

ПОЛИНОМИ ОТ ЧЕТВЪРТА СТЕПЕН С КОРЕНИ ВЪВ ВЪРХОВЕТЕ НА УСПОРЕДНИК

¹⁾Сава Гроздев, Веселин Ненков

¹⁾ Висше училище по застраховане и финанси – София

Резюме. Изведена е една геометрична връзка между корените на полином от четвърта степен на комплексна променлива с комплексни коефициенти и корените на неговата производна. Разгледани са някои приложения на получените резултати за полиноми на реална променлива с реални коефициенти. Накрая е описана компютърна реализация на полиномите на реална променлива.

Keywords: polynomial; roots of polynomial; parallelogram; rhombus; rectangle; ellipse; focus; centre

В следващите редове ще разгледаме една забележителна геометрична връзка между корените на един вид полиноми от четвърта степен и корените на съответните им производни. Тази връзка е определена от една специална елипса.

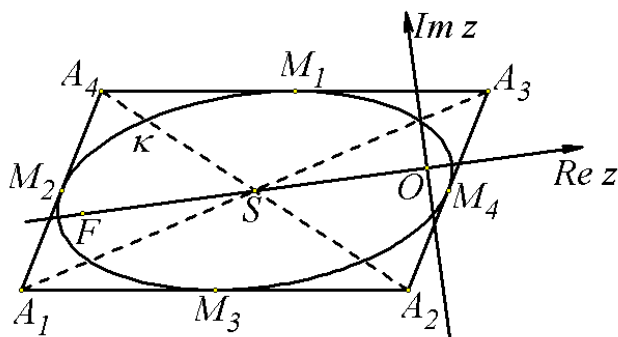
1. Полиноми с еднаква геометрия на корените си. Нека точките $z'_1, z'_2, \dots, z'_k$ са разположени в комплексната равнина, така че да образуват определена геометрична фигура. Тогава линейната трансформация $z = az' + b$ преобразува тези точки в точките $z_1, z_2, \dots, z_k$, които образуват геометрична фигура, подобна на фигурата, определена от $z'_1, z'_2, \dots, z'_k$. Ако полиномът $P_0(z)$ има корени в точките $z_1, z_2, \dots, z_k$, то при трансформацията $z = az' + b$ той преминава в полином $P(z')$, който има корени в точките $z'_1, z'_2, \dots, z'_k$. Обратно, ако полиномът $P(z')$ има корени в точките $z'_1, z'_2, \dots, z'_k$, то могат да се определят подходящи стойности на комплексните числа a и b , при които трансформацията $z = az' + b$ преобразува $P_0(z)$ в $P(z')$. Освен това според формулата за намиране на производна на сложна функция се получава $P'(z') = \frac{dP_0(az' + b)}{dz'} = aP'_0(z)$. Това означава, че корените на $P'_0(z)$ се преобразуват в корените на $P'(z')$. От по-горе казаното следва,

че корените на полиномите $P'_0(z)$ и $P'(z')$ образуват подобни геометрични фигури. Нещо повече, те принадлежат на подобни фигури. Така получаваме следното твърдение.

Лема. Ако корените на два полинома от една и съща степен образуват подобни геометрични фигури, то и корените на техните производни образуват подобни геометрични фигури.

За множеството на всички полиноми, корените на които образуват подобни фигури, ще казваме, че образува клас от полиноми с еднаква геометрия. От лемата следва, че производните на полиномите, принадлежащи на клас от полиноми с еднаква геометрия, образуват клас от полиноми с еднаква геометрия. Освен това, ако нормиран полином (такъв, на който коефициентът пред най-високата степен е равен на 1) и ненормиран полином (такъв, на който коефициентът пред най-високата степен е различен от 1) от една и съща степен имат едни и същи корени, техните производни също имат едни и същи корени. Затова от всички полиноми, принадлежащи на клас от полиноми с еднаква геометрия, е достатъчно да се изследва само някой нормиран полином, за да се определи геометрията на класа, определен от производните на полиномите от този клас.

2. Елипса, свързваща корените на полином от четвърта степен и корените на неговата производна. В комплексната равнина разглеждаме елипса κ с център S , фокуси O и F , числен ексцентритет e и фокален параметър p . Нека M_1, M_3 и M_2, M_4 са две двойки диаметрално противоположни точки върху κ . През точките M_1, M_2, M_3 и M_4 построяваме съответно допирателни A_3A_4, A_1A_2, A_4A_1 и A_2A_3 към κ . Така получаваме описан около κ успоредник $A_1A_2A_3A_4$. Освен това точките M_1, M_2, M_3 и M_4 са среди съответно на страните A_3A_4, A_4A_1, A_1A_2 и A_2A_3 , а центърът S на κ е пресечната точка на диагоналите на $A_1A_2A_3A_4$.



Фигура 1

Спрямо Гаусовата координатна система K_0 от фиг. 1, както е показано в (Nenkov, 1998), афиксите на точките M_j , A_j ($j=1,2,3,4$) и S се изразяват съответно с формулите

$$\begin{aligned}
 (1) \quad m_1 &= \frac{2p}{et_1^2 + 2t_1 + e}, \quad m_2 = \frac{2p}{et_2^2 + 2t_2 + e}, \quad m_3 = \frac{2p}{et_3^2 + 2t_3 + e}, \\
 m_4 &= \frac{2p}{et_4^2 + 2t_4 + e}, \\
 (2) \quad a_1 &= \frac{2p}{et_2t_3 + t_2 + t_3 + e}, \quad a_2 = \frac{2p}{et_3t_4 + t_3 + t_4 + e}, \\
 a_3 &= \frac{2p}{et_4t_1 + t_4 + t_1 + e}, \quad a_4 = \frac{2p}{et_1t_2 + t_1 + t_2 + e}, \\
 (3) \quad s &= \frac{pe}{e^2 - 1}.
 \end{aligned}$$

където $|t_1| = |t_2| = |t_3| = |t_4| = 1$.

Тъй като $A_1A_2 \parallel A_3A_4$ и $A_2A_3 \parallel A_4A_1$, то са изпълнени съответно равенствата

$(a_1 - a_2)(\bar{a}_3 - \bar{a}_4) = (\bar{a}_1 - \bar{a}_2)(a_3 - a_4)$ и $(a_2 - a_3)(\bar{a}_4 - \bar{a}_1) = (\bar{a}_2 - \bar{a}_3)(a_4 - a_1)$. Като се заместят равенствата (2) в последните две, след известни преобразувания се получават съответно $et_1t_3 + t_1 + t_3 + 1 = 0$ и $et_2t_4 + t_2 + t_4 + 1 = 0$. Оттук следват равенствата

$$(4) \quad t_3 = -\frac{t_1 + e}{et_1 + 1}, \quad t_4 = -\frac{t_2 + e}{et_2 + 1}.$$

Заместването на (4) в (1) и (2) води до следните изразявания на

m_j и a_j ($j=1,2,3,4$):

$$\begin{aligned}
 (5) \quad m_1 &= \frac{2p}{et_1^2 + 2t_1 + e}, \quad m_2 = \frac{2p}{et_2^2 + 2t_2 + e}, \\
 m_3 &= \frac{2p}{(e^2 - 1)} \cdot \frac{(et_1 + 1)^2}{et_1^2 + 2t_1 + e}, \quad m_4 = \frac{2p}{(e^2 - 1)} \cdot \frac{(et_2 + 1)^2}{et_2^2 + 2t_2 + e},
 \end{aligned}$$

$$(6) \quad \begin{aligned} a_1 &= \frac{2p}{e^2-1} \cdot \frac{et_1+1}{t_1-t_2}, a_2 = \frac{2p}{e^2-1} \cdot \frac{(et_1+1)(et_2+1)}{et_1t_2+t_1+t_2+e}, \\ a_3 &= \frac{2p}{e^2-1} \cdot \frac{et_2+1}{t_2-t_1}, a_4 = \frac{2p}{et_1t_2+t_1+t_2+e}. \end{aligned}$$

Тъй като точката M_3 е среда на страната A_1A_2 , то е изпълнено равенството $a_1 + a_2 = 2m_3$. След заместване на съответните изрази от (5) и (6) и известни елементарни преобразувания получаваме следващата зависимост между t_1 , t_2 и e :

$$(7) \quad e^2t_1^2t_2^2 + 2et_1^2t_2 + 2et_1t_2^2 + (2-e^2)t_1^2 + (2-e^2)t_2^2 + 4e^2t_1t_2 + 2et_1 + 2et_2 + e^2 = 0.$$

От равенствата (3), (5), (6) и (7) се получават

$$(8) \quad \begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= 4s, a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + a_2a_3 + a_2a_4 + a_3a_4 = 4s^2, \\ a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 + a_2a_3a_4 + a_3a_4a_1 &= 0. \end{aligned}$$

Сега да разгледаме нормирания полином от четвърта степен $P_0(z)$ на комплексна променлива z с комплексни коефициенти, който има корени във върховете на успоредника $A_1A_2A_3A_4$, т.е. $P_0(a_1) = P_0(a_2) = P_0(a_3) = P_0(a_4) = 0$. От формулите на Виет и равенствата (8) следва, че $P_0(z)$ се представя във вида $P_0(z) = z^4 - 4sz^3 + 4s^2z^2 + a_1a_2a_3a_4$. Това равенство означава, че производната на $P_0(z)$ е $P'_0(z) = 4z^3 - 12sz^2 + 8s^2z$. Следователно корените на уравнението $P'_0(z) = 0$ са $z_1 = 0$, $z_2 = s$ и $z_3 = 2s$.

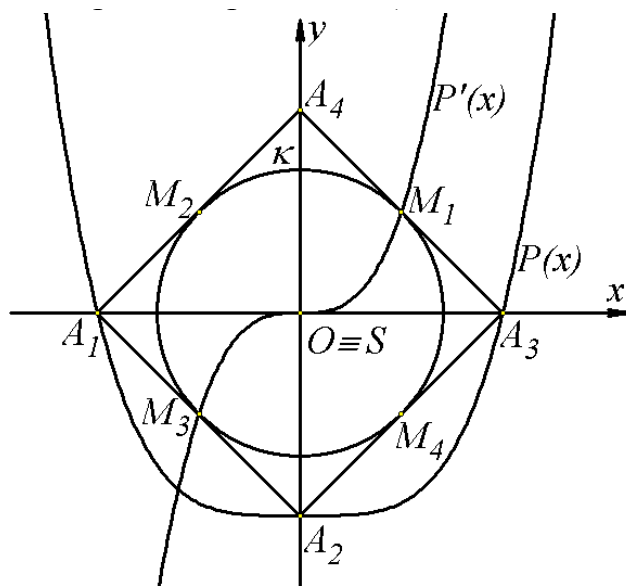
Геометричната интерпретация на корените на $P'_0(z)$ е следната: корените $z_1 = 0$ и $z_3 = 2s$ са съответно фокусите O и F на κ , а $z_2 = s$ е центърът S на κ .

Като използваме лемата и коментарите след нея, получаваме следната

Теорема. Ако корените на един полином $P(z)$ от четвърта степен на комплексна променлива с комплексни коефициенти се намират във върховете на успоредник P , то корените на производната $P'(z)$ на $P(z)$ се намират във фокусите и центъра на елипсата, допираща се до страните на $A_1A_2A_3A_4$ в техните среди.

Следва да отбележим два специални случая на току-що формулираната теорема.

3. Полиноми с корени във върховете на квадрат. Ако $P(z) = az^4 + f$, $a \neq 0$, $f \neq 0$, корените на $P(z)$ са във върховете на квадрат и елипсата κ е вписаната му окръжност. Корените на $P'(z)$ съвпадат с центъра на κ . От теоремата следва, че само полиномите, които имат корени във върховете на квадрат при разглежданите условия, имат производни с троен корен. Следователно всеки такъв полином с помощта на подходяща трансформация се свежда до полином от последния вид. На фиг. 2 са представени полиномът $P(x) = x^4 - 1$ и неговата производна $P'(x)$ (тук x е реална променлива).



Фигура 2

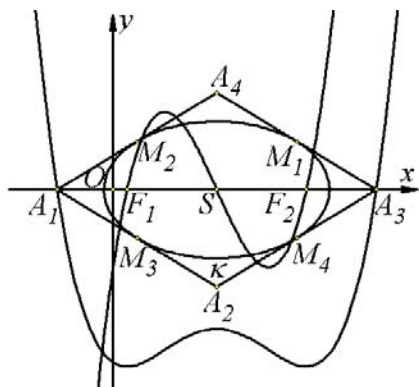
4. Полиноми с реални коефициенти на реална променлива. Нека сега $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + f$, $a \neq 0$ е полином от четвърта степен на реална променлива с реални коефициенти. В този случай можем да представим една геометрична интерпретация на доказаната теорема. За да бъде приложена теоремата към разглеждания полином, той трябва да има един от следните два вида:

1) $P(x)$ има два реални и два комплексно спрегнати корена. Това означава, че успоредникът е ромб;

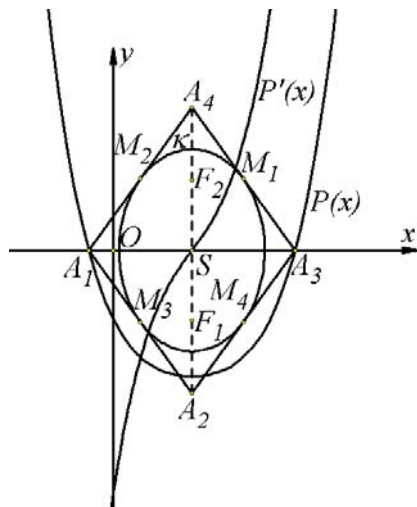
2) $P(x)$ има две двойки комплексно спрегнати корени. Това означава, че успоредникът е правоъгълник.

В случай 1) графиката на $P(x)$, като образ на функция на реална променлива, минава само през два противоположни върха на ромба, които отговарят на двата реални корена на $P(x)$. Графиката на $P'(x)$ е кубична парабола с център на симетрия в пресечната точка S на диагоналите на $A_1A_2A_3A_4$, която винаги лежи върху абсцисната ос.

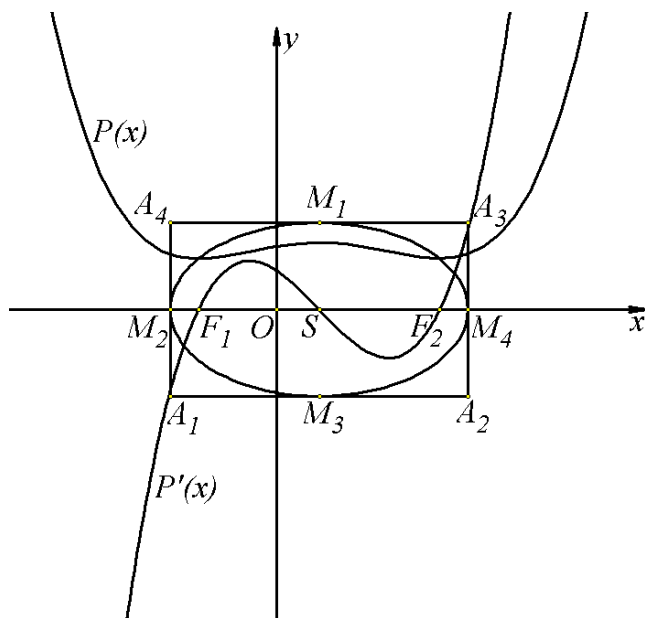
Елипсата κ , допираща се до страните на $A_1A_2A_3A_4$ в техните среди, има за фокуси точки, лежащи върху абсцисната ос или върху диагонала на $A_1A_2A_3A_4$, който е успореден на ординатната ос. В първия случай кубичната парабола $P'(x)$ пресича абсцисната ос в центъра S и фокусите F_1 и F_2 на κ . В този случай корените на $P'(x)$ са реални и съвпадат с реалните точки S , F_1 и F_2 (фиг. 3). Във втория случай кубичната парабола $P'(x)$ пресича абсцисната ос само в точката S и не минава през точките F_1 и F_2 . В този случай точките F_1 и F_2 съответстват на нереални корени на $P'(x)$. Точката S обаче винаги съответства на реален корен и затова графиката на $P'(x)$ винаги минава през нея (фиг. 4).



Фигура 3



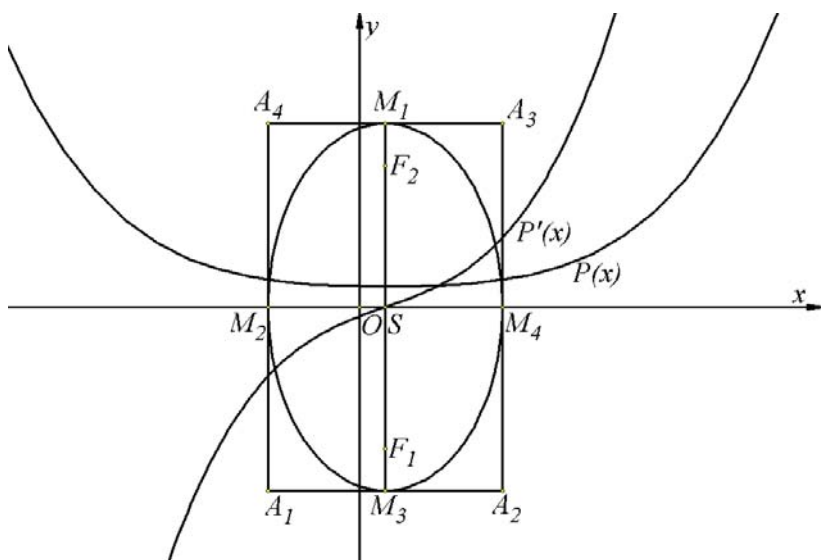
Фигура 4



Фигура 5

В случай 2) графиката на $P(x)$, като образ на функция на реална променлива, в общия случай не минава през нито един от върховете на правоъгълника $A_1A_2A_3A_4$. Графиката на $P'(x)$ е кубична парабола с център на симетрия в пресечната точка S на диагоналите на $A_1A_2A_3A_4$, която винаги лежи върху абсцисната ос.

Елипсата κ , допираща се до страните на $A_1A_2A_3A_4$ в техните среди, има за фокуси точки, лежащи върху абсцисната ос или върху права, успоредна на ординатната ос. В първия случай кубичната парабола $P'(x)$ пресича абсцисната ос в центъра S и фокусите F_1 и F_2 на κ . В този случай корените на $P'(x)$ са реални и съвпадат с реалните точки S , F_1 и F_2 на κ (фиг. 5). Във втория случай кубичната парабола $P'(x)$ пресича абсцисната ос само в точката S и не минава през точките F_1 и F_2 . В този случай точките F_1 и F_2 съответстват на нереални корени на $P'(x)$. Точката S обаче винаги съответства на реален корен и затова графиката на $P'(x)$ винаги минава през нея (фиг. 6).



Фигура 6

5. Компютърна реализация на случаите с реални полиноми. Случаите с реален полином $P(x)$ могат да се демонстрират нагледно с програмата The Geometer's Sketchpad. В случай 1) върху абсцисната ос на координатна система избираме две произволни точки A_1 и A_3 . Върху симетралата на отсечката A_1A_3 избираме точка A_2 , след което построяваме нейната симетрична A_4 спрямо абсцисната ос. По този начин определяме върховете на ромб $A_1A_2A_3A_4$, в които някой полином $P(x)$ трябва да има корени. По-нататък построяваме елипсата κ , допираща се до отсечките A_3A_4 , A_4A_1 , A_1A_2 и A_2A_3 в съответните им среди M_1 , M_2 , M_3 и M_4 . След това построяваме фокусите на κ .

За да построим полином $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + f$, първо определяме координатите x_{A_1} , x_{A_2} , y_{A_2} и x_{A_3} на точките A_1 , A_2 и A_3 . След това задаваме произволна стойност на коефициента a , а другите коефициенти пресмятаме по следващите формули:

$$b = -(x_{A_1} + 2x_{A_2} + x_{A_3})a, \quad c = (2x_{A_1}x_{A_2} + x_{A_1}x_{A_3} + 2x_{A_2}x_{A_3} + x_{A_2}^2 + y_{A_2}^2)a,$$

$$d = -[2x_{A_1}x_{A_2}x_{A_3} + (x_{A_1} + x_{A_3})(x_{A_2}^2 + y_{A_2}^2)]a, \quad f = x_{A_1}x_{A_3}(x_{A_2}^2 + y_{A_2}^2)a.$$

Накрая дефинираме функцията $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + f$ и намираме нейната производна $P'(x)$.

Построяваме графиките на $P(x)$ и $P'(x)$. Кривата $P(x)$ минава през точките A_1 и A_3 . В общия случай графиката на $P(x)$ не минава през точките A_2 и A_4 , защото в тях не се получават реални корени на уравнението $P(x) = 0$. (На фиг. 2 графиката минава през един от върховете. Това се дължи на факта, че точката $z = -i$ е корен на полинома $z^4 - 1$, а тя съответства на точката $(0, -1)$). Ако фокусите F_1 и F_2 лежат на абсцисната ос, кубичната парабола $P'(x)$ минава през F_1 , F_2 и S (фиг. 3). Ако фокусите F_1 и F_2 лежат на права, успоредна на ординатната ос, кубичната парабола $P'(x)$ не минава през F_1 и F_2 , защото корените на уравнението $P'(x) = 0$ не са реални, но минава през S (фиг. 4).

Когато променяме положенията на A_1 , A_2 и A_3 , така че фокусите F_1 и F_2 да лежат върху абсцисната ос, се наблюдава, че $P(x)$ и $P'(x)$ се променят, но $P'(x)$ винаги минава през точките F_1 , F_2 и S .

В случай 2) спрямо дадена координатна система избираме произволна точка A_1 , а точката A_2 определяме върху правата през A_1 , успоредна на абсцисната ос. След това намираме точките A_4 и A_3 като симетрични образи съответно на точките A_1 и A_2 спрямо абсцисната ос. По този начин определяме върховете на правоъгълник $A_1A_2A_3A_4$, в които някой полином $P(x)$ трябва да има корени. По-нататък построяваме елипсата κ , допираща се до отсечките A_3A_4 , A_4A_1 , A_1A_2 и A_2A_3 в съответните им среди M_1 , M_2 , M_3 и M_4 . След това построяваме фокусите на κ .

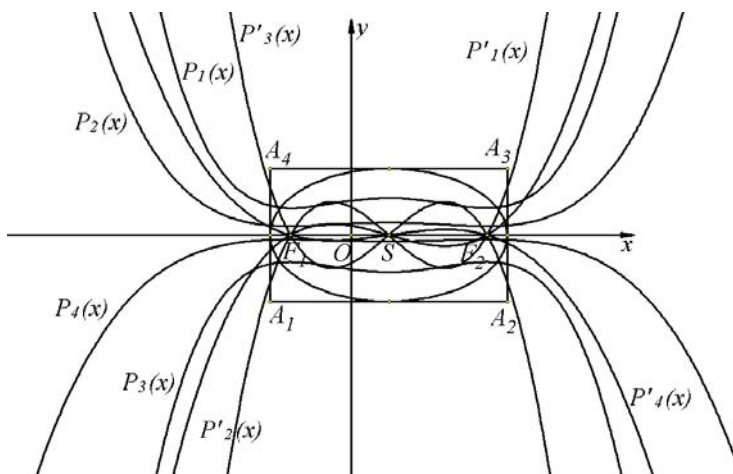
За да построим полином $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + f$, първо определяме координатите x_{A_1} , y_{A_1} и x_{A_2} на точките A_1 и A_2 . След това задаваме произволна стойност на коефициента a , а другите коефициенти пресмятаме по следващите формули:

$$b = -2(x_{A_1} + x_{A_2})a, \quad c = (x_{A_1}^2 + 2y_{A_1}^2 + x_{A_2}^2 + 4x_{A_1}x_{A_2})a, \\ d = -2[x_{A_1}(x_{A_2}^2 + y_{A_2}^2) + x_{A_2}(x_{A_1}^2 + y_{A_1}^2)]a, \quad f = (x_{A_1}^2 + y_{A_1}^2)(x_{A_2}^2 + y_{A_2}^2)a.$$

Накрая дефинираме функцията $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + f$ и намираме нейната производна $P'(x)$. Построяваме графиките на $P(x)$ и $P'(x)$. Кривата $P(x)$, в общия случай, не минава през никоя от точките A_1 , A_2 , A_3 и A_4 , защото в тях не се получават реални корени на уравнението $P(x) = 0$. Ако фокусите F_1 и F_2 лежат на абсцисната ос, кубичната парабола $P'(x)$ минава през F_1 , F_2 и S (фиг. 5). Ако фокусите F_1 и F_2 лежат на права, успоредна на ординатната ос, кубичната парабола $P'(x)$ не минава през F_1 и F_2 , защото корените на уравнението $P'(x) = 0$ не са реални, но минава през S (фиг. 6).

Когато променяме положенията на A_1 и A_2 , така че фокусите F_1 и F_2 да лежат върху абсцисната ос, се наблюдава, че $P(x)$ и $P'(x)$ се променят, но $P'(x)$ винаги минава през точките F_1 , F_2 и S .

От доказаната теорема се вижда още, че производните на безброй много различни полиноми от четвърта степен трябва да имат една и съща тройка корени. Това означава, че ако $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$ и $P_4(x)$ са реални полиноми с корени във върховете на един и същ успоредник $A_1A_2A_3A_4$, то графиките на техните производни ще минават през постоянните точки F_1 , F_2 и S . Това се реализира, като успоредникът $A_1A_2A_3A_4$ се остави постоянен, а за параметъра a се дават различни стойности (фиг. 7).



Фигура 7

REFERENCES/ЛИТЕРАТУРА

- Balk, M., G. Balk & A. Poluhin (1988). *Real applications of imaginary numbers*. Kiev: Radjansk school [Балк, М., Г. Балк & А. Полухин (1988). *Реальные применения мнимых чисел*. Киев: Радянська школа.]
- Genov, G, S Mihovski & T. Molov (1991). *Algebra with Number theory*. Sofia: Nauka i Izkustvo [Генов, Г., С. Миховски & Т. Моллов (1991). *Алгебра с теория на числата*. София: Наука и изкуство.]
- Markushevich, A. & L. Markushevich (1980). *Introduction to the theory of Analytic functions*. Sofia: Nauka i Izkustvo [Маркушевич, А. & Л. Маркушевич (1980). *Увод в теорията на аналитичните функции*. София: Наука и изкуство.]

- Nenkov, V. (1998). Conics inscribed in a triangle. *Mathematics and Informatics*, 5, 54 – 59 [Ненков, В. (1998). Конични сечения, вписани в триъгълник. *Математика и информатика*, 5, 54 – 59.]
- Nenkov, V. (2010). A relation between non-real roots and and a real ellipse. *Mathematics Plus*, 2, 61 – 63 [Ненков, В. (2010). Една връзка между нереални корени и реална елипса, *Математика плюс*, 2, 61 – 63.]

POLYNOMIALS OF FOURTH DEGREE WITH ROOTS IN THE VERTICES OF A PARALLELOGRAM

Abstract. It is deduced a geometric relation between the roots of a complex polynomial of fourth degree with a complex variable and the roots of its derivatives. Some applications of the obtained results are presented considering real polynomials with a real variable. Finally, a computer realization of the real polynomials is described.

✉ **Prof. Sava Grozdev, DSc.**

University of Finance, Business and Entrepreneurship
1, Gusla St.
1618 Sofia, Bulgaria
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

✉ **Dr. Veselin Nenkov, Assoc. Prof.**

45, Stoyan Balgarencheto St.
5662 Beli Osam, Bulgaria
E-mail: vnenkov@mail.bg