

НЯКОИ ТИПОВЕ ЗАДАЧИ СЪС СИМЕТРИЧНИ ЧИСЛА

Росен Николаев, Танка Милкова, Радан Мирянов
Икономически университет – Варна

Резюме. В статията се разглеждат т. нар. „симетрични“ числа и авторите изследват част от разнообразните им свойства. Поставени са редица интересни въпроси и задачи за въпросните числа, като са решени няколко конкретни примера. Предложени са и съответни техни обобщения. Изследването може да бъде основа за създаване на множество други задачи, които да бъдат използвани на математически олимпиади и състезания, както и при подготовката за такива.

Keywords: symmetric number; digit; problem; problem solving

Когато се наложи да бъдат съставяни задачи за различни математически състезания и олимпиади, често авторите се стремят да конструират задачи, свързани с конкретната година, в която се провежда състезанието. Така например годината 2018 е свързана с едно четирицифрено число, което се разлага само на два прости множителя: $2018 = 2 \cdot 1009$ (числото 1009 е просто). Могат да бъдат формулирани различни твърдения, които са верни за всяко естествено число n , и в конкретна задача да се избере стойност $n = 2018$. По-интересни са твърденията, които са свързани със спецификата на конкретно число. На пръв поглед, специфика за числото 2018 не съществува. Опитвайки различни възможности, авторите на настоящата статия откриха например, че 2018 е сума от два точни квадрата (оставяме на читателя сам да ги намери).

Под симетрично на дадено число ще разбираме числото, записано със същите цифри в обратен ред. Понякога такива числа се наричат огледални, но тук ще използваме първото наименование. Пример на симетрични числа са 125 и 521. Симетричното число на 2018 е 8102. Тъй като целта ни е да стигнем до подходящо твърдение за 2018, ще разгледаме сумата 10 120 на 2018 и на симетричното му число. Имаме $10120 = 2^3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 23$, което е обнадеждаващ факт, защото разглежданата сума има четири прости делителя и бройката 4 не е малка. От друга страна, разликите между съседните по големина делители са: 3, 6 и 12, като тези числа са последователни членове на геометрична прогресия с частно 2. По-интересна е разликата между 8102 и 2018, която е

точен квадрат. Имаме $8102 - 2018 = 78^2$. Този факт е повод да формулираме следната задача.

Задача 1. Колко е броят на двойките симетрични четирицифрени естествени числа $a = x y z t > b = t z y x$, за които $a - b = 78^2$?

Решение:

$1000x + 100y + 10z + t - 1000t - 100z - 10y - x = 78^2$,
 $x \geq t > 0$ (x може и да е равно на t и въпреки това $a > b$, а $t > 0$, тъй като числото b няма да е четирицифрено, ако $t = 0$). По-нататък имаме:

$$\begin{aligned} 999x + 90y - 90z - 999t &= 78^2 \\ 999(x - t) + 90(y - z) &= 3^2 \cdot 26^2 \quad | : 9 \end{aligned}$$

$$111(x - t) + 10(y - z) = 676 \quad (1)$$

$\Rightarrow x - t$ трябва да е четно

$$\Rightarrow x - t = 2k, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, \quad (2)$$

тъй като, от друга страна, $x \leq 9$ и $t \geq 1 \Rightarrow x - t \leq 8$.

Тогава (1) придобива вида

$$222k + 10(y - z) = 676 \quad | : 2$$

$$111k + 5(y - z) = 338 \Leftrightarrow 111k - 338 = 5(z - y),$$

т.е. $111k - 338$ трябва да се дели на 5. От възможните стойности k от (2) до решение стигаме само при $k=3$. Така получаваме следните две зависимости:

$$x - t = 6 \text{ и } y - z = 1.$$

Ако положим $t = i$, то $x = 6 + i$ и $i = 1, 2, 3$, защото $t \geq 1$ и $x \leq 9$.

Ако положим $z = j$, то $y = 1 + j$ и $j = 0, 1, 2, 3, \dots, 8$, защото $z \geq 0$, а $y \leq 9$.

Тогава всички двойки симетрични четирицифрени естествени числа са:
 $\underline{6 + i \ 1 + j \ j \ i}$ и $\underline{i \ j \ 1 + j \ 6 + i}$, където $i = 1 \div 3$; $j = 0 \div 8$. Общият им брой е $3 \cdot 9 = 27$.

Въз основа на горната задача могат да бъдат конструирани редица други, например следната:

Задача 2. Ако $a = x y z t$ и $b = t z y x$, където $a \geq b$ са две симетрични естествени числа, то колко е минимумът (максимумът) на сбора от цифрите им, ако $a - b = 78^2$.

Решение: $x \geq t > 0$. Първият начин, по който можем да решим задачата, е като не използваме методиката за решаване на първата задача. Тогава стигаме до: $2x + 2y + 2z + 2t \rightarrow \min(\max)$, при условие

$999(x - t) + 90(y - z) = 78^2$ и за да се реши тази задача, трябва да се премине през етапа на решаване на задача 1.

Сега ще решим задача 2, използвайки вече резултатите от задача 1.

Сумата от цифрите на двете симетрични числа е:

$$6 + i + 1 + j + j + i + i + j + 1 + j + 6 + i = 14 + 4i + 4j = A.$$

Имайки предвид, че $i \in \{1, 2, 3\}$ и $j \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 8\}$, то

$$\max A = 14 + 4.3 + 4.8 = 58,$$

$$\text{а } \min A = 14 + 4.1 + 4.0 = 18.$$

Максимумът се получава при $i = 3$ и $j = 8$, т.е. за двойката симетрични четирицифрени числа 9983 и 3899, а минимумът – при $i = 1$ и $j = 0$, т.е. двойката симетрични числа е 7101 и 1017.

Изхождайки от това решение, може да бъде формулирана и друга задача (при условията на задача 2).

Задача 3. Колко е разликата на максимума на сумата от цифрите на a и b и минимума на сумата от цифрите на a и b . Ясно е, че отговорът, имайки предвид решението на предходната задача, е 40.

Разбира се, могат да бъдат формулирани и други задачи, свързани с тематиката в настоящата статия. Например за самостоятелни разсъждения поставяме на вниманието на читателя следните две задачи.

Задача 4. При условията от задача 2 да се намери минимумът на сумата от квадратите на цифрите на числата a и b .

Задача 5. При условията от задача 2, колко са на брой възможните двойки (a, b) , така че сумата от цифрите на a и b да е равна на 22?

Впоследствие решихме да разширим тази конкретна задача (под конкретна нямаме предвид, че разглеждахме квадрата на числото 78) и стигнахме до идеята да търсим:

1) броя n на всички числа $C_n \in N_0$, такива че $a - b = C_n^2$, където a и b са симетрични четирицифрени числа ($a \geq b$);

2) за всяко C_n колко е възможният брой на симетричните двойки четирицифрени числа a и b ($a \geq b$), така че $a - b = C_n^2$. По отношение на първия въпрос открихме, че $n = 7$ (едно от числата $C_n = 0$, например $1001 - 1001 = 0^2$). Като изключим второто, за което знаем, че е 78, как са открити другите пет, оставяме за следваща статия по две причини:

1. читателите сами да положат усилия и да опитат да ги открият, изхождайки от базата, която сме дали в настоящата статия;

2. могат да бъдат използвани като олимпийски задачи в бъдеще. По отношение на второто сме открили броя на вариантите за всяко едно от тези 7 числа, но който открие което и да е от тях, използвайки методиката, която е описана в решението на първата задача, може да стигне до отговора на този въпрос.

Тук можем да подскажем само, че числото C_n трябва да бъде от вида $3k$, т.е. $C_n^2 = 9.k^2$, тъй като

$$A - B = 9.[111.(x - t) + 10.(y - z)].$$

Друго, с което бихме желали да допълним изложението в настоящата статия, е да дадем пример за число C , което, макар да е от вида $3k$, но за него да не съществува двойка симетрични положителни четирицифрени числа a и b ($a \geq b$), така че $a - b = C^2$.

Задача 1⁴. Колко е броят на двойките симетрични четирицифрени естествени числа $a = xyzt > b = tzyx$, такива, че $a - b = 39^2$.

$$\text{Решение: } 999(x - t) + 90(y - z) = 3^2 \cdot 13^2 \mid : 9$$

$$111.(x - t) + 10(y - z) = 169.$$

Става ясно, че $x - t$ трябва да е нечетно, т.е.

$$x - t = 2l + 1, \quad l = 0, 1, 2, 3 \quad (x - t \leq 8)$$

$$\text{Тогава } 111.(2l + 1) + 10.(y - z) = 169$$

$$222.l - 58 = 10.(z - y) \mid : 2$$

$$111.l - 29 = 5.(z - y).$$

Лявата страна трябва да се дели на 5, което не се изпълнява за нито едно $l = 0, 1, 2, 3$. Следователно отговорът на въпроса в задачата е нула.

Числа като 39, за които не съществуват двойки симетрични четирицифрени естествени числа с разлика, равна на техния квадрат, са в изобилие. Подобни задачи също са подходящи за различни турнири и олимпиади.

Предложената методика ще бъде приложена в следващото изложение за:

А) едноцифрени числа;

Б) двуцифрени числа;

В) трицифрени числа.

Задача 6. Колко е броят на двойките едноцифрени симетрични неотрицателни числа a и b ($a \geq b$), такива че $a - b$ е точен квадрат.

Решение: А) За едноцифрените неотрицателни числа a симетричното е самото число a . Всички неотрицателни едноцифрени числа са 0, 1, 2, ..., 9, т.е. $a = 0 \div 9$ и за всяко $a = 0 \div 9$ $a - a = 0^2$. Оттук следва, че има единствено неотрицателно число (числото 0), чийто квадрат е равен на две симетрични едноцифрени числа и всичките варианти са 10.

$$\text{Б) } a = \overline{xy}, \quad b = \overline{yx}, \quad x \geq y > 0, \quad a \geq b > 0 \Rightarrow x \geq y$$

$$\text{и при } x = y, \quad a = b,$$

$$a - b = 10x + y - 10y - x = 9x - 9y = C^2 \Rightarrow$$

числото C трябва да е от вида $3k \Rightarrow 9x - 9y = 9k^2, x - y = k^2 \Rightarrow$
 1) $x - y = 0 (k = 0)$; 2) $x - y = 1 (k = 1)$; 3) $x - y = 4 (k = 2)$; 4)
 $x - y = 9 (k = 3)$.

Случай 4) е невъзможен, тъй като $\max(x - y) = 8 (x \leq 9, y \geq 1) \Rightarrow$ от
 случай 1) имаме 9 възможности $(x, y) = (1, 1); (2, 2); \dots; (9, 9)$. По отношение на
 случай 2) имаме следната възможност.

Нека $y = i, x = 1 + i, i = 1 \div 8 \Rightarrow 8$ възможности. Що се отнася за случай 3), ако
 $y = i$, то $x = 4 + i, i = 1 \div 5$, т.к. $y \geq 1$, а $x \leq 9$ и възможностите са 5.

Ако трябва да обобщим за Б), има три такива числа за C :

– 0 с девет възможности;

– 3 с осем възможности;

– 6 с пет възможности, всяка от които е описана в предходните редове на
 изследването.

В) $a = xyz; b = zyx, x \geq z > 0, a - b = 99x - 99z = c \Rightarrow c = 3k.$

$$99x - 99z = 9.k^2 \mid : 9$$

$$11x - 11z = k^2 \Rightarrow k = 11l$$

$$11(x - z) = 11^2.l^2 \mid : 11$$

$$x - z = 11.l^2,$$

но $x - z \leq 8 \Rightarrow l = 0 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow c = 0$

и всички възможности са $(1, 1); (2, 2); \dots; (9, 9) \Rightarrow 9$ е техният брой. Но y може
 да бъде всяка цифра от 0 до 9, откъдето получаваме, че възможностите са
 $10 \Rightarrow 9.10 = 90$ са всички възможности за единственото число $C=0$ в случая В).

В заключение ще направим следните изводи.

1. Разглежданият тип задачи в настоящата статия може да бъде генератор на множество други задачи, които могат да бъдат предлагани на редица конкурси и олимпиади.
2. Настоящите изследвания могат да служат за основа, способстваща за конструиране на подходящи олимпийски задачи в областта на по-широк обсега от тук засегнатия.
3. Разгледаната проблематика може да даде идеи на редица изследователи да разширят обсега, от научна гледна точка, на своето развитие.
4. Предложената методика може да помогне при търсенето на зависимости от този вид числа в случая, когато те са петзначни, шестзначни и многозначни.

REFERENCES/ЛИТЕРАТУРА

- Siderov, P. (2015). *Theory of numbers*. Sofia: Vedi. [Сидеров, П. (2015). *Теория на числата*. София: Веди.]
- Andrescu, T., D. Andrica & I. Cucurezeanu (2010). *An Introduction to Diophantine Equations*, Birkhauser, EC.

SOME TYPES OF PROBLEMS WITH SYMMETRIC NUMBERS

Abstract. The so called “symmetric” numbers are considered in the paper and the authors study some of their various properties. Several interesting questions and problems for numbers of that kind are formulated and some concrete examples are solved. Corresponding generalizations of them are proposed. The investigation could be a base for creating many other problems, which could be used in mathematical Olympiads and competitions, as well as for the preparation for them.

✉ ¹Prof. Dr. Rosen Nikolaev, ²Dr. Tanka Milkova, Assoc. Prof.
³Dr. Radan Miryanov, Assist. Prof.
University of Economics – Varna
77, Kniaz Boris I Blvd.
9002 Varna, Bulgaria
E-mail: ¹ nikolaev_rosen@ue-varna.bg
² tankamilkova@ue-varna.bg
³ miryanov@ue-varna.bg