

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 5, 2017

Задача 1. Да се докаже, че при $x \neq 1$ и $n \in \mathbb{N}$ са изпълнени равенствата:

$$\begin{aligned} \text{а) } \sum_{k=1}^n kx^{k-1} &= \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}; \\ \text{б) } \sum_{k=1}^n (2k-1)x^{k-1} &= \frac{(2n-1)x^{n+1} - (2n+1)x^n + x + 1}{(1-x)^2}; \\ \text{в) } \sum_{k=1}^n k^2 x^{k-1} &= \frac{-n^2 x^{n+2} + (2n^2 + 2n - 1)x^{n+1} - (n+1)^2 x^n + x + 1}{(1-x)^3}. \end{aligned}$$

Слави Харалампиев и Румяна Несторова, Враца

$$\begin{aligned} \text{Решение: а) } \sum_{k=1}^n kx^{k-1} &= \left(\sum_{k=0}^n x^k \right)' = \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x} \right)' = \frac{-(n+1)x^n(1-x) + (1-x^{n+1})}{(1-x)^2} = \\ &= \frac{-(n+1)x^n + (n+1)x^{n+1} + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}. \\ \text{б) } \sum_{k=1}^n (2k-1)x^{k-1} &= 2 \cdot \sum_{k=1}^n kx^{k-1} - \sum_{k=1}^n x^{k-1} = 2 \cdot \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2} - \frac{1-x^n}{1-x} = \\ &= \frac{2nx^{n+1} - 2(n+1)x^n + 2 - (1-x)(1-x^n)}{(1-x)^2} = \frac{2nx^{n+1} - 2(n+1)x^n + 2 - 1 + x - x^n + x^{n+1}}{(1-x)^2} = \\ &= \frac{(2n-1)x^{n+1} - (2n+1)x^n + x + 1}{(1-x)^2}. \\ \text{в) } \sum_{k=1}^n k^2 x^{k-1} &= 1^2 + 2^2 \cdot x + 3^2 \cdot x^2 + 4^2 \cdot x^3 + \dots + n^2 \cdot x^{n-1} = \left(\sum_{k=1}^n k \cdot x^k \right)' = \\ &= \left(x + 2 \cdot x^2 + 3 \cdot x^3 + 4 \cdot x^4 + \dots + n \cdot x^n \right)' = \left[x \cdot (1 + 2 \cdot x + 3 \cdot x^2 + 4 \cdot x^3 + \dots + n \cdot x^{n-1}) \right]' = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[x \cdot \sum_{k=1}^n kx^{k-1} \right]' = x' \cdot \sum_{k=1}^n kx^{k-1} + x \cdot \left(\sum_{k=1}^n kx^{k-1} \right)' = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2} + x \cdot \left[\frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2} \right]' = \\
 &= \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2} + \\
 &+ x \cdot \frac{(n \cdot (n+1) \cdot x^n - (n+1) \cdot n \cdot x^{n-1}) \cdot (1-x)^2 + 2 \cdot (1-x) \cdot (nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1)}{(1-x)^4} = \\
 &= \frac{(nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1) \cdot (1-x)}{(1-x)^3} + \\
 &+ \frac{(n \cdot (n+1) \cdot x^{n+1} - (n+1) \cdot n \cdot x^n) \cdot (1-x) + 2 \cdot (nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x)}{(1-x)^3} = \\
 &= \frac{-n^2 x^{n+2} + (2n^2 + 2n - 1)x^{n+1} - (n+1)^2 x^n + x + 1}{(1-x)^3}.
 \end{aligned}$$

Задача 2. В остроъгълния триъгълник ABC точката O е такава, че $\sphericalangle OAB = \sphericalangle OCA$ и $\sphericalangle OBA = \sphericalangle OCB$. Ако D е пресечната точка на симетралата на отсечката OC и правата през B , успоредна на OC , да се докаже, че ортогоналните проекции на O върху правите CA , AB , BD и DC са върхове на равнобедрен трапец или правоъгълник.

Хаим Хаимов, Варна

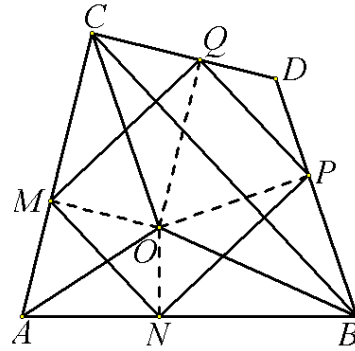
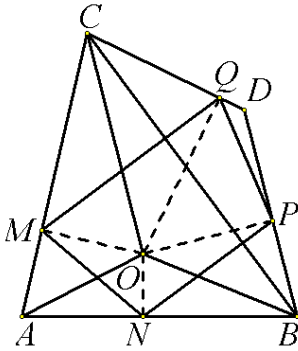
Решение: означаваме проекциите на O върху правите CA , AB , BD и CD съответно с M , N , P и Q . За да докажем твърдението на задачата, е достатъчно да докажем, че $MN = PQ$ и $\sphericalangle NMQ = \sphericalangle MQP$. От условието следва, че $\sphericalangle AOB = 180^\circ - \sphericalangle ACB$. Затова радиусите на описаните окръжности за триъгълниците ABC и ABO са равни. Следователно

$$\frac{AO}{\sin \sphericalangle OBA} = \frac{BC}{\sin \sphericalangle BAC}, \text{ т.е. } BC \cdot \sin \sphericalangle OBA = AO \cdot \sin \sphericalangle BAC.$$

От условието имаме $OD = CD$ и $OC \parallel BD$. Оттук и синусовата теорема за $\triangle BCD$ следва

$BC \cdot \sin \sphericalangle OBA = BC \cdot \sin \sphericalangle OCB = BC \cdot \sin \sphericalangle CBD = CD \cdot \sin \sphericalangle CBD = OD \cdot \sin \sphericalangle CBD$, т.е. $BC \cdot \sin \sphericalangle OBA = OD \cdot \sin \sphericalangle CBD$. От последното и предишното равенство получаваме $AO \cdot \sin \sphericalangle BAC = OD \cdot \sin \sphericalangle CBD$. От-

тук и от синусовата теорема за триъгълниците AMN и PQD следва $MN = AO \cdot \sin \angle MAN = OD \cdot \sin \angle PDQ = PQ$. От друга страна, $\angle NMQ = \angle AMO + \angle QMO = \angle NAO + \angle OCD = \angle ACO + \angle OCD = \angle ACD$ и $\angle MQP = \angle MQO + \angle OQP = \angle MCO + \angle ODP = \angle MCO + \angle DOC = \angle MCO + \angle OCD = \angle ACD$. Така показваме, че $MN = PQ$ и $\angle NMQ = \angle MQP$, с което задачата е решена.



Коментар. Може да се покаже, че точката O лежи върху медианата CT на $\triangle ABC$. Следователно O е пресечната точка на CT и окръжността с радиус, равен на радиуса на описаната за $\triangle ABC$ окръжност, която минава през върховете A и B . Ако разгледаме барицентрични координати спрямо $\triangle ABC$, като $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ и $C(0,0,1)$, разглежданите точки имат следните координатни представяния:

$$O \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a^2 + 2b^2 - c^2}, \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a^2 + 2b^2 - c^2}, \frac{c^2}{2a^2 + 2b^2 - c^2} \right),$$

$$M \left(\frac{a^4 + 3b^4 + c^4 - 4b^2c^2 - 2c^2a^2 + 4a^2b^2}{2b^2(2a^2 + 2b^2 - c^2)}, 0, \frac{a^4 - b^4 + c^4 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2}{2b^2(2a^2 + 2b^2 - c^2)} \right),$$

$$N \left(\frac{3a^2 + b^2 - c^2}{2(2a^2 + 2b^2 - c^2)}, \frac{a^2 + 3b^2 - c^2}{2(2a^2 + 2b^2 - c^2)}, 0 \right),$$

$$P \left(-\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2(2a^2 + 2b^2 - c^2)}, \frac{3a^2 + 5b^2 - 3c^2}{2(2a^2 + 2b^2 - c^2)}, \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a^2 + 2b^2 - c^2} \right),$$

$$D \left(-\frac{a^2}{2a^2 + 2b^2 - c^2}, \frac{a^2 + 2b^2 - c^2}{2a^2 + 2b^2 - c^2}, \frac{2a^2}{2a^2 + 2b^2 - c^2} \right),$$

$$x_Q = -\frac{a^4 + b^4 + c^4 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2 + 2a^2b^2}{2b^2(2a^2 + 2b^2 - c^2)},$$

$$y_Q = \frac{a^6 + 2b^6 - c^6 + 4a^4b^2 + 5a^2b^4 - 5b^4c^2 + 4b^2c^4 + 3c^4a^2 - 3a^4c^2 - 8a^2b^2c^2}{2a^2b^2(2a^2 + 2b^2 - c^2)},$$

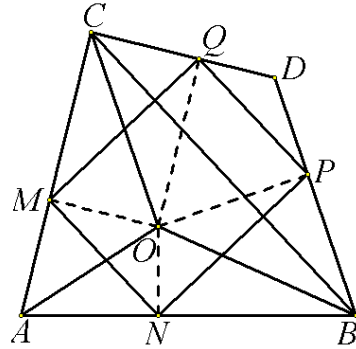
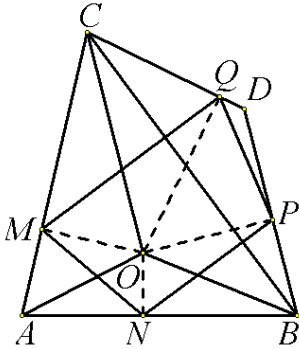
$$z_Q = \frac{-2b^6 + c^6 + 2a^4b^2 + 5b^4c^2 - 4b^2c^4 - 2c^4a^2 + c^2a^4 + 4a^2b^2c^2}{2a^2b^2(2a^2 + 2b^2 - c^2)},$$

където $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.

От тези координати лесно се получава, че MQ и PN са перпендикулярни на страната BC . Освен това, ако S е лицето на $\triangle ABC$, а m_c – дължината на медианата CT , за разстоянията между разглежданите точки се получават равенствата:

$$MN = PQ = \frac{S}{m_c}, \quad PN = \frac{aS}{m_c^2}, \quad QM = \frac{(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 + 2b^2 - c^2)S}{2ab^2m_c^2},$$

$$PM = QN = \frac{S\sqrt{2a^4 + 6b^4 + 2c^4 - 7b^2c^2 - 4c^2a^2 + 8a^2b^2}}{2bm_c^2}.$$



Четириъгълникът $MNPQ$ е правоъгълник тогава и само тогава, когато $QM^2 - PN^2 = 0$. Тъй като

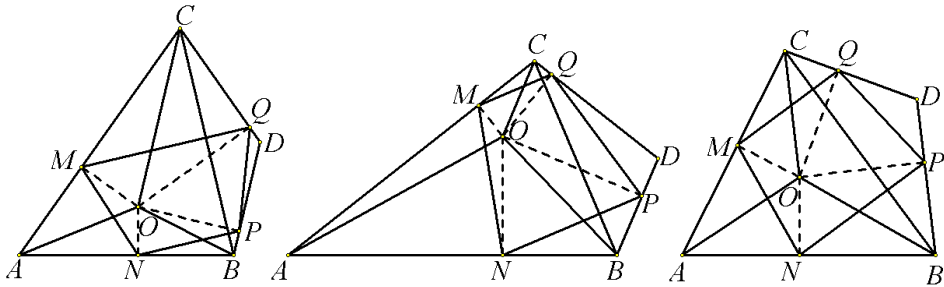
$$QM^2 - PN^2 = \frac{S^2(a^4 + 2b^4 + c^4 - 3b^2c^2 - 2c^2a^2 + a^2b^2)(a^4 + 2b^4 + c^4 - 3b^2c^2 - 2c^2a^2 + 5a^2b^2)}{4a^2b^4m_c^2},$$

то $a^4 + 2b^4 + c^4 - 3b^2c^2 - 2c^2a^2 + a^2b^2 = 0$ или $a^4 + 2b^4 + c^4 - 3b^2c^2 - 2c^2a^2 + 5a^2b^2 = 0$. Второто равенство е изпълнено,

когато $c = \sqrt{4a^2 + 6b^2} \pm \sqrt{b^4 - 8a^2b^2}$. Лесно се вижда обаче, че при такива

стойности на c е изпълнено неравенството $a^2 + b^2 < c^2$. Това означава, че $\sphericalangle ACB$ е тъп и точката O не може да е вътрешна за $\triangle ABC$. Следователно $MNPQ$ е правоъгълник тогава и само тогава, когато е изпълнено равенството $a^4 + 2b^4 + c^4 - 3b^2c^2 - 2c^2a^2 + a^2b^2 = 0$. Любопитно е да се отбележи, че това равенство е в сила при $a = b = c$. Следователно, ако $\triangle ABC$ е равностранен, то четириъгълникът $MNPQ$ е правоъгълник със страни $PN = QM = \frac{c\sqrt{3}}{3}$ и $MN = PQ = \frac{c}{2}$. Освен това е интересно кога правоъгълникът $MNPQ$ е квадрат. Това ще бъде изпълнено, когато $PQ = QM = PN$. Тези равенства са в сила тогава и само тогава, когато $a = \frac{c\sqrt{10}}{4}$ и $b = \frac{3c\sqrt{2}}{4}$. Накрая ще отбележим, че трапецът $MNPQ$ може да е такъв, че една от основите му да е равна на бедрата. Случаят $PN = PQ = MN$ е изпълнен при $c = \sqrt{2(b^2 - a^2)}$, а случаят $QM = PQ = MN$ при

$$c^8 - 2(2a^2 + 3b^2)c^6 + (6a^4 + 18a^2b^2 + 13b^4)c^4 - (4a^6 + 18a^4b^2 + 25a^2b^4 + 12b^6)c^2 + (a^2 + b^2)(a^6 + 5a^4b^2 + 6a^2b^4 + 4b^6) = 0.$$



Задача 3. Точките O , A , A_1 и A_2 в този ред лежат на права l_1 , а точките O , B , B_1 , B_2 в този ред лежат на права l_2 . Нека $OA > OB$, $AA_1 = BB_1$ и $A_1A_2 = B_1B_2$.

а) Да се докаже, че описаните окръжности k , k_1 и k_2 , съответно на триъгълниците OAB , OA_1B_1 и OA_2B_2 , имат втора обща точка M .

б) Ако C , C_1 и C_2 са средите съответно на отсечките AB , A_1B_1 и A_2B_2 , да се докаже, че C , C_1 и C_2 лежат на една права l .

в) Ако $l \cap l_1 = P$, да се определи ъгълът между правите l_1 и MP .

Сава Гроздев, София, и Веселин Ненков, Бели Осъм

Решение: разглеждаме координатна правоъгълна система Oxy , абсцисната ос на която съвпада с правата l_1 и има посоката на $\overrightarrow{OA}$. Въвеждаме означенията $OA = a$, $OB = b$, $AA_1 = BB_1 = n$, $AA_2 = BB_2 = m$ и $\angle AOB = \alpha$. Тогава $A(a, 0)$, $A_1(a + n, 0)$, $A_2(a + m, 0)$, $B(b \cos \alpha, b \sin \alpha)$, $B_1((b + n) \cos \alpha, (b + n) \sin \alpha)$ и $B_2((b + m) \cos \alpha, (b + m) \sin \alpha)$.

а) Симетралите s_{OA} , s_{OA_1} и s_{OA_2} на отсечките OA , OA_1 и OA_2 са следните: $s_{OA} : x = \frac{a}{2}$, $s_{OA_1} : x = \frac{a + n}{2}$ и $s_{OA_2} : x = \frac{a + m}{2}$. Симет-

ралите s_{OB} , s_{OB_1} и s_{OB_2} на отсечките OB , OB_1 и OB_2 са следните: $s_{OB} : 2 \cos \alpha \cdot x + 2 \sin \alpha \cdot y - b = 0$, $s_{OB_1} : 2 \cos \alpha \cdot x + 2 \sin \alpha \cdot y - (b + n) = 0$, $s_{OB_2} : 2 \cos \alpha \cdot x + 2 \sin \alpha \cdot y - (b + m) = 0$. Ако Ω , Ω_1 и Ω_2 са центровете на окръжностите k , k_1 и k_2 , описани съответно около OAB , OA_1B_1 и OA_2B_2 , то $\Omega = s_{OA} \cap s_{OB}$, $\Omega_1 = s_{OA_1} \cap s_{OB_1}$ и $\Omega_2 = s_{OA_2} \cap s_{OB_2}$. Затова от системите, об-

разувани от съответните двойки уравнения, получаваме: $\Omega \left(\frac{a}{2}, \frac{b - a \cos \alpha}{2 \sin \alpha} \right)$,

$$\Omega_1 \left(\frac{a + n}{2}, \frac{b + n - (a + n) \cos \alpha}{2 \sin \alpha} \right) \quad \text{и} \quad \Omega_2 \left(\frac{a + m}{2}, \frac{b + m - (a + m) \cos \alpha}{2 \sin \alpha} \right).$$

Сега определяме уравнението на окръжността k по следния начин:

$$k : \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{b - a \cos \alpha}{2 \sin \alpha} \right)^2 = O\Omega^2. \text{ Тъй като } k \text{ минава през координат-$$

ното начало, свободният член в уравнението ѝ е равен на нула. Следователно $k : \sin \alpha \cdot x^2 + \sin \alpha \cdot y^2 - a \sin \alpha \cdot x - (b - a \cos \alpha) \cdot y = 0$. По аналогичен начин се получават уравненията

$$k_1 : \sin \alpha \cdot x^2 + \sin \alpha \cdot y^2 - (a + n) \sin \alpha \cdot x - [b + n - (a + n) \cos \alpha] \cdot y = 0,$$

$$k_2 : \sin \alpha \cdot x^2 + \sin \alpha \cdot y^2 - (a + m) \sin \alpha \cdot x - [b + m - (a + m) \cos \alpha] \cdot y = 0.$$

След изваждане на уравненията на k_1 и k получаваме $x = -\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} y = -tg \frac{\alpha}{2} y$. Заместваме последното равенство в уравнението

на k и получаваме $y = \frac{1}{2}(b - a) \cotg \frac{\alpha}{2}$. Следователно втората обща точка на

k и k_1 е следната $M \left(\frac{a - b}{2}, \frac{b - a}{2} \cotg \frac{\alpha}{2} \right)$. Тъй като координатите на M не

зависят от n , то е ясно, че k и k_2 се пресичат в същата точка. Следователно окръжностите k , k_1 и k_2 минават през точката M .

б) Координатите на точките C , C_1 и C_2 са следните $C\left(\frac{a+b\cos\alpha}{2}, \frac{b\sin\alpha}{2}\right)$, $C_1\left(\frac{a+n+(b+n)\cos\alpha}{2}, \frac{(b+n)\sin\alpha}{2}\right)$ и $C_2\left(\frac{a+m+(b+m)\cos\alpha}{2}, \frac{(b+m)\sin\alpha}{2}\right)$. Общото уравнение на правата C_1C_2 се изразява така: $2\sin\alpha \cdot x - 2(1+\cos\alpha) \cdot y - (a-b)\sin\alpha = 0$. След заместване на координатите на C в лявата част на това уравнение се вижда, че се получава нула, което означава, че C лежи на правата C_1C_2 . Следователно точките C , C_1 и C_2 лежат на една права l .

в) Тъй като правата l_1 има уравнение $y=0$, то $P\left(\frac{a-b}{2}, 0\right)$. От координатите на M и P следва, че $\overrightarrow{PM}\left(0, \frac{a-b}{2}\cotg\frac{\alpha}{2}\right)$, т.е. $\overrightarrow{PM}$ е колинеарен с ординатната ос Oy . Следователно $PM \perp l_1$.

