

ИНЦЕНТЪР НА ЧЕТИРИЪГЪЛНИК

Станислав Стефанов

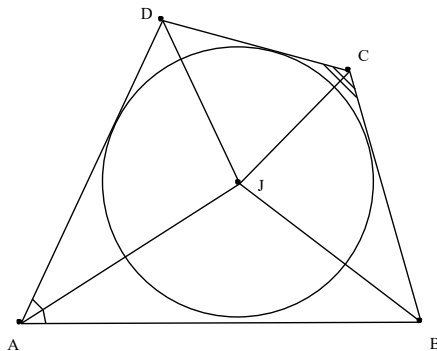
Технически университет – София

Резюме. В тази публикация се разглеждат свойствата на една забележителна точка в изпъкнал четириъгълник, която е естествено обобщение на центъра на вписаната окръжност на описания четириъгълник. Изследва се връзката на тази точка с едно универсално преобразуване в равнината на четириъгълника, както и връзката ѝ с вече изучена друга забележителна точка в четириъгълника.

Keywords: quadrilateral; notable point; transformation

Центърът на описаната окръжност на вписания четириъгълник се обобщава спрямо една част от свойствата си с точка в произволен изпъкнал четириъгълник, наречена псевдоцентър (Nenkov, Stefanov & Haimov, 2016). В (Stefanov, 2017) същият център е обобщен спрямо друга част от свойствата си с друга точка в изпъкнал четириъгълник, наречена втори псевдоцентър. Тук ще обобщим центъра на вписаната окръжност на описания четириъгълник. Обобщената точка, която ще наричаме инцентър на четириъгълника, съвпада с едната от двете двойни точки на изображението инверсна изогоналност, разгледано в (Nenkov, Stefanov & Haimov, 2017). От това съвпадение произтичат ред свойства на въпросната точка – следствия от общите свойства на двойките инверсно изогонални точки в четириъгълника. Интересни свойства на инцентъра обобщават свойства на неговия праобраз. Съществува връзка между инцентъра и псевдоцентъра на неговия педален четириъгълник. Разстоянията му до върховете на четириъгълника са свързани с важна зависимост и за тях съществуват любопитни формули. Във вписан в окръжност четириъгълник тези разстояния участват и в друга интересна зависимост.

Нека J е центърът на вписаната окръжност на описания четириъгълник $ABCD$ (фиг. 1).



Фигура 1

Ще потърсим такива характеристични равенства, изпълнени за тази точка, които са изпълнени и за определена точка в произволен четириъгълник. Имаме $\angle JAB = \angle JAD$ и $\angle JCB = \angle JCD$, откъдето следва, че

$$\angle JAB + \angle JCB = \angle JAD + \angle JCD = \frac{1}{2}(\angle A + \angle C).$$

$$\text{Аналогично } \angle JBA + \angle JDA = \angle JBC + \angle JDC = \frac{1}{2}(\angle B + \angle D).$$

Така получаваме системата

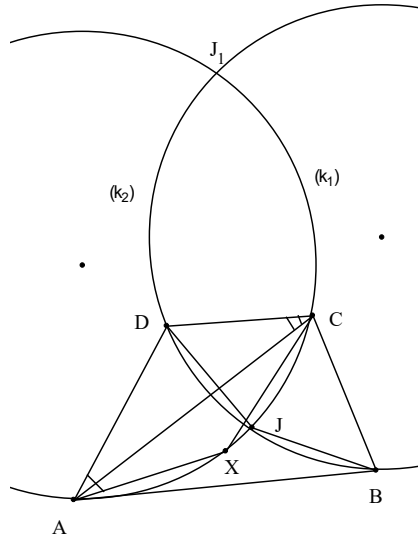
$$(1) \quad \begin{aligned} \angle JAD + \angle JCD &= \frac{1}{2}(\angle A + \angle C), \\ \angle JBA + \angle JDA &= \frac{1}{2}(\angle B + \angle D). \end{aligned}$$

Обратно, центърът J на вписаната окръжност е единствената точка в четириъгълника, за която е изпълнена системата равенства (1) (в теорема 1 по-долу това е доказано за обобщението на центъра на вписаната окръжност, а следователно е вярно и за самия център J).

Както ще видим сега, системата равенства (1) е изпълнена и за определена точка в произволен четириъгълник.

Лема 1. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник. Геометрично място на точките X в $ABCD$, за които е изпълнено равенството $\angle XAD + \angle XCD = \frac{1}{2}(\angle A + \angle C)$, е дъга $\widehat{k_1}$ от окръжност, лежаща в полуправнината на правата AC , съдържаща върха на по-малкия от ъглите ABC и CDA . От точките на k_1 диагоналът AC се вижда под ъгъл $\varphi = 180^\circ - \frac{1}{2}|\angle D - \angle B|$.

Доказателство. Нека за определеност $\angle B \leq \angle D$ и X е произволна точка от дъгата k_1 , дефинирана в лемата (фиг. 2).



Фигура 2

Ще покажем, че за нея е изпълнено равенството $\angle XAD + \angle XCD = \frac{1}{2}(\angle A + \angle C)$, т.е. че тя е от въпросното геометрично място. Имаме

$$\angle AXC = \varphi = 180^\circ - \frac{1}{2}|\angle D - \angle B| = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle D - \angle B).$$

От четириъгълника $AXCD$, след заместване с помощта на последното равенство, получаваме:

$$\begin{aligned} \angle XAD + \angle XCD &= 360^\circ - \angle D - \angle AXC = 360^\circ - \angle D - [180^\circ - \frac{1}{2}(\angle D - \angle B)] = \\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle D + \angle B) = \frac{1}{2}(\angle A + \angle C). \end{aligned}$$

Убедихме се, че за точката X от дъгата $\widehat{k_1}$ е изпълнено равенството $\angle XAD + \angle XCD = \frac{1}{2}(\angle A + \angle C)$. По обратния път се доказва, че ако X е произволна точка в четириъгълника, за която е изпълнено последното равенство, то X лежи на дъгата k_1 от условието на лемата.

Теорема 1 (за съществуване на инцентъра). Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник. Съществува единствена точка J в него, за която са изпълнени равенствата (1) и тя е обща точка на дъгата k_1 от условието на лемата и аналогичната дъга k_2 , от точките на която диагонален BD се вижда под ъгъл $\psi = 180^\circ - \frac{1}{2}|\angle C - \angle A|$.

Доказателство. Нека J е общата точка на дъгите $\widehat{k_1}$ и $\widehat{k_2}$. От $J \in \widehat{k_1}$ следва, че е изпълнено равенството $\angle JAD + \angle JCD = \frac{1}{2}(\angle A + \angle C)$ (по лемата) (фиг. 2). Аналогично от $J \in \widehat{k_2}$ следва, че е изпълнено равенството $\angle JBA + \angle JDA = \frac{1}{2}(\angle B + \angle D)$. Получихме, че за точката J е изпълнена системата равенства (1). Обратно, ако J' е точка, за която са изпълнени равенството $\angle J'AD + \angle J'CD = \frac{1}{2}(\angle A + \angle C)$ и равенството $\angle J'BA + \angle J'DA = \frac{1}{2}(\angle B + \angle D)$, то по лемата $J' \in \widehat{k_1}$ и $J' \in \widehat{k_2}$, т.е. J' е общата точка на двете дъги. С това се убедихме, че системата равенства (1) е изпълнена за определена точка в четириъгълника и че такава точка има само една.

Определение 1. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник. Точката J , за която е изпълнена системата равенства (1), ще наричаме *инцентър* на четириъгълника.

Общата точка J_1 на противоположните на k_1 и k_2 дъги в съответните окръжности (фиг. 2) се характеризира със свойства, аналогични на тези на инцентъра. Ще я наричаме *аутцентър* на четириъгълника.

От доказаната теорема 1 и лема 1 следва непосредствено следното характеристично свойство на инцентъра.

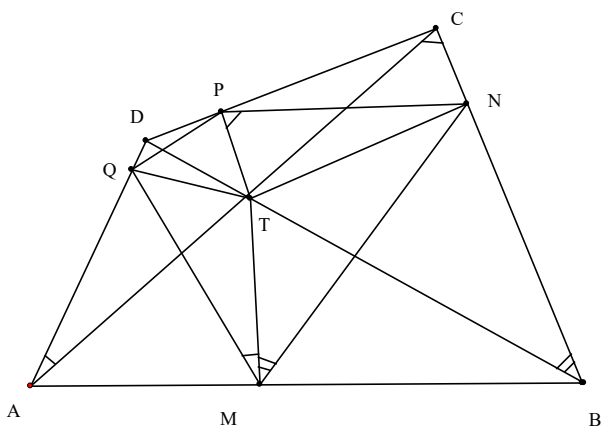
Свойство 1. Диагоналите AC и BD на изпъкнал четириъгълник $ABCD$ се виждат от инцентъра J под ъгли $\angle AJC = 180^\circ - \frac{1}{2}|\angle D - \angle B|$ и $\angle BJD = 180^\circ - \frac{1}{2}|\angle C - \angle A|$. При това инцентърът лежи в полуравнината на правата AC , съдържаща върха на по-малкия от ъглите $\angle B$ и $\angle D$, и в полуравнината на правата BD , съдържаща върха на по-малкия от ъглите $\angle A$ и $\angle C$.

Забележка. Лесно се съобразява, че диагоналите AC и BD се виждат от аутцентъра J_1 под ъгли $\angle AJ_1C = \frac{1}{2}|\angle D - \angle B|$ и $\angle BJ_1D = \frac{1}{2}|\angle C - \angle A|$ (и последният лежи извън четириъгълника).

Известно е, а и лесно се проверява, че във вписан четириъгълник пресечната точка T на диагоналите е център на вписаната окръжност за педалния си четириъгълник. Както ще видим, това твърдение остава вярно и за произволен четириъгълник, като центърът на вписаната окръжност в педалния четириъгълник на точката T се заменя с инцентъра му.

Свойство 2. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник и T е пресечната точка на диагоналите му. Инцентърът на педалния четириъгълник на точката T съвпада с T .

Доказателство. Означаваме ортогоналните проекции на точката T върху страните AB , BC , CD и DA на четириъгълника $ABCD$ съответно с M , N , P и Q (фиг. 3).



Фигура 3

Понеже четириъгълниците $AMTQ$ и $QTPD$ са вписани, имаме:

$$\angle QMT + \angle QPT = \angle QAT + \angle QDT = 180^\circ - \angle ATD.$$

Аналогично, понеже четириъгълниците $TMBN$ и $TNCP$ са вписани, получаваме:

$$\angle NMT + \angle NPT = \angle NBT + \angle NCT = 180^\circ - \angle BTC.$$

Но $\angle ATD = \angle BTC$ и като сравним десните части на горните две равенства, стигаме до равенството $\angle QMT + \angle QPT = \angle NMT + \angle NPT$. Получихме, че за точката T е изпълнено едното равенство от системата равенства от определение 1 (по отношение на четириъгълника $MNPQ$). Аналогично се доказва, че за нея е изпълнено и другото равенство. Следователно точката T е инцентърът на четириъгълника $MNPQ$.

Забележка. Обратно, лесно се доказва, че в изпъкнал четириъгълник пресечната точка на диагоналите е единствената точка, която е инцентър за педалния си четириъгълник.

За изложението по-нататък ще ни потрябва едно равенство между ъгли, свързано с инцентъра на изпъкнал четириъгълник, от което следват важни негови свойства.

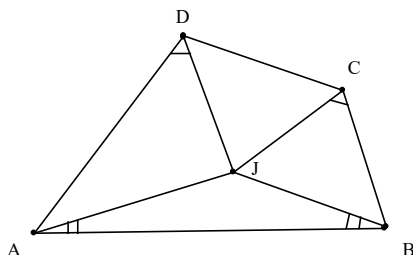
Свойство 3. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник. Инцентърът му J се характеризира със системата равенства:

$$(2) \quad \begin{aligned} \angle AJB &= \angle JDA + \angle JCB, \angle DJC = \angle JAD + \angle JBC, \\ \angle BJC &= \angle BAJ + \angle CDJ, \angle AJD = \angle ABJ + \angle DCJ. \end{aligned}$$

Доказателство. За инцентъра J по определение 1 са изпълнени равенствата (фиг. 4) $\angle JAB + \angle JCB = \frac{1}{2}(\angle A + \angle C)$ и $\angle JBA + \angle JDA = \frac{1}{2}(\angle B + \angle D)$.

От друга страна, $\angle AJB = 180^\circ - \angle JAB - \angle JBA$. Като изразим ъглите JAB и JBA от по-горните равенства и заместим в последното, получаваме:

$$\begin{aligned} \angle AJB &= 180^\circ - \left[\frac{1}{2}(\angle A + \angle C) - \angle JCB \right] - \left[\frac{1}{2}(\angle B + \angle D) - \angle JDA \right] = \\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C + \angle D) + \angle JDA + \angle JCB = \angle JDA + \angle JCB. \end{aligned}$$



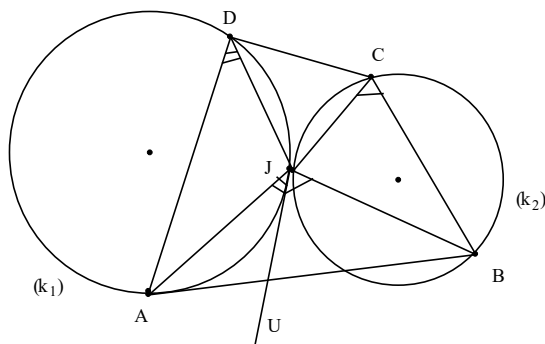
Фигура 4

Доказахме първото от равенства (2). Аналогично се доказват и останалите равенства. Обратно, лесно се проверява, че ако за една точка в четириъгълника $ABCD$ е изпълнена системата равенства (2), то тя съвпада с инцентъра му.

С помощта на системата равенства (2) ще докажем следното важно свойство на инцентъра.

Свойство 4. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник. Инцентърът му J е единствената точка, за която описаните окръжности (k_1) и (k_2) съответно на триъгълниците AJD и BJC са външно допирателни и описаните окръжности (k_3) и (k_4) съответно на триъгълниците AJB и CJD са също външно допирателни.

Доказателство. Означаваме с U произволна точка в $\angle AJB$, за която $\angle AJU = \angle JDA$ (фиг. 5).



Фигура 5

Правата JU се допира до описаната окръжност (k_1) на $\triangle AJD$ в точката J (както следва от теоремата за вписан и периферен ъгъл). Понеже $\angle AJB = \angle JDA + \angle JCB$ (от свойство 3) имаме $\angle JCB = \angle AJB - \angle JDA$. Но $\angle JDA = \angle AJU$ (от по-горе), поради което

$$\angle JCB = \angle AJB - \angle JDA = \angle AJB - \angle AJU = \angle BJU,$$

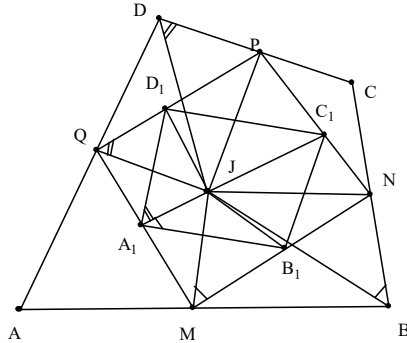
т.е. $\angle JCB = \angle BJU$. Следователно правата JU се допира и до описаната окръжност (k_2) на $\triangle BJC$ в точката J . Можем да заключим, че окръжностите (k_1) и (k_2) са външно допирателни. Аналогично се доказва, че и окръжностите (k_3) и (k_4) са външно допирателни. Обратно, лесно се проверява, че ако J' е точка в четириъгълника $ABCD$, за която окръжностите (k_1) и (k_2) , описани съответно около триъгълниците $AJ'D$ и $BJ'C$, са външно допирателни, и окръжностите (k_3) и (k_4) , описани съответно около триъгълниците $AJ'B$ и $CJ'D$, са също външно допирателни, то J' съвпада с инцентъра J на $ABCD$.

Аналогично се доказва, че ако J_1 е аутцентърът на $ABCD$, то описаните окръжности на $\triangle AJ_1B$ и $\triangle CJ_1D$ са допирателни и описаните окръжности на $\triangle BJ_1C$ и $\triangle AJ_1D$ са също допирателни.

Едно очевидно свойство на центъра на вписаната окръжност на описания четириъгълник е, че той е център на описаната окръжност на педалния си четириъгълник. Както ще видим сега, това свойство е налице и за произволен четириъгълник, като ролята на центъра на описаната окръжност играе псевдоцентърът, а ролята на центъра на вписаната окръжност – инцентърът.

Свойство 5. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник. Псевдоцентърът на педалния четириъгълник на инцентъра му J съвпада с J .

Доказателство. Означаваме ортогоналните проекции на инцентъра J върху страните AB , BC , CD и DA на четириъгълника $ABCD$ съответно с M , N , P и Q , а проекциите му върху страните QM , MN , NP и PQ на четириъгълника $MNPQ$ съответно с A_1 , B_1 , C_1 и D_1 (фиг. 6).



Фигура 6

Понеже четириъгълниците A_1JD_1Q и A_1MB_1J са вписани, имаме:

$$\angle D_1A_1B_1 = \angle D_1A_1J + \angle JA_1B_1 = \angle D_1QJ + \angle JMB_1 = \angle PQJ + \angle JMN.$$

Същевременно понеже и четириъгълниците $QJPD$ и $MBNJ$ са вписани, имаме:

$$\angle PQJ + \angle JMN = \angle PDJ + \angle JBN.$$

Тогава $\angle D_1A_1B_1 = \angle PQJ + \angle JMN = \angle PDJ + \angle JBN$. Но в съответствие с равенствата (1) от определение 1 от четириъгълника $ABCD$ получаваме:

$$\angle PDJ + \angle JBN = \frac{1}{2}(\angle B + \angle D).$$

Следователно $\angle D_1A_1B_1 = \frac{1}{2}(\angle B + \angle D)$. По същия начин се доказва, че и

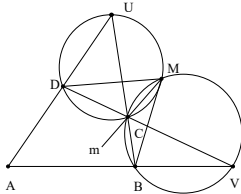
$$\angle D_1C_1B_1 = \frac{1}{2}(\angle B + \angle D).$$

Получихме, че $\angle D_1A_1B_1 = \angle D_1C_1B_1$. Аналогично се доказва, че и $\angle A_1B_1C_1 = \angle A_1D_1C_1$. Следователно $A_1B_1C_1D_1$ е успоредник. Но този успоредник е педалният четириъгълник на вътрешната за четириъгълника $MNPQ$ точка J относно последния. Можем да заключим, че J е псевдоцентър на четириъгълника $MNPQ$ (Nenkov, Stefanov & Haimov, 2016). С това свойството е доказано.

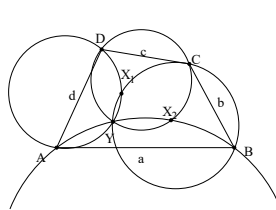
Преди да се спрем на следващите свойства на инцентъра, ще разгледаме едно преобразуване в равнината на изпъкнал четириъгълник, което ще използваме при доказателството на тези свойства.

Нека $ABCD$ е произволен четириъгълник, в който продълженията на страните AD и BC се пресичат в точка U , а тези на страните AB и CD – в точка V (фиг.7). Доказва се, че описаните окръжности около триъгълниците ABU , CDU , ADV и BCV имат обща точка M . Тя се нарича точка на Микел за четириъгълника $ABCD$.

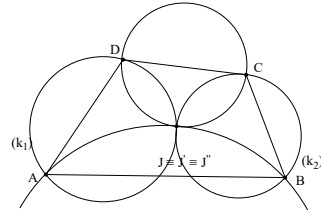
Определение 2. Композицията от симетрията g с ос ъглополовящата m на $\sphericalangle BMD$ и инверсията I с полюс M и степен $r^2 = BM \cdot DM$ се нарича инверсна изогоналност спрямо $ABCD$.



Фигура 7



Фигура 8



Фигура 9

Определение 3. Нека AB е произволна отсечка в равнината. Казваме, че точките X и Y са изогонални спрямо отсечката AB , ако те лежат на окръжност, минаваща през точките A и B .

В (Nenkov, Stefanov & Naimov, 2017) са доказани следните свойства на изображението инверсна изогоналност, които ще използваме тук.

Теорема 2. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник и X_1 и X_2 са две точки в него, за които съществува точка Y , изогонална на X_1 , спрямо всяка от страните AD и BC и изогонална на X_2 спрямо всяка от страните AB и CD . Тогава точките X_1 и X_2 са инверсно изогонални спрямо $ABCD$ (фиг. 8).

Теорема 3. Нека в четириъгълника $ABCD$ дължините на страните AB , BC , CD и DA са съответно a , b , c и d . Ако точките X_1 и X_2 са инверсно изогонални спрямо $ABCD$, то са изпълнени равенствата (фиг.8).

$$\frac{AX_2}{BX_2} = \frac{CX_1}{DX_1} \cdot \frac{d}{b}, \quad \frac{BX_2}{CX_2} = \frac{DX_1}{AX_1} \cdot \frac{a}{c}, \quad \frac{CX_2}{DX_2} = \frac{AX_1}{BX_1} \cdot \frac{b}{d}, \quad \frac{DX_2}{AX_2} = \frac{BX_1}{CX_1} \cdot \frac{c}{a}.$$

Както ще видим сега, от доказаното по-горе свойство 4 на инцентъра J следва, че той е двойна точка за преобразуването инверсна изогоналност. Наистина, понеже окръжностите $k_1(A, J, D)$ и $k_2(B, J, C)$ се допират в точката J (фиг. 9) (свойство 4), то изогоналната точка J' на инцентъра J спрямо всяка от страните AD и BC е отново точката J (виж определение 3). Аналогично, изогоналната точка J'' на инцентъра J относно всяка от страните AB и CD също съвпада с J . Инверсно изогоналната точка на J' е J'' (по

цитираната теорема 2). Тъй като $J' \equiv J'' \equiv J$, заключаваме, че инцентърът J е инверсно изогонален сам на себе си.

Аналогично се доказва, че аутцентърът е втората двойна точка за инверсната изогоналност.

Сега ще докажем две важни зависимости между разстоянията на инцентъра J до върховете на четириъгълника.

Свойство 6. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник и J е инцентърът му. Изпълнени са равенствата:

$$(3) \quad \frac{AJ}{CJ} = \frac{\sqrt{AB \cdot AD}}{\sqrt{BC \cdot CD}}, \quad \frac{BJ}{DJ} = \frac{\sqrt{AB \cdot BC}}{\sqrt{AD \cdot DC}}.$$

Доказателство. Инцентърът J се изобразява при инверсната изогоналност в себе си (по току-що доказаното). От цитираната теорема 3 тогава имаме

$$\frac{AJ}{DJ} = \frac{CJ}{BJ} \cdot \frac{AB}{CD} \quad \text{и} \quad \frac{AJ}{BJ} = \frac{CJ}{DJ} \cdot \frac{AD}{BC} \quad (\text{фиг. 9}).$$

Оттук след почленно умножение и просто преобразуване получаваме $\frac{AJ^2}{CJ^2} = \frac{AB \cdot AD}{BC \cdot CD}$, т.е. $\frac{AJ}{CJ} = \frac{\sqrt{AB \cdot AD}}{\sqrt{BC \cdot CD}}$.

Доказахме първото от равенства (3). Аналогично се доказва и второто равенство.

Забележка. Лесно се доказва, че системата равенства (3) е изпълнена за разстоянията единствено на инцентъра и аутцентъра до върховете на четириъгълника.

Сега ще се спрем на една зависимост между разстоянията от инцентъра до върховете на вписан в окръжност четириъгълник.

Свойство 7. Нека $ABCD$ е вписан в окръжност четириъгълник и S_{ABC} , S_{BCD} , S_{CDA} и S_{DAB} са лицата съответно на триъгълниците ABC , BCD , CDA и DAB . За разстоянията на инцентъра J до върховете на четириъгълника е изпълнена зависимостта:

$$(4) \quad AJ^2 \cdot S_{BCD} = BJ^2 \cdot S_{CDA} = CJ^2 \cdot S_{DAB} = DJ^2 \cdot S_{ABC}.$$

Доказателство. Означаваме дължините на страните AB , BC , CD и DA на четириъгълника $ABCD$ съответно с a , b , c и d , а дължините на диагоналите AC и BD – съответно с m и n (фиг.10).

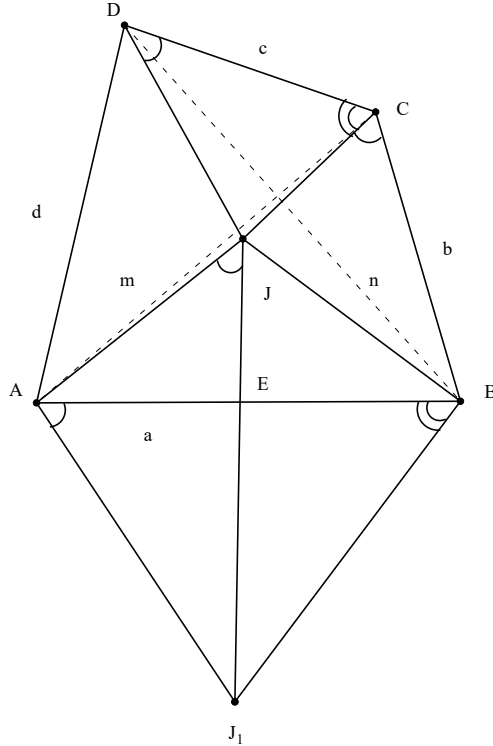
Нека J_1 е точка в полуравнината на правата AB , несъдържаща четириъгълника $ABCD$, за която са изпълнени равенствата:

$$(5) \quad \angle J_1AB = \angle JDC, \quad \angle J_1BA = \angle JCD.$$

Триъгълниците AJ_1B и DJC са подобни, откъдето имаме:

$$(6) \quad \frac{AJ_1}{DJ} = \frac{a}{c}, \quad \frac{BJ_1}{CJ} = \frac{a}{c}.$$

Ще докажем първо, че $\Delta AJJ_1 \sim \Delta JCB$. От доказаното в началото свойство 3 имаме равенството $\angle BJC = \angle JAB + \angle JDC$. С помощта на (5) от тук получаваме $\angle BJC = \angle JAB + \angle JDC = \angle JAB + \angle J_1AB = \angle JAJ_1$, т.е. $\angle BJC = \angle JAJ_1$. За да докажем, че $\Delta AJJ_1 \sim \Delta JCB$, остава да докажем пропорцията $\frac{AJ_1}{AJ} = \frac{JB}{JC}$.



Фигура 10

Точката J е двойна за инверсната изогоналност спрямо $ABCD$ (по доказаното по-горе), затова към нея можем да приложим равенствата от цитираната по-горе теорема 3 за инверсно изогоналните точки. Получаваме равенството $\frac{DJ}{AJ} = \frac{JB}{JC} \frac{c}{a}$. Същевременно от първото равенство в (6) имаме $\frac{AJ_1}{DJ} = \frac{a}{c}$. Като умножим почленно последните две равенства, получаваме пропорцията $\frac{AJ_1}{AJ} = \frac{JB}{JC}$. С това доказахме, че $\Delta AJJ_1 \sim \Delta JCB$, откъдето имаме

$$(7) \quad \angle JCB = \angle AJJ_1.$$

По определението на инцентъра J е изпълнено равенството $\angle JAB + \angle JCB = \frac{1}{2}(\angle A + \angle C)$. Но понеже по условие четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност, имаме $\angle A + \angle C = 180^\circ$. Следователно $\angle JAB + \angle JCB = 90^\circ$. С помощта на (7) оттук получаваме:

$$\angle JAB + \angle AJJ_1 = \angle JAB + \angle JCB = 90^\circ, \text{ т.е. } \angle JAB + \angle AJJ_1 = 90^\circ.$$

Нека $JJ_1 \cap AB = E$. От последното равенство следва, че $\triangle AEJ$ е правоъгълен, т.е. че диагоналите на четириъгълника AJB_1J_1 са взаимно перпендикулярни. Лесно се съобразява, че тогава е изпълнено равенството: $AJ^2 + BJ_1^2 = AJ_1^2 + BJ^2$. От друга страна, от равенство (6) имаме

$$AJ_1^2 = \frac{a^2}{c^2} DJ^2 \text{ и } BJ_1^2 = \frac{a^2}{c^2} CJ^2 \text{ и от последното равенство получаваме:}$$

$$(8) \quad AJ^2 + \frac{a^2}{c^2} CJ^2 = \frac{a^2}{c^2} DJ^2 + BJ^2.$$

Но от свойство (5) следва, че $\frac{DJ^2}{BJ^2} = \frac{cd}{ab}$ и $\frac{CJ^2}{AJ^2} = \frac{bc}{ad}$, т.е. че $DJ^2 = \frac{cd}{ab} BJ^2$ и $CJ^2 = \frac{bc}{ad} AJ^2$. С помощта на последните равенства заместваме в (8) и получаваме:

$$AJ^2 + \frac{ab}{cd} AJ^2 = \frac{ad}{bc} BJ^2 + BJ^2, \text{ т.е. } \frac{AJ^2}{BJ^2} = \frac{ad + bc}{ab + cd} \cdot \frac{d}{b}.$$

Но както лесно се доказва, във вписан четириъгълник е в сила зависимостта $\frac{m}{n} = \frac{ad + bc}{ab + cd}$ и от последното равенство получаваме $\frac{AJ^2}{BJ^2} = \frac{md}{nb}$. Понеже $\angle DBC = \angle CAD$, оттук следва, че $AJ^2 nb \sin DBC = BJ^2 md \sin CAD$, т.е. че $AJ^2 \cdot S_{BCD} = BJ^2 S_{CDA}$. Така доказахме първото от равенствата (4). Аналогично се доказват и останалите равенства.

Ще приведем без доказателство още четири свойства на инцентъра на четириъгълник, които следват от това, че той е двойна точка за изображението инверсна изогоналност.

Свойство 8. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник. Педалният триъгълник на инцентъра му J относно $\triangle ABC$ е подобен на педалния триъгълник на J относно $\triangle ACD$.

Свойство 9. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник и продълженията на страните му AD и BC се пресичат в точка U , а тези на AB и DC – в точка V (С лежи между B и U , както и между D и V). За инцентъра J е изпълнено равенството $\angle UJV = \frac{1}{2}(\angle A + \angle C)$.

Свойство 10. Инцентърът и аутицентърът на изпъкнал четириъгълник $ABCD$ са симетрични относно точката му на Микел M и лежат на общата ъглополовяща на ъглите AMC и BMD .

Свойство 11. Нека $ABCD$ е четириъгълник, който не е успоредник, и дължините на страните му AB , BC , CD и DA са съответно a , b , c и d , а тези на диагоналите AC и BD – съответно m и n . Ако e е разстоянието между средите на диагоналите, то разстоянието от инцентъра J до върховете A , B , C и D се изразява по формулите.

$$\begin{aligned} AJ^2 &= \frac{ad}{4e^2} \left[ad + bc - \sqrt{(ad + bc)^2 - 4m^2e^2} \right], \\ BJ^2 &= \frac{ab}{4e^2} \left[ab + cd - \sqrt{(ab + cd)^2 - 4n^2e^2} \right], \\ CJ^2 &= \frac{bc}{4e^2} \left[ad + bc - \sqrt{(ad + bc)^2 - 4m^2e^2} \right], \\ DJ^2 &= \frac{cd}{4e^2} \left[ab + cd - \sqrt{(ab + cd)^2 - 4n^2e^2} \right]. \end{aligned}$$

REFERENCES/ЛИТЕРАТУРА

- Nenkov, V., S. Stefanov & H. Haimov (2016). The pseudocenter and the orthocenter – notable points in the quadrilateral, *Mathematics and Informatics*, 6, 614 – 525. [Ненков, В., С. Стефанов & Х. Хаимов (2016). Псевдоцентър и ортоцентър – забележителни точки в четириъгълника, *Математика и информатика*, 6, 614 – 625.]
- Nenkov, V., S. Stefanov & H. Haimov (2017). Geometry of quadrilateral, Miquel point, Inverse isogonality, *Mathematics and Informatics*, 1, 81 – 93. [Ненков, В., С. Стефанов & Х. Хаимов. (2017). Геометрия на четириъгълника, точка на Микел, инверсна изогоналност, *Математика и информатика*, 1, 81 – 93.]
- Nenkov, V., S. Stefanov & H. Haimov (2018). Perfect isogonality in quadrilateral, *Mathematics and Informatics*, 2, 175 – 189. [Ненков, В., С. Стефанов & Х. Хаимов. (2018). Перфектна изогоналност в четириъгълник, *Математика и информатика*, 2, 175 – 189.]

- Stefanov, S. (2017). Second pseudo center of quadrilateral, *Mathematics and Informatics*, 3, 261 – 270. [Стефанов, С. (2017). Втори псевдо-инциентър на четириъгълника, *Математика и информатика*, 3, 252 – 261.]
- Shabanova, M., R. Atamuratova, M. Belorykova, V. Nenkov & M. Pavlova (2016). The game “Geometry scrabble in cloud” an organizational form of the international student research groups. *Mathematics and education in mathematics*, 45, 223 – 228. (ISSN 1313-3330).
- Sergeeva, T., M. Shabanova & S. Grozdev (2014). *Foundations of Dynamic Geometry*. Moscow: ASOU. [Сергеева, Т., М. Шабанова & С. Гроздев. (2014). *Основы динамической геометрии*. Москва: АСОУ.]
- Georgieva, M. & S. Grozdev (2016). *Morfodinamikata za razvitiето na noosfernia intelekt*. (4th ed.). Sofia: Publ. House “Iztok-Zapad” (ISBN 987-619-152-869-1), 327 pages. [Георгиева, М. & С. Гроздев. (2016). *Морфодинамиката за развитието на ноосферния интелект*. (4-то изд.). София: Изток – Запад. (ISBN 987-619-152-869-1), 327 стр.]
- Grozdev, S. & V. Nenkov (2012). *Around the orthocenter in the plane and the space*. Sofia: Archimedes. [Гроздев, С. & В. Ненков (2012). *Около ортоцентъра в равнината и пространството*. София: Архимед.]
- Grozdev, S. & V. Nenkov (2012). *Three notable points on the medians of the triangle*. Sofia: Archimedes 2000. [Гроздев, С. & В., Ненков. (2012). *Три забележителни точки върху медианите на триъгълника*. София: Архимед 2000.]
- Grozdev, S. & V. Nenkov. (2017). Gaining new knowledge by computer experiments. *Journal of Educational Sciences & Psychology*, vol. VII (LXIX), No 1B. Special Issue – International Conference Education and Psychology Challenges – Teachers for the knowledge society – 4th edition, May, 122-125, ISSN 2247-6377. (ISSN online version 2247-8558).
- Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics: The Bulgaria Experience (Theory and Practice)*. Sofia: ADE (ISBN 978-954-92139-1-1).

INCENTER OF A QUADRILATERAL

Abstract. The paper describes some properties of a notable point in a convex quadrilateral, which naturally generalize the incenter of the inscribed quadrilateral. What are considered are the connections of this point with a transformation in the plane of the quadrilateral and the connections with another notable point.

✉ **Mr. Stanislav Stefanov, PhD student**
Technical University Sofia
1000 Sofia, Bulgaria
E-mail: stanislav.toshkov@abv.bg