

ПОЛИНОМИ С КРАТНИ КОРЕНИ ВЪВ ВЪРХОВЕТЕ НА ТРИЪГЪЛНИК

¹⁾Сава Гроздев, Веселин Ненков

¹⁾Висше училище по застраховане и финанси – София

Резюме. Разгледана е една геометрична връзка между корените на полином и тези на неговата производна, когато всички корени на полинома се намират в три неколинеарни точки. Тази връзка се осъществява чрез фокусите на специална елипса, определена от кратностите на корените на полинома.

Keywords: polynomial; root; triangle; ellipse; focus

Известна е една геометрична връзка между корените на полиномите от трета степен с неколинеарни корени и корените на съответните им производни. Според тази връзка, ако корените на полином от трета степен са разположени във върховете на триъгълник, то корените на неговата производна се намират във фокусите на елипсата, допираща се до страните на триъгълника в техните среди (Nenkov, 2010). От друга страна, освен споменатата елипса във всеки триъгълник могат да се впишат безброй много елипси. Затова възниква въпросът за възможността някои от тези елипси също да осъществяват геометрични връзки между полиноми и съответните им производни. Оказва се, че някои от тези елипси осъществяват геометрични връзки между някои видове полиноми с кратни корени във върховете на разглеждан триъгълник и корените на неговата производна.

Преди да преминем към излагане на основното съдържание на този въпрос, ще отбележим три помощни твърдения.

Лема 1. *Ако корените на два полинома от една и съща степен образуват подобни геометрични фигури, то и корените на техните производни образуват подобни геометрични фигури* (Grozdev & Nenkov, 2018 a)

Ясно е, че ако един нормиран полином (който има коефициент 1 пред най-високата си степен) и един ненормиран полином (който има коефициент, различен от 1, пред най-високата си степен) имат едни и същи корени, то и техните производни ще имат едни и същи корени. Затова от тази лема следва, че ако за производната на един нормиран полином от известен клас установим геометрията на корените му, то можем да твърдим, че всеки полином от този клас има същата геометрия на корените си (Grozdev & Nenkov, 2018 a).

Лема 2. Ако $a_1, a_2, \dots, a_s$ са корени на полином $P(z)$ от n -та степен, k_j ($j = 1, 2, \dots, s$) са съответните им кратности и $k_1 + k_2 + \dots + k_s = n$, то коефициентът пред първата степен на променливата z е равен на:

$$a_1^{k_1-1} a_2^{k_2-1} \dots a_s^{k_s-1} (k_1 a_2 a_3 \dots a_{s-1} a_s + k_2 a_3 a_4 \dots a_s a_1 + \dots + k_s a_{s-1} a_{s-2} \dots a_2 a_1).$$

Доказателство. Означаваме корените на $P(z)$ с $b_1, b_2, \dots, b_n$. Коефициентът пред z според формулите на Виет е сума на n събираеми, получени от всевъзможните произведения на числата $b_1, b_2, \dots, b_n$, взети по $n-1$ пъти във всяко събираемо.

$$\text{Нека } b_1 = a_1, b_2 = a_2, \dots, b_s = a_s; b_{s+1} = b_{s+2} = \dots = b_{s+k_1-1} = a_1,$$

$$b_{s+k_1} = b_{s+k_1+1} = \dots = b_{s+k_1+k_2-2} = a_2, \dots,$$

$$b_{s+k_1+k_2+\dots+k_{s-1}-(s-2)} = b_{s+k_1+k_2+\dots+k_{s-1}-(s-2)+1} = \dots = b_{s+k_1+k_2+\dots+k_{s-1}-(s-2)+k_s-2} = a_s$$

$$(b_{n-k_s+2} = b_{n-k_s+3} = \dots = b_{n-1} = b_n = a_s).$$

Едно от събираемите в коефициента пред z е $b_1 b_2 \dots b_{n-2} b_{n-1} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_{s-1}^{k_{s-1}} a_s^{k_s}$ (тъй като липсва само $b_n = a_s$). Сега, ако заменим в $b_1 b_2 \dots b_{n-2} b_{n-1}$ последователно $b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_{n-k_s+2}$ с b_n , получаваме още $k_s - 2$ пъти $a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_{s-1}^{k_{s-1}} a_s^{k_s-1}$. Следователно по този начин получаваме $k_s - 1$ пъти това събираемо. Накрая, като заменим b_s с b_n , получаваме същото произведение още един път. Следователно цялата сума съдържа произведението $a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_{s-1}^{k_{s-1}} a_s^{k_s-1}$ точно k_s пъти.

Като приложим същата идея за всеки от другите корени, получаваме съответното събираемо в твърдението на лемата. Така стигаме до доказателство на лемата.

Лема 3. Ако точките P_1, P_2 и P_3 лежат съответно върху страните $A_2 A_3, A_3 A_1$ и $A_1 A_2$ на $\Delta A_1 A_2 A_3$, то коничното сечение k , минаващо през P_1, P_2 и P_3 , се допира до правите $A_2 A_3, A_3 A_1$ и $A_1 A_2$ тогава и само тогава, когато правите $A_1 P_1, A_2 P_2$ и $A_3 P_3$ минават през една точка P .

Доказателство. Нека коничното сечение k се допира до правите $A_2 A_3, A_3 A_1$ и $A_1 A_2$ съответно в точките P_1, P_2 и P_3 . Означаваме правите $A_2 A_3, A_3 A_1$ и $A_1 A_2$ съответно с p_1, p_2 и p_3 . Ако разгледаме тези прави в реда $p_1 p_2 p_2 p_3 p_3 p_1$, според теоремата на Брианшон (Mateev, 1977) получаваме, че правите $p_1 = A_1 P_1, p_2 = A_2 P_2$ и $p_3 = A_3 P_3$ се пресичат в една точка P .

Обратно, ако правите $p_1 = A_1 P_1, p_2 = A_2 P_2$ и $p_3 = A_3 P_3$ се пресичат в една точка P и отново разгледаме реда прави $p_1 p_2 p_2 p_3 p_3 p_1$, то според теоремата на Брианшон (Mateev, 1977), приложена в обратна посока, следва, че P_1, P_2 и

P_3 са допирни точки съответно за правите A_2A_3 , A_3A_1 и A_1A_2 към конично сечение k . С това лемата е доказана.

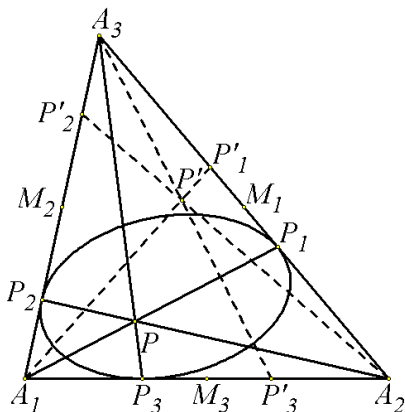
За да подчертаем по-дълбоката връзка между полиномите с кратни корени във върховете на даден триъгълник $A_1A_2A_3$ и някои от вписаните в този триъгълник елипси, да предположим, че точките A_1 , A_2 и A_3 са снабдени с маси k_1 , k_2 и k_3 . Това означава, че разглеждаме масовите точки (k_1, A_1) , (k_2, A_2) и (k_3, A_3) (Paskalev & Chobanov, 1985).

Ако в точките P'_1 , P'_2 и P'_3 се намират масовите центрове съответно на двойките масови точки (k_2, A_2) и (k_3, A_3) , (k_3, A_3) и (k_1, A_1) и (k_1, A_1) и (k_2, A_2) , то са изпълнени равенствата: $\overline{A_2P'_1} : \overline{A_3P'_1} = -k_3 : k_2$, $\overline{A_3P'_2} : \overline{A_1P'_2} = -k_1 : k_3$, $\overline{A_1P'_3} : \overline{A_2P'_3} = -k_2 : k_1$ (Paskalev & Chobanov, 1985). От тези равенства и теоремата на Чева (Paskalev & Chobanov, 1985) следва, че правите $A_1P'_1$, $A_2P'_2$ и $A_3P'_3$ се пресичат в една точка P' , в която се намира центърът на масите на трите разглеждани масови точки (Paskalev & Chobanov, 1985). Според лема 3 правите A_2A_3 , A_3A_1 и A_1A_2 са допирателни към елипса k' съответно в точките P'_1 , P'_2 и P'_3 .

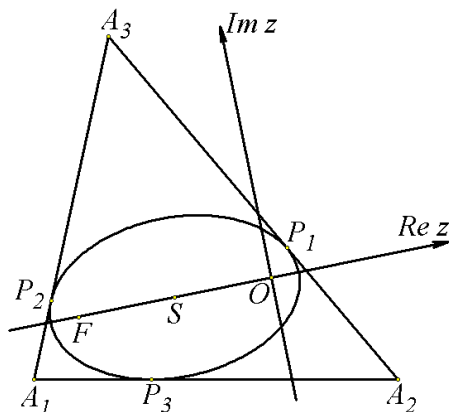
Ако точките P_1 , P_2 и P_3 са такива, че са изпълнени равенствата

$$(1) \quad \overline{A_2P_1} : \overline{A_3P_1} = -k_2 : k_3, \quad \overline{A_3P_2} : \overline{A_1P_2} = -k_3 : k_1, \quad \overline{A_1P_3} : \overline{A_2P_3} = -k_1 : k_2,$$

в тях се намират масовите центрове съответно на двойките масови точки (k_2^{-1}, A_2) и (k_3^{-1}, A_3) , (k_3^{-1}, A_3) и (k_1^{-1}, A_1) и (k_1^{-1}, A_1) и (k_2^{-1}, A_2) . Точките P_1 , P_2 и P_3 са симетрични съответно на P'_1 , P'_2 и P'_3 спрямо средите M_1 , M_2 и M_3 съответно на отсечките A_2A_3 , A_3A_1 и A_1A_2 (фиг. 1). От равенствата (1) и теоремата на Чева следва, че правите A_1P_1 , A_2P_2 и A_3P_3 се пресичат в една точка P , в която се намира центърът на масите за масовите точки (k_1^{-1}, A_1) , (k_2^{-1}, A_2) и (k_3^{-1}, A_3) (фиг. 1). По този начин получаваме, че точките P и P' са изотомично спрегнати спрямо $\Delta A_1A_2A_3$ (Paskalev & Chobanov, 1985). Според лема 3 правите A_2A_3 , A_3A_1 и A_1A_2 са допирателни към елипса k съответно в точките P_1 , P_2 и P_3 (фиг. 1). Ще покажем, че именно елипсата k е свързващият елемент между корените на полином с кратни корени във върховете на $\Delta A_1A_2A_3$ и неговата производна.



Фигура 1



Фигура 2

Нека елипсата k има за фокус точката O , фокален параметър p и числен ексцентрицитет e . Спрямо Гаусовата координатна система K_0 от фиг. 2, както е показано в (Nenkov, 1998), афиксите p_j и a_j на точките P_j и A_j ($j=1,2,3$) се изразяват съответно с формулите

$$(2) \quad p_1 = \frac{2p}{e.t_1 + 2t_1 + e}, \quad p_2 = \frac{2p}{e.t_2 + 2t_2 + e}, \quad p_3 = \frac{2p}{e.t_3 + 2t_3 + e}.$$

$$(3) \quad a_1 = \frac{2p}{et_2t_3 + t_2 + t_3 + e}, \quad a_2 = \frac{2p}{et_3t_1 + t_3 + t_1 + e}, \quad a_3 = \frac{2p}{et_1t_2 + t_1 + t_2 + e},$$

където $|t_1| = |t_2| = |t_3| = 1$.

Сега ще намерим зависимости между разглежданите величини, така че да бъдат изпълнени равенствата (1). Тъй като простото отношение на произволни три точки A_k , A_l и P_j от една права се изразява с равенство-

то $\frac{\overline{A_k P_j}}{\overline{A_l P_j}} = \frac{a_k - p_j}{a_l - p_j}$, от (2) и (3) след несложни пресмятания се получават равенствата

$$(4) \quad \frac{\overline{A_2 P_1}}{\overline{A_3 P_1}} = \frac{t_3 - t_1}{t_2 - t_1} \cdot \frac{a_2}{a_3}, \quad \frac{\overline{A_3 P_2}}{\overline{A_1 P_2}} = \frac{t_1 - t_2}{t_3 - t_2} \cdot \frac{a_3}{a_1}, \quad \frac{\overline{A_1 P_3}}{\overline{A_2 P_3}} = \frac{t_2 - t_3}{t_1 - t_3} \cdot \frac{a_1}{a_2}.$$

От второто и третото равенство в (4) и (1) следват равенствата

$$(5) \quad a_2 = -\frac{k_2}{k_1} \cdot \frac{t_3 - t_2}{t_3 - t_1} \cdot a_1, \quad a_3 = -\frac{k_3}{k_1} \cdot \frac{t_2 - t_3}{t_2 - t_1} \cdot a_1.$$

От равенствата (5) непосредствено се получава и равенството

$$(6) \quad k_1 a_2 a_3 + k_2 a_3 a_1 + k_3 a_1 a_2 = 0.$$

Сега да разгледаме нормирания полином $P_0(z)$ на комплексна променлива с комплексни коефициенти от степен $n = k_1 + k_2 + k_3$, който има k_j -кратен корен във върха A_j ($j=1,2,3$) на $\Delta A_1 A_2 A_3$. От лема 2 и равенството (6) следва, че коефициентът пред z има стойност 0. Затова производната $P'_0(z)$ има корен $z = 0$. Това всъщност на геометричен език означава, че $P'_0(z)$ има корен във фокуса O на елипсата k . Следователно, според лема 1 и бележката към нея, се получава, че производната $P'(z)$ на произволен полином $P(z)$ със свойствата на $P_0(z)$ има корен в точката O .

Аналогично, ако разгледаме координатна система с център в другия фокус F на k , получаваме, че $P'(z)$ има корен и в точката F . По този начин доказахме следната

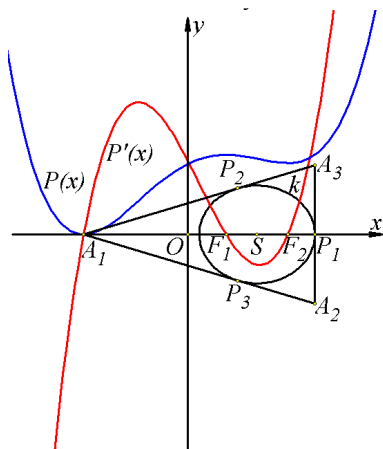
Теорема. *Ако един полином $P(z)$ от степен $n = k_1 + k_2 + k_3$ на комплексна променлива с комплексни коефициенти има k_j -кратен корен във върха A_j ($j=1,2,3$) на $\Delta A_1 A_2 A_3$, то производната $P'(z)$ на $P(z)$ има корени във фокусите на елипсата k , допираща се до правите $A_2 A_3$, $A_3 A_1$ и $A_1 A_2$ съответно в точките P_1 , P_2 и P_3 , за които са изпълнени равенствата $\overline{A_2 P_1} : \overline{A_3 P_1} = -k_2 : k_3$, $\overline{A_3 P_2} : \overline{A_1 P_2} = -k_3 : k_1$, $\overline{A_1 P_3} : \overline{A_2 P_3} = -k_1 : k_2$.*

Полиномът $P'(z)$ има $(k_j - 1)$ -кратен корен във върха A_j ($j=1,2,3$) (Genov, Mihovski & Molov, 1991), а останалите два корена се описват от токущо доказаната теорема. По този начин получаваме пълна геометрична картина на корените на $P'(z)$.

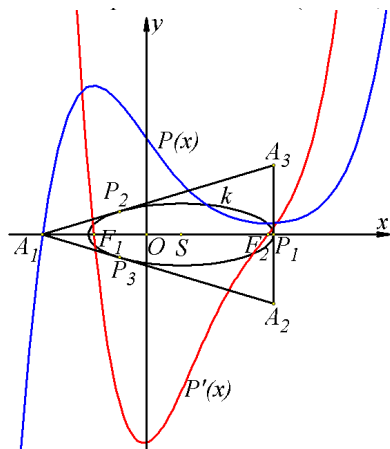
От теоремата непосредствено се получава следното

Следствие. *Ако един полином $P(z)$ от степен $n = 3$ на комплексна променлива с комплексни коефициенти има t -кратен корен във върха A_j ($j=1,2,3$) на $\Delta A_1 A_2 A_3$, то производната $P'(z)$ на $P(z)$ има корени във фокусите на елипсата k , допираща се до отсечките $A_2 A_3$, $A_3 A_1$ и $A_1 A_2$ в техните среди.*

По този начин се получава едно обобщение на теоремата, доказана в (Nenkov, 2010).

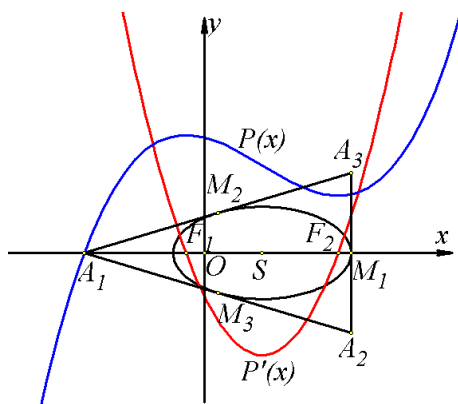


Фигура 3

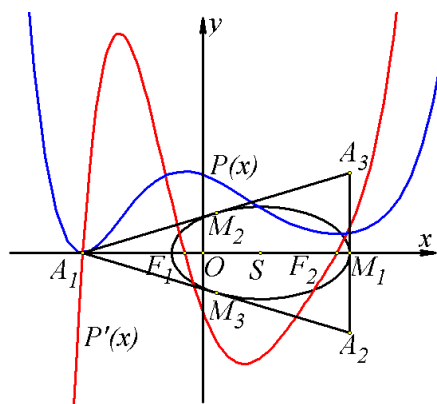


Фигура 4

Ако $P(z) = P(x)$ е полином с реални коефициенти на реална променлива, можем да представим някои геометрични интерпретации на доказаната теорема и нейното следствие. На фиг. 3 е показан полином $P(x)$ с двукратен реален корен в A_1 и два прости комплексно спрегнати корена в A_2 и A_3 . Производната $P'(x)$ има три прости реални корена, съответните точки на които са върхът A_1 и фокусите F_1 и F_2 на елипсата k . На фиг. 4 е представен полином $P(x)$ с прост реален корен в A_1 и два двукратни комплексно спрегнати корена в A_2 и A_3 . Производната $P'(x)$ има два прости реални корена, съответните точки на които са фокусите F_1 и F_2 на елипсата k .

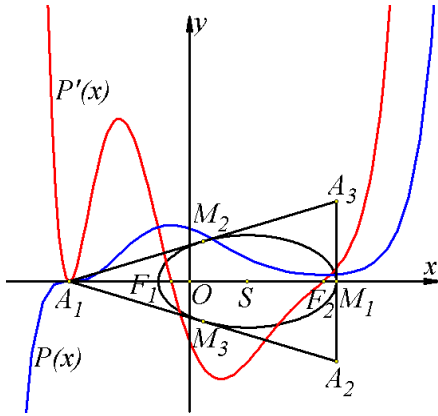


Фигура 5

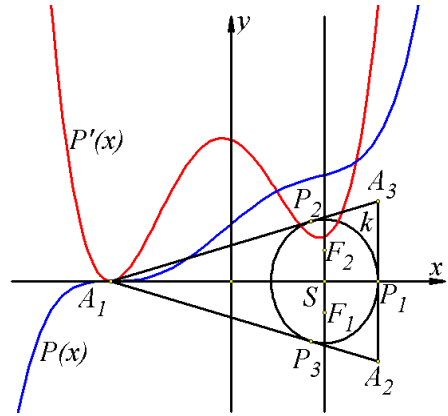


Фигура 6

Полиноми, които съответстват на следствието, са показани на фиг. 5, 6 и 7. Тези полиноми имат съответно прости, двукратни и трикратни корени във върховете на $\Delta A_1 A_2 A_3$, т.е. те се получават при $m = 1$, $m = 2$ и $m = 3$.



Фигура 7



Фигура 8

На фиг. 8 полиномът $P(x)$ има трикратен реален корен в A_1 и два прости комплексно спрегнати корена в A_2 и A_3 . Графиката на производната $P'(x)$ не минава през фокусите F_1 и F_2 на елипсата k , тъй като те отговарят на два комплексно спрегнати корена на $P'(x)$.

REFERENCES/ЛИТЕРАТУРА

- Balk, M., G. Balk & A. Poluhin (1988). *Real applications of imaginary numbers*. Kiev: Radjansk school. [Балк, М., Г. Балк & А. Полухин (1988). *Реальные применения мнимых чисел*. Киев: Радянська школа.]
- Genov, G, S Mihovski & T. Molov (1991). *Algebra with Number theory*. Sofia: Nauka i Izkustvo. [Генов, Г., С. Миховски & Т. Моллов (1991). *Алгебра с теория на числата*. София: Наука и изкуство.]
- Grozdev, S. & V. Nenkov (2018 b). Polynomials of forth degree with roots in the vertices of a parallelogram, *Mathematics and Informatics*, 3, 277 – 282. [Гроздев, С. & В. Ненков (2018 b). Полиноми от четвърта степен с корени във върховете на успоредник. Математика и информатика, 3, 277 – 282.]
- Grozdev, S. & V. Nenkov (2018 a). Polynomials of third degree with collinear roots, *Mathematics and Informatics*, 3, 283 – 293. [Гроздев, С.

- & В. Ненков (2018 а). Полиноми от трета степен с колинеарни корени. *Математика и информатика*, 3, 283 – 293.]
- Mateev, A. (1977). *Projective geometry*. Sofia: Nauka i Izkustvo. [Матеев, А. (1977). *Проективна геометрия*. София: Наука и изкуство.]
- Маркушевич, А. & Л. Маркушевич (1980). *Увод в теорията на аналитичните функции*. София: Наука и изкуство. [Markushevich, A. & L. Markushevich (1980). *Introduction to the theory of Analytic functions*. Sofia: Nauka i Izkustvo.]
- Nenkov, V. (1998). Conics inscribed in a triangle. *Mathematics and Informatics*, 5, 54 – 59 [Ненков, В. (1998). Конични сечения, вписани в триъгълник. *Математика и информатика*, 5, 54 – 59.]
- Nenkov, V. (2010). A relation between non-real roots and a real ellipse. *Mathematics Plus*, 2, 61 – 63 [Ненков, В. (2010). Една връзка между нереални корени и реална елипса, *Математика плюс*, 2, 61 – 63.]
- Paskalev, G. & I. Chobanov. (1985). *Notable points in the triangle*. Sofia: Narodna prosveta. [Паскалев, Г. & И. Чобанов. (1985). *Забележителни точки в триъгълника*. София: Народна просвета.]
- Prasolov, V. (1986). *Problems in plane geometry. Part II*. Moscow: Nauka. [Прасолов, В. (1986). *Задачи по планиметрии. Часть II*. Москва: Наука.]

POLYNOMIALS WITH MULTIPLE ROOTS IN THE VERTICES OF A TRIANGLE

Abstract. It is considered a geometric relation between the roots of a polynomial and the roots of its derivative, when all roots of the polynomial are in three non-collinear points. This relation is realized through the focuses of a special ellipse, which is determined by the multiplicities of the polynomial roots.

✉ **Prof. Sava Grozdev, DSc.**

University of Finance, Business and Entrepreneurship
1, Gusla Str.
1618 Sofia, Bulgaria
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

✉ **Dr. Veselin Nenkov, Assoc. Prof.**

45, Stoyan Balgarenetcho Str.
5662 Beli Osam, Bulgaria
E-mail: vnenkov@mail.bg