

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 6, 2017

Задача 1. Да се реши в естествени числа уравнението $x^3 + 1 = (63!)^n$, ако:
а) $n = 1$; б) $n > 1$.

Тодор Митев, Русе

Решение:

а) $n = 1$. Първо да отбележим следните две твърдения:

1) най-големият общ делител на $a + 1$ и $a^2 - a + 1$ е 1 или 3 за всяко цяло a .

Това твърдение следва непосредствено от равенството $a^2 - a + 1 = (a - 2)(a + 1) + 3$;

2) ако $p = 6k - 1$ ($k \in \mathbb{N}$) е просто число и p дели $a^3 + 1$, то p дели $a + 1$. Това твърдение се доказва по следния начин. От условието $a^3 \equiv -1 \pmod{p}$ следва, че $a^{3(2k-1)} \equiv -1 \pmod{p}$. Оттук и теоремата на Ферма имаме $1 \equiv a^{p-1} = a^{6k-2} = a \cdot a^{6k-3} \equiv -a \pmod{p}$, т.е. p дели $a + 1$.

Нека уравнението има решение. Тогава от 1) следва $x = 3y - 1$, където y е цяло число. Следователно $9y(3y^2 - 3y + 1) = 63!$. За израза в скобите имаме $3y^2 - 3y + 1 = 3(y - 1)y + 1$. Затова числото $3y^2 - 3y + 1$ е от вида $6k + 1$. Освен това от 2) следва, че ако $p = 6k - 1$ е просто число, което дели $x^3 + 1$, то p дели $x + 1 = 3y$. Следователно всяко просто число p , което е от вида $p = 6k - 1$, дели y .

От тези наблюдения заключаваме, че:

А) каноничното разлагане на числото $3y^2 - 3y + 1$ съдържа всички прости числа от вида $6k + 1$, които са по-малки от 63;

Б) каноничното разлагане на числото y съдържа простите числа 2 и 3 и всички прости числа от вида $6k - 1$, които са по-малки от 63.

Тъй като $63! = 2^{57} \cdot 3^{30} \cdot 5^{14} \cdot 7^{10} \cdot 11^5 \cdot 13^4 \cdot 17^3 \cdot 19^3 \cdot 23^3 \cdot 31^2 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 47 \cdot 53 \cdot 59 \cdot 61$, то от А) следва, че

$3y^2 - 3y + 1 = 7^{10} \cdot 13^4 \cdot 19^3 \cdot 31^2 \cdot 37 \cdot 43 \cdot 61 < 7^{10} \cdot 13^4 \cdot 19^3 \cdot 37 \cdot 37 \cdot 43 \cdot 61$, а от Б)

имаме $y = 2^{57} \cdot 3^{28} \cdot 5^{14} \cdot 11^5 \cdot 17^3 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 53 \cdot 59 > 2^{31} \cdot 5^7 \cdot 11^4 \cdot 17^3 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 53 \cdot 59 = 8^{10} \cdot 55^4 \cdot 85^3 \cdot 47 \cdot 53 \cdot 59 \cdot (2 \cdot 41)$.

От тези неравенства следва, че $y > 3y^2 - 3y + 1$, т.е. $(y - 1)(3y - 1) < 0$. Но $y > 2$ и се получава, че $1.5 < (y - 1)(3y - 1) < 0$, което е невъзможно.

Следователно уравнението няма решение.

б) Провеждайки същите разсъждения, получаваме, че:

$$3y^2 - 3y + 1 \leq 7^{10n} \cdot 13^{4n} \cdot 19^{3n} \cdot 33^n \cdot 37^n \cdot 43^n \cdot 61^n \text{ и } y > 8^{10n} \cdot 55^{4n} \cdot 65^{3n} \cdot 47^n \cdot 53^n \cdot 59^n \cdot (2.41)^n.$$

Откъдето отново получаваме, че $y > 3y^2 - 3y + 1$. Следователно уравнението няма решение.

Задача 2. Да се намери броят на всички разностранни триъгълници, страните на които са естествени числа от интервала $[1, 2017]$.

Росен Николаев, Варна

Решение: решението на тази задача се съдържа в статията „Комбинаторни задачи, свързани с триъгълник“, публикувана в настоящия брой.

Задача 3. Изпъкналият четириъгълник $ABCD$ е такъв, че $AB \cdot CD = AD \cdot BC$.

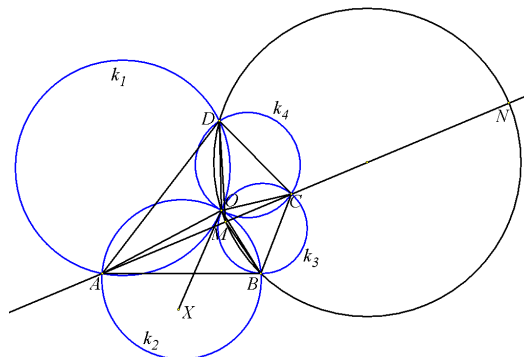
Точката O е вътрешна за $ABCD$ и са изпълнени равенствата $\frac{AO}{CO} = \frac{AD}{CD}$ и

$\frac{BO}{DO} = \frac{AB}{AD}$. Ако k_1 , k_2 , k_3 и k_4 са описаните окръжности съответно за триъгълниците ADO , ABO , BCO и CDO , да се докаже, че k_1 се допира до k_3 и k_2 се допира до k_4 .

Хаим Хаимов, Варна

Решение: означаваме ъглите при върховете A , B , C и D съответно с α , β , γ и δ . Ще докажем, че дадените по условие равенства $AB \cdot CD = AD \cdot BC$

и $\frac{AO}{CO} = \frac{AD}{CD}$ водят до равенството $\sphericalangle ADO + \sphericalangle ABO = \frac{1}{2}(\beta + \delta)$.



От условието имаме $\frac{AD}{CD} = \frac{AB}{CB} = \frac{AO}{CO} = k$. Нека точките M и N лежат върху AC , така че $\frac{AM}{CM} = \frac{AN}{CN} = k$. Тогава точките D , B и O лежат на Аполониевата окръжност на AC при отношение k (тя има диаметър MN). Тъй като DM е ъглополовяща на $\sphericalangle ADC$, то $\sphericalangle CDO - \sphericalangle ADO = (\sphericalangle CDM + \sphericalangle ODM) - (\sphericalangle ADM - \sphericalangle ODM) = 2\sphericalangle ODM$, т.е. $\sphericalangle CDO - \sphericalangle ADO = 2\sphericalangle ODM$. Аналогично BM е ъглополовяща на $\sphericalangle ABC$ и $\sphericalangle ABO - \sphericalangle CBO = 2\sphericalangle OBM$. Но $\sphericalangle ODM = \sphericalangle OBM$ (като вписани ъгли в Аполониевата окръжност). Следователно $\sphericalangle ADO + \sphericalangle ABO = \sphericalangle CDO + \sphericalangle CBO =$
 $= \frac{1}{2}(\sphericalangle ADO + \sphericalangle ABO + \sphericalangle CDO + \sphericalangle CBO) = \frac{1}{2}(\beta + \delta)$.

Аналогично от $AB \cdot CD = AD \cdot BC$ и $\frac{BO}{DO} = \frac{AB}{AD}$ следва, че $\sphericalangle BAO + \sphericalangle BCO = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma)$. Като използваме получените равенства, получаваме последователно $\sphericalangle AOB = 180^\circ - \sphericalangle BAO - \sphericalangle ABO =$
 $= 180^\circ - \frac{1}{2}(\alpha + \gamma) + \sphericalangle BCO - \frac{1}{2}(\beta + \delta) + \sphericalangle ADO = \sphericalangle BCO + \sphericalangle ADO$, т.е. $\sphericalangle AOB = \sphericalangle BCO + \sphericalangle ADO$. Тогава в $\sphericalangle AOB$ съществува такъв лъч $OX^\rightarrow$, че $\sphericalangle ADX = \sphericalangle ADO$ и $\sphericalangle BOX = \sphericalangle BCO$. От последните две равенства следва, че лъчът $OX^\rightarrow$ се допира до окръжностите k_1 и k_3 в точката O . Така заключаваме, че k_1 се допира до k_3 . Аналогично се доказва, че k_2 се допира до k_4 .