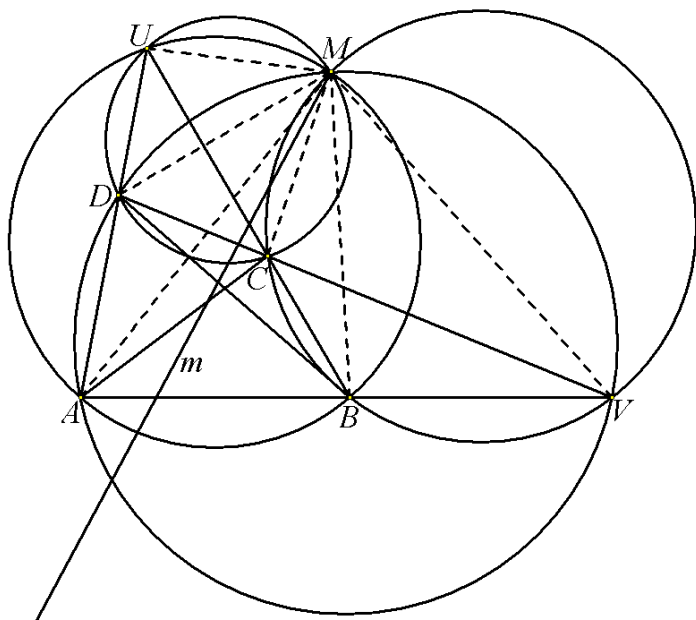
1.1. Инверсна изогоналност. Първото преобразуване, което предстои да разгледаме тук, е тясно свързано с точката на Микел на пълния четириъгълник. Последната е открита през XIX век благодарение на една теорема на Микел, публикувана през 1838 г., откъдето идва и името ѝ. В настоящата статия точката на Микел се разглежда в един по-различен аспект и така са намерени нейни нови свойства. Особено важно е откриването на връзката с нея на едно изображение в равнината, което ще наричаме инверсна симетрия, защото е композиция от инверсия и симетрия. Преобразуването инверсна изогоналност спрямо четириъгълник, което предстои да разгледаме в тази част, представлява инверсна симетрия в равнината на дадения четириъгълник, параметрите на която се задават с помощта на точката на Микел. Инверсната изогоналност изобразява четириъгълника в себе си, а някои от забележител-

ните му точки – в други от неговата равнина. Основният резултат, получен с помощта на това новооткрито преобразуване, е намирането на обобщение на споменатата по-горе теорема на Микел за пълния четириъгълник.

Най-напред ще разгледаме някои необходими за дефинирането на изображението инверсна изогоналност спрямо произволен изпъкнал четириъгълник свойства на точката на Микел на същия.

1.2. Основни свойства на точката на Микел. Без ограничение на общността, навсякъде по-нататък ще считаме, че продълженията на страните AD и BC на разглеждания четириъгълник $ABCD$ се пресичат в точка U , а на страните AB и DC – в точка V . Ще считаме още, че върхът C лежи между точките B и U , както и между точките D и V . За всеки четириъгълник $ABCD$ е изпълнена следващата забележителна

Теорема 1 (Микел). Ако $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник, то описаните окръжности около четириъгълниците ABU , DCU , ADV и BCV имат обща точка.



Тази теорема ни дава основание да въведем следващото определение.

Определение 1. Ако $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник, общата точка M на описаните окръжности около триъгълниците ABU , DCU , ADV и BCV се нарича *точка на Микел на четириъгълника $ABCD$* .

Някои основни свойства на точката на Микел са следните.

Свойство 1.1. Точката на Микел M за четириъгълника $ABCD$ е единствената точка от вътрешността на $\sphericalangle UCV$, за която $\triangle ADM \sim \triangle BCM$, и също е единствената точка от вътрешността на $\sphericalangle UCV$, за която $\triangle ABM \sim \triangle DCM$.

Свойство 1.2. Ако M е точката на Микел за четириъгълника $ABCD$, то $\triangle DUM \sim \triangle VBM$.

Свойство 1.3. Ако M е точката на Микел за четириъгълника $ABCD$, то за нея са изпълнени равенствата:

$$(1) \quad MA \cdot MC = MB \cdot MD = MU \cdot MV = r^2,$$

където r е положителна константа, свързана с четириъгълника.

Определение 2. Числото r^2 от равенства (1) ще наричаме константа на Микел за четириъгълника $ABCD$.

Свойство 1.4. Ако M е точката на Микел за четириъгълника $ABCD$, то ъглите $\angle AMC$, $\angle DMB$ и $\angle UMV$ имат обща ъглополовяща m .

Определение 3. Ако M е точката на Микел за четириъгълника $ABCD$, то общата ъглополовяща m на ъглите $\angle AMC$, $\angle DMB$ и $\angle UMV$ ще наричаме ос на Микел за четириъгълника.

2. Инверсна симетрия и инверсна изогоналност

Сега ще припомним едно известно преобразуване в равнината. То е тясно свързано с точката на Микел.

Определение 4. Нека M е точка в равнината, m – права през M , и r – дадено положително число. Композицията от симетрията g спрямо правата m и инверсията I с полюс M и степен r^2 се нарича *инверсна симетрия с полюс M , ос m и степен r^2* , която ще бележим с $I \circ g$.

Някои от основните свойства на инверсната симетрия са следните.

Свойство 2.1. Нека $I \circ g$ е инверсна симетрия с полюс M , ос m и степен r^2 . Ако X_1 е образът на точката $X \neq M$ при преобразуването $I \circ g$, то лъчът $MX_1^{\rightarrow}$ е симетричен на лъча $MX^{\rightarrow}$ спрямо оста m и $MX_1 = \frac{r^2}{MX}$.

Свойство 2.2. Нека $I \circ g$ е инверсна симетрия с полюс M , ос m и степен r^2 . Ако A и B са точки в равнината, нележащи на една права с точката M , и техните образи при преобразуването $I \circ g$ са съответно C и D , то $\triangle DCM \sim \triangle ABM$.

Следващото свойство на инверсната симетрия изяснява връзката на преобразуването с точката на Микел.

Свойство 2.3. Нека $I \circ g$ е инверсна симетрия с полюс M , ос m и степен r^2 , а A и B са точки, нележащи на една права с точката M . Ако C и D са образите съответно на точките A и B при преобразуването $I \circ g$, а полюсът му M лежи в $\sphericalangle UCV$ ($U = AD \cap BC$, $V = AB \cap CD$), то M е точката на Микел за четириъгълника $ABCD$.

Една специална инверсна симетрия в равнината на изпъкнал четириъгълник се определя по следния начин.

Определение 5. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник, а M , m и r^2 са съответно точката, оста и константата на Микел за $ABCD$. Инверсната симетрия $I \circ g$ с полюс M , ос m и степен r^2 ще наричаме *инверсна изогоналност спрямо $ABCD$* .

Свойство 2.4 (Пл. Александров). Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник. Ако $I \circ g$ е инверсната изогоналност спрямо него, то $I \circ g(B) = D$, $I \circ g(A) = C$ и $I \circ g(U) = V$.

Ако две точки се изобразяват една в друга при инверсната изогоналност спрямо четириъгълник, ще ги наричаме *инверсно изогонални* спрямо него. Разстоянията от инверсно изогоналните точки до върховете на четириъгълника са свързани с прости зависимости, описани в следващата теорема.

Теорема 2. Нека дължините на страните AB , BC , CD и DA на четириъгълника $ABCD$ са съответно a , b , c и d . Ако точките X_1 и X_2 са инверсно изогонални спрямо четириъгълника, то са изпълнени равенствата:

$$(2) \quad \frac{AX_2}{BX_2} = \frac{CX_1}{DX_1} \cdot \frac{d}{b}, \quad \frac{BX_2}{CX_2} = \frac{DX_1}{AX_1} \cdot \frac{a}{c}, \quad \frac{CX_2}{DX_2} = \frac{AX_1}{BX_1} \cdot \frac{b}{d}, \quad \frac{DX_2}{AX_2} = \frac{BX_1}{CX_1} \cdot \frac{c}{a}.$$

Ъглите, под които срещуположните страни на четириъгълника се виждат от две инверсно изогонални спрямо него точки, са тясно свързани, както се вижда от следващото свойство.

Свойство 2.5. Ако X и X_1 са две инверсно изогонални спрямо четириъгълника $ABCD$ точки от неговата вътрешност и $\sphericalangle AUB = \varphi$, а $\sphericalangle AVD = \psi$, то са изпълнени равенствата:

$$(3) \quad \sphericalangle AX_1B = \sphericalangle DXC + \varphi, \quad \sphericalangle AXD = \sphericalangle BX_1C + \psi.$$

Забележка. Свойство 2.5 остава в сила и ако едната или двете от точките X и X_1 лежат извън четириъгълника, като в този случай, равенства (3) се заменят с равенствата (3'): $|\sphericalangle AX_1B - \sphericalangle DXC| = \varphi$, $|\sphericalangle AXD - \sphericalangle BX_1C| = \psi$.

Други важни свойства на инверсната изогоналност са свързани със следващото определение.

Определение 6. Нека AB е произволна отсечка в равнината. Ще казваме, че точките X и Y са *изогонални спрямо отсечката AB* , ако те лежат на окръжност, минаваща през точките A и B .

Следващата теорема дава достатъчното условие две точки в четириъгълник да са инверсно изогонални спрямо него.

Теорема 3. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник, а X и X_1 са две точки в него, за които съществува точката Y , изогонална на X едновременно спрямо страните AD и BC , и изогонална на X_1 едновременно спрямо страните AB и CD . Ако инверсно изогоналната точка X^* на X спрямо

ABC Длежи в четириъгълника, то $X^* \equiv X_1$, т.е. точката X_1 е инверсно изогонална на X .

Забележка. Теорема 3 остава в сила и в случая, когато една или повече от точките X , Y , X_1 и X^* лежат извън четириъгълника.

Следващата теорема е обобщение на теоремата на Микел за пълния четириъгълник (теорема 1).

Теорема 4. Нека X и X_1 са инверсно изогонални точки спрямо изпъкналия четириъгълник $ABCD$. Тогава: а) описаните окръжности около триъгълниците AX_1B , CX_1D , AXD и CXB се пресичат в една точка; б) описаните окръжности около триъгълниците AX_1D , BX_1C , AXB и CXD се пресичат в една точка.

Забележка. Според свойство 2.4 на инверсната изогоналност имаме, че в частност точките U и V са инверсно изогонални спрямо $ABCD$. Като приложим току-що доказаната теорема 4 към тези точки, получаваме, че описаните окръжности около четирите триъгълника ABU , DCU , ADV и BCV минават през една точка. Но това е точно формулировката на теорема 1 (теоремата на Микел). Виждаме, че теоремата на Микел за пълния четириъгълник е частен случай от теорема 4, т.е. теорема 4 е обобщение на теоремата на Микел.

Теорема 5. Нека $I \circ g$ е инверсната изогоналност спрямо изпъкналия четириъгълник $ABCD$. Ако T е пресечната точка на диагоналите, K_1 и K_2 – съответните брокариани, а O – псевдоцентърът на $ABCD$, то $I \circ g(K_1) = K_2$ и $I \circ g(T) = O$.

Следствие. Нека K_1 и K_2 са брокарианите на изпъкналия четириъгълник $ABCD$. Ако четириъгълникът AK_2CK_1 е също изпъкнал и не е успоредник или трапец, то същият има обща точка на Микел с четириъгълника $ABCD$.

Накрая с помощта на преобразуването инверсна изогоналност ще докажем една връзка между две забележителни точки в равнината на четириъгълника.

Теорема 6. Нека M е точката на Микел за изпъкналия четириъгълник $ABCD$. Ако правите AC и BD не минават през M , то точката M и псевдоцентърът O на $ABCD$ лежат на една обща окръжност заедно с точките A и C и също на друга обща окръжност заедно с точките B и D .

3. Перфектна изогоналност в четириъгълник

Сега ще разгледаме свойствата на друго ново и универсално преобразуване в равнината на произволен четириъгълник, аналог на преобразуването изогоналност (изогонална спрегнатост) в триъгълника.

Определение 7. Две прави през върха на даден ъгъл се наричат *изогонални* спрямо него, ако сключват равни ъгли с ъглополовящата му.

Определение 8. Две точки в равнината на четириъгълник, които лежат на изогонални прави спрямо всеки от ъглите му, ще наричаме *перфектно изогонални спрямо четириъгълника*.

Центърът на вписаната окръжност на описания четириъгълник очевидно е перфектно изогонален сам на себе си спрямо четириъгълника.

Ще разгледаме няколко интересни свойства на перфектно изогоналните точки.

Свойство 3.1. Точките X и Y в равнината на изпъкналия четириъгълник $ABCD$ са перфектно изогонални спрямо него тогава и само тогава, когато проекциите им върху правите, на които лежат страните на четириъгълника, лежат на една окръжност с център средата на отсечката XU .

Свойство 3.2. Точките X и Y от вътрешността на изпъкнал четириъгълник $ABCD$ са перфектно изогонални спрямо него тогава и само тогава, когато съществува елипса с фокуси X и Y , вписана в четириъгълника.

Доказаното свойство 2 само по себе си е значимо, но то е важно преди всичко с това, че поражда едно ново свойство на перфектната изогоналност, характерно само за четириъгълника. Правата през средите на диагоналите на четириъгълника е забележителна с интересните си свойства. Някои от тях са разгледани, като тази права е наречена Гаусова. Сега ще докажем, че и центровете на всички вписани елипси в четириъгълника лежат на Гаусовата права.

Свойство 3.3. Ако X и Y са две перфектно изогонални точки спрямо изпъкналия четириъгълник $ABCD$, то средата O на отсечката XU лежи върху Гаусовата права.

Според свойство 3.1, ако точките X и Y са перфектно изогонални, то проекциите им върху страните на четириъгълника $ABCD$ лежат на една окръжност. В частност, ако точката X в равнината на четириъгълника $ABCD$ има перфектно изогонална спрямо същия, то проекциите на X върху правите, съдържащи страните на четириъгълника, лежат на една окръжност. Вярно е и обратното твърдение.

Свойство 3.4. Нека X е точка в равнината на изпъкналия четириъгълник $ABCD$, проекциите на която върху правите, които съдържат страните на четириъгълника, лежат на една окръжност (c) . Тогава точката X има перфектно изогонална спрямо $ABCD$ точка Y , симетрична на X относно центъра на окръжността (c) .

Свойство 3.5. Точката X от вътрешността на изпъкналия четириъгълник $ABCD$ има перфектно изогонална спрямо него тогава и само тогава, когато е изпълнено равенството: $\sphericalangle AXD + \sphericalangle BXC = 180^\circ$.

Забележка. Свойство 3.5 остава в сила и в случая, когато точката X лежи извън четириъгълника, като условието $\sphericalangle AXD + \sphericalangle BXC = 180^\circ$ в този случай се заменя с условията $\sphericalangle AXD = \sphericalangle BXC$ и $\sphericalangle AXB = \sphericalangle CXD$.

Да припомним, че за четириъгълника $ABCD$ използваме означенията: $AD \cap BC = U$, а $AB \cap DC = V$ (C лежи между B и U и между D и V). Лесно се съобразява, че точките U и V са перфектно изогонални спрямо $ABCD$ (според определение 8). За тях свойство 4.3 (което е в сила както за външни, така и за вътрешни перфектно изогонални спрямо четириъгълник точки) може да бъде изказано така: „Средата на отсечката UV и средите на диагоналите AC и BD лежат на една права“. Следователно свойство 3.3 е обобщение на теоремата на Гаус за пълния четириъгълник, която е точно изказаното твърдение. Благодарение на перфектната изогоналност може да се обобщи и следната:

Теорема на Гаус-Боденмилър. *За всеки четириъгълник $ABCD$ ортоцентровете на триъгълниците ABU , CDU , ADV и BCV лежат на една права.*

Нека отбележим, че теоремата съответства на точките U и V , които са перфектно изогонални спрямо четириъгълника $ABCD$. Тогава можем да разгледаме произволна двойка перфектно изогонални спрямо четириъгълника точки X и Y . Така получаваме.

Свойство 3.6. *Нека X и Y са две перфектно изогонални точки спрямо изпъкналия четириъгълник $ABCD$. Ортоцентровете на триъгълниците ABX , DCX , ADY и BCY лежат на една права, перпендикулярна на Гаусовата права.*

Оттук получаваме следното:

Следствие. *Нека четириъгълникът $ABCD$ е описан около окръжност с център O . Ортоцентровете на триъгълниците ABO , BCO , CDO и DAO лежат на една права, перпендикулярна на Гаусовата.*

Сега ще се спрем на още едно интересно свойство, съответстващо на двойка перфектно изогонални спрямо четириъгълник точки, което ни дава обобщение на твърдение, съпътстващо теоремата на Гаус-Боденмилър, или по-точно на следната:

Теорема на Щайнер. *Центровете на описаните окръжности около триъгълниците ABU , CDU , ADV и BCV лежат на една окръжност.*

Обобщението на това твърдение е следното.

Свойство 3.7. *Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник, а X_1 и X_2 са две перфектно изогонални точки спрямо него. Центровете O_1 , O_2 , O_3 и O_4 съответно на описаните окръжности около триъгълниците ABX_1 , BCX_2 , CDX_1 и ADX_2 лежат на една окръжност.*

Накрая ще отбележим и връзката между перфектната изогоналност и инверсната изогоналност.

Свойство 3.8. Две перфектно изогонални точки X и Y спрямо изпълнял четириъгълник $ABCD$ са и инверсно изогонални спрямо него.

Свойство 3.8*. Нека X и Y са две вътрешни инверсно изогонални точки спрямо изпълнялия четириъгълник $ABCD$. За да бъдат те перфектно изогонални спрямо него, необходимо и достатъчно е да е изпълнено равенството: $\sphericalangle AXD + \sphericalangle BXC = 180^\circ$.

Забележка. Свойство 3.8* остава в сила и за точки X и Y , лежащи извън четириъгълника, като условието $\sphericalangle AXD + \sphericalangle BXC = 180^\circ$ в този случай се заменя с условията $\sphericalangle AXB = \sphericalangle CXD$ и $\sphericalangle AXD = \sphericalangle BXC$.

4. Заключение

Темата „Две трансформации в равнината на четириъгълник“ е свързана с друга интересна тема – „Забележителни точки в четириъгълника“. Последната третира свойствата на различни забележителни точки. Част от тях са типични само за четириъгълника, а други са аналози на забележителни точки в триъгълника или обобщения на забележителни точки в специални видове четириъгълници. Двете теми са повлияни от желанието да се изучат свойствата на четириъгълника като класическа геометрична фигура и по този начин да бъде обогатено познанието за него. Ролята на разглежданите две преобразувания, както видяхме, е в обобщаването на три класически теореми от геометрията. Както ще видим в друг проект, първото от тях служи и за откриването на различни геометрични връзки между споменатите забележителни точки.

REFERENCES/ЛИТЕРАТУРА

- Haimov, H. (1999). Gauss line in the quadrilateral, *Mathematics*, 1, 11 – 16. [Хаимов, Х. (1999). Гаусова права на четириъгълник, *Математика*, 1, 11 – 16.]
- Haimov, H. (2005). Brocardians of the quadrilateral. *Mathematics and Informatics*, 5, 15 – 22. [Хаимов, Х. (2005). Брокариани на четириъгълника, *Математика*, 5, 15 – 22.]
- Haimov, H. (2010). Geometry of the quadrilateral, *Mathematics Plus*, 2, 28 – 50. [Хаимов, Х. (2010). Геометрия на четириъгълника, *Математика плюс*, 2, 28 – 51.]
- Haimov, H. (2011). Lemoine point, *Mathematics*, 6, 4 – 13. [Хаимов, Х. (2011). Точка на Лемоан, *Математика*, 6, 4 – 13.]
- Nenkov, V. (1998). Conics inscribed in a triangle, *Mathematics and Informatics*, 5, 54 – 59. [Ненков, В. (1998). Конични сечения, вписани в триъгълник. *Математика и информатика*, 5, 54 – 59.]

- Nenkov, V. (1999). Parabola inscribed in a triangle, *Mathematics and Informatics*, 4, 61 – 65. [Ненков, В. (1999). Парабола, вписана в триъгълник, *Математика и информатика*, 4, 61 – 65.]
- Nenkov, V. (2010). The set of the centers of inscribed conics in a quadrilateral, *Mathematics and Informatics*, 4, 24 – 30. [Ненков, В. (2010). Множество на центровете на вписаните в четириъгълник конични сечения, *Математика и информатика*, 4, 24 – 30.]
- Nenkov, V., S. Stefanov & H. Haimov (2016). The pseudocenter and the orthocenter – notabler points in the quadrilateral, *Mathematics and Informatics*, 6, 614 – 625. [Ненков, В., Ст. Стефанов & Х. Хаимов. (2016). Псевдоцентърът и ортоцентърът – забележителни точки в четириъгълника, *Математика и информатика*, 6, 614 – 625.]
- Nenkov, V., S. Stefanov & H. Haimov (2017). Geometry of the quadrilateral. Miquel point. Inverse isogonality, *Mathematics and Informatics*, 1, 81 – 94. [Ненков, В., Ст. Стефанов & Х. Хаимов. (2017). Геометрия на четириъгълника, точка на Микел, инверсна изогоналност, *Математика и информатика*, 1, 81 – 94.]
- Stefanov, S. (2017). Second pseudocenter of quadrilateral, *Mathematics and Informatics*, 3, 261 – 270. [Стефанов, Ст. (2017). Втори псевдоцентър на четириъгълник, *Математика и информатика*, 3, 261 – 270.]
- Nenkov, V., S. Stefanov & H. Haimov (2018). Perfect isogonality in quadrilateral, *Mathematics and Informatics*, 2. [Ненков, В., Ст. Стефанов & Х. Хаимов (2018). Перфектна изогоналност в четириъгълник, *Математика и информатика*, 2.]
- Georgieva, M. & S. Grozdev (2016). *Morfodinamikata za razvitiето na noosfernia intelekt*. (4thed.). Sofia: Publ. House “Iztok-Zapad”. (ISBN 978-619-152-869-1). 327 pages [Георгиева, М. & С. Гроздев (2016). *Морфодинамиката за развитието на ноосферния интелект* (4-то изд.). София: Изток – Запад. (ISBN 978-619-152-869-1). 327 стр.]
- Sergeeva, T., M. Shabanova & S. Grozdev (2014). *Foundations of Dynamic Geometry*. Moscow: ASOU. [Сергеева, Т., М. Шабанова & С. Гроздев (2014). *Основы динамической геометрии*. Москва: АСОУ.]
- Grozdev, S. & V. Nenkov (2012). *Three notable points on the medians of the triangle*. Sofia: Archimedes. [Гроздев, С. & В. Ненков (2012). *Три забележителни точки върху медианите на триъгълника*. София: Архимед.]
- Grozdev, S. & V. Nenkov (2012). *Around the orthocenter in the plane and the space*. Sofia: Archimedes. [Гроздев, С. & В. Ненков (2012).

Около ортоцентъра в равнината и пространството. София: Архимед.]
Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice)*. Sofia: ADE.

TWO TRANSFORMATIONS IN THE PLANE OF A QUADRILATERAL AND THEIR APPLICATION

Abstract. The paper is an elaboration of a high school student under the supervision of Assist. Prof. Stanislav Stefanov. It was awarded first prize in the National round of the International Competition “Methodology and information technologies in Education in February, 2018. Some basic results from the geometry of the quadrilateral are systemized and presented in connection with two new transformations in the plane of a quadrilateral that have important applications in the geometry of the quadrilateral. The main of the applications are generalizations of the theorems of Miquel, Gauss and Gauss-Bodenmiller for the complete quadrilateral and the accompanying assertions. The transformations in question serve also in proving geometric relations among the newly found notable points in the plane of a quadrilateral and in deducing properties of some of them and properties of others that are images of the first ones after being transformed. None the less, that they have heterogeneous definitions, the two transformations are connected narrowly. One of them turns to be a diffusion of the other from a determined set of points in the plane of a given quadrilateral to the whole plane.

✉ **Mr. Dimitar Oparlakov**
Student
Mathematics High School – Varna
Varna, Bulgaria
E-mail: dimitar_oparlakov@abv.bg