

ПОКАЗАТЕЛНИ, ЛОГАРИТМИЧНИ И ТРИГОНОМЕТРИЧНИ ФУНКЦИИ В ТРАНСЦЕНДЕНТНИ УРАВНЕНИЯ (IV ЧАСТ)

Диана Стефанова
ОУ „Н. Й. Вапцаров“ – Асеновград

Резюме. Статията е посветена на трансцендентните уравнения. В настоящия текст се разглеждат комбинации от показателни, логаритмични и тригонометрични функции в трансцендентно уравнение. Предложени са подходи за решаването им.

Keywords: transcendental equation; problem solving

В настоящата статия прилагаме идеята от (Stefanova, 2017) за решаване на комбинации от показателни и тригонометрични функции в основата на показателно уравнение, на логаритмично уравнение с основа или аргумент тригонометрични функции и логаритмични и показателни функции в трансцендентни уравнения относно решаването на комбинации от показателни, логаритмични и тригонометрични функции в трансцендентни уравнения. Задачите, които предлагаме, не се изучават в задължителната подготовка по математика в училище и са подходящи за ученици, проявяващи интерес към математиката, спомагат за повишаване нивото на подготовка за различни математически конкурси, олимпиади и други. За да се решат тези задачи, е необходимо много добро владение на различните групи показателни, логаритмични и тригонометрични уравнения и неравенства, а също и свойствата на показателни, логаритмични и тригонометрични функции. Целта е обвързване на знанията за показателни, логаритмични и тригонометрични функции със съответните групи уравнения. За да открият различните връзки, учениците упражняват методите на научно познание, убеждават се в тяхното значение и у тях се поражда стремеж за овладяването им. В следващите няколко задачи ще разгледаме показателно уравнение, при което в показателя е логаритъм с аргумент тригонометрична функция и с основа константа. Разгледани са различни подходи за решаване.

Задача 1. Да се реши уравнението $2^{\log_2 \sin x} = 1$.

Решение: допустими са тези стойности на x , за които $\sin x > 0$. Като използваме свойството $a^{\log_a b} = b$, преобразуваме даденото уравнение до тригонометричното уравнение $\sin x = 1$, чиито корени са $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

Задача 2. Да се реши уравнението $2 - 6^{\frac{1}{2} + \log_6 \sin x} = 2^{\frac{1}{2} + \log_2 \cos x}$.

Решение: допустими са тези стойности на x , за които $\sin x > 0$, $\cos x > 0$. Като използваме свойството $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$, даденото уравнение може да се запише във вида $\sqrt{6} \cdot 6^{\log_6 \sin x} + \sqrt{2} \cdot 2^{\log_2 \cos x} = 2$. От основното логаритмично тъждество $a^{\log_a b} = b$, записваме уравнението във вида $\sqrt{6} \sin x + \sqrt{2} \cos x = 2$. Един от начините за решаване на общото уравнение $a \sin x + b \cos x = c$ е да се разделят двете му страни с $\sqrt{a^2 + b^2}$, след което се използва събирателна формула. В случая делим двете страни на уравнението с $2\sqrt{2}$. Получаваме уравнението $\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ или $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{4}$, което има решения $x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ и $x + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, т.е. $x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi$ и $x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi$. Като вземем предвид условията $\sin x > 0$, $\cos x > 0$, получаваме, че решенията на даденото уравнение са ъглите $x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi$, където $k \in \mathbb{Z}$.

Задача 3. Да се реши уравнението $3^{\lg \lg x} + 3^{\lg \cot \lg x} = 2$.

Решение: допустимите стойности на даденото уравнение са: $x \neq k \frac{\pi}{2}$, $\lg x > 0$, $\cot \lg x > 0$. Преобразуваме по следния начин: $3^{\lg \lg x} + 3^{\lg \frac{1}{\lg x}} = 2 \Leftrightarrow 3^{\lg \lg x} + 3^{-\lg \lg x} = 2 \Leftrightarrow 3^{\lg \lg x} + \frac{1}{3^{\lg \lg x}} = 2$. Полагаме $3^{\lg \lg x} = y$, като $y > 0$, заместваме и получаваме дробното уравнение $y + \frac{1}{y} = 2$, а оттам – и квадратното $y^2 - 2y + 1 = 0$, чийто корен е $y = 1$. От $3^{\lg \lg x} = 1$ намираме, че $\lg \lg x = 0 \Rightarrow \lg x = 1$, откъдето $x = \frac{\pi}{4}(1 + 4k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Разглеждаме $\frac{\pi}{4}(1 + 4k) \neq k \frac{\pi}{2}$ или $2k \neq 1 + 4k$, но това е изпълнено винаги, защото $2k$ са четни числа, а $1 + 4k$ са нечетни. Следователно решението е $x = \frac{\pi}{4}(1 + 4k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Задача 4. Да се реши уравнението $4^{\log_{\frac{1}{2}}(\sin^2 x + 5 \sin x \cos x + 2)} = \frac{1}{9}$.

Решение: представяме основата 4 чрез 2^2 и $\frac{1}{2}$ чрез 2^{-1} .

Тогава $2^{2 \log_{\frac{1}{2}}(\sin^2 x + 5 \sin x \cos x + 2)} = \frac{1}{9}$ или $2^{-2 \log_2(\sin^2 x + 5 \sin x \cos x + 2)} = \frac{1}{9} \Rightarrow$

$2^{2 \log_2(\sin^2 x + 5 \sin x \cos x + 2)^{-1}} = \frac{1}{9}$. От основното логаритмично тъждество:

$a^{\log_a N} = N$ получаваме

$$\frac{1}{(\sin^2 x + 5 \sin x \cos x + 2)^2} = \frac{1}{9} \Rightarrow (\sin^2 x + 5 \sin x \cos x + 2)^2 = 9,$$

т.е. след коренуване стигаме до две уравнения $\sin^2 x + 5 \sin x \cos x + 2 = \pm 3$.

Но $\sin^2 x + 5 \sin x \cos x + 2 > 0$ и следователно уравнението, еквивалентно на даденото, е $\sin^2 x + 5 \sin x \cos x + 2 = 3 \Leftrightarrow \sin^2 x + 5 \sin x \cos x - 1 = 0$, което е приводимо към хомогенно уравнение: $-\cos^2 x + 5 \sin x \cos x = 0$. Сега делим

двете му страни на $-\cos^2 x \neq 0$ и получаваме $1 - \operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{1}{5}$. Допусти-

мите стойности $\sin^2 x + 5 \sin x \cos x + 2 > 0$ определяме, като представим числото 2 във вида $2 = 2(\sin^2 x + \cos^2 x)$, т.е. $3 \sin^2 x + 5 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x > 0$.

Делим двете му страни на $\cos^2 x \neq 0$ и получаваме неравенството $3 \operatorname{tg}^2 x + 5 \operatorname{tg} x + 2 > 0$. Полагаме $\operatorname{tg} x = u$ и $3u^2 + 5u + 2 > 0$, откъдето

$u \in (-\infty; -1) \cup \left(-\frac{2}{3}; +\infty\right)$. Следователно $\operatorname{tg} x = \frac{1}{5}$ е решение. Ако искаме

да определим ъгъла, съответстващ на решението, отчитаме по таблица за $\operatorname{tg} x = 0,2$ и намираме, че $x = 11^\circ 18'$.

Задача 5. Да се намерят стойностите на параметъра a , при които уравнение-

то $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} \operatorname{tg}^2 x} - (3a+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} \operatorname{tg} x} + a = 0$ има решение в интервала $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right)$.

Решение: при $x \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right)$ имаме $\operatorname{tg} x \in \left(\frac{\sqrt{3}}{3}; \sqrt{3}\right)$. Тъй като $\log_{\frac{1}{3}} \operatorname{tg} x$ е

намаляваща функция, $\log_{\frac{1}{3}} \operatorname{tg} x \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, когато $\operatorname{tg} x \in \left(\frac{\sqrt{3}}{3}; \sqrt{3}\right)$. Пола-

гаме $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} \operatorname{tg} x} = y$. Тъй като $\operatorname{tg} x > 0$, то $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} \operatorname{tg}^2 x} = y^2$. Даденото уравне-

ние приема вида $y^2 - (3a+1)y + a = 0$. От това, че $\log_{\frac{1}{3}} \operatorname{tg} x \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, а функцията $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} \operatorname{tg} x}$ е намаляваща, следва $y \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$. Тогава даденото уравнение ще има решение в интервала $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right)$, ако полученото квадратно уравнение $f(y) = y^2 - (3a+1)y + a = 0$ има поне един корен в интервала $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$. Като използваме свойството на разпределение на корените на квадратен тричлен в даден интервал, това ще бъде изпълнено, ако $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot f(\sqrt{2}) < 0$. Оттук намираме, че $a \in \left(\frac{\sqrt{2}-4}{16}; \frac{5\sqrt{2}-4}{17}\right)$.

В следващите няколко задачи ще разгледаме тригонометрични функции със сложни аргументи (показателна, логаритмична или тригонометрична функция).

Задача 6. Да се реши уравнението $\sin 2^{\sin x} = 1$.

Решение: като използваме основното тригонометрично уравнение $\sin \alpha = 1$, получаваме, че $2^{\sin x} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n = 0, 1, 2, \dots$, но $\sin x \in [-1; 1] \Rightarrow \frac{1}{2} \leq 2^{\sin x} \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq 2$. При $n = 0 \Rightarrow 2^{\sin x} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin x = \log_2 \frac{\pi}{2}$ и като съобразим, че $\log_2 \frac{\pi}{2} > 1$, получаваме, че даденото уравнение няма решение.

Задача 7. Да се намерят положителните корени на уравнението $\operatorname{tg} \left[5\pi \left(\frac{1}{2}\right)^x \right] = 1$.

Решение: като използваме основното тригонометрично уравнение $\operatorname{tg} \varphi = 1$, за даденото уравнение получаваме, че $5\pi \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ (1). След това делим двете страни на (1) с π и намираме $5\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{4} + k$, а оттам – и показателното уравнение $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{20} + \frac{k}{5}$, но когато $x > 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x \in (0; 1)$, откъдето

$\frac{1+4k}{20} \in (0;1) \Rightarrow k = 0; 1; 2; 3; 4$. След това намираме, че $x = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{20} + \frac{k}{5}\right)$, при $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

Задача 8. Да се реши уравнението $\sin(2^{x-1} + 2^{x-2}) \cos(2^{x-1} + 2^{x-2}) = \frac{1}{4}$.

Решение: умножаваме по 2 двете страни на даденото уравнение и като използваме формулата $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$, получаваме основно тригонометрично уравнение $\sin(2^x + 2^{x-1}) = \frac{1}{2}$. След това намираме, че

$2^x + 2^{x-1} = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$, преобразуваме до $2^x = \frac{2}{3}n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{9}$, но $2^x > 0$, откъдето $\frac{2}{3}n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{9} > 0$ при $n \geq 0$. Корените на даденото уравнение са $x = \log_2\left(\frac{2}{3}n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{9}\right)$, при $n \geq 0$.

Задача 9. Да се реши уравнението $\cos 2^x + \sqrt{3} \sin 2^x = 2 \cos 2^{x+1}$.

Решение: да разделим двете страни на даденото уравнение с 2. Получаваме $\frac{1}{2} \cos 2^x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2^x = \cos 2^{x+1}$. Като използваме, че $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

и $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, то $\cos \frac{\pi}{3} \cos 2^x + \sin \frac{\pi}{3} \sin 2^x = \cos 2^{x+1}$, а оттам и

$\cos\left(2^x - \frac{\pi}{3}\right) - \cos 2^{x+1} = 0$. След това използваме формулата за разли-

ка на два косинуса и получаваме $-2 \sin \frac{2^x - \frac{\pi}{3} - 2^{x+1}}{2} \sin \frac{2^x - \frac{\pi}{3} + 2^{x+1}}{2} = 0$,

откъдето произведението им ще бъде 0, когато имаме множител 0, и на-

мираме, че $\frac{2^x + \frac{\pi}{3}}{2} = \pi n, n \in \mathbb{Z}$ и $\frac{3 \cdot 2^x - \frac{\pi}{3}}{2} = \pi k, k \in \mathbb{Z}$. Преобразуваме полу-

чените уравнения относно 2^x и получаваме, че $2^x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{N}$ и

$3 \cdot 2^x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2^x = \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{N}_0$. След което намираме и коре-

ните $x = \log\left(2\pi n - \frac{\pi}{3}\right), n \in \mathbb{N}$ и $x = \log\left(\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}\right), k \in \mathbb{N}_0$.

Задача 10. Намерете тези стойности на параметъра a , за които уравнението $2 \cos^2(2^{2x-x^2}) = a + \sqrt{3} \sin(2^{2x-x^2+1})$ има поне едно решение.

Решение: като приложим свойството $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$, даденото уравнение може да се запише във вида $2 \cos^2(2^{2x-x^2}) = a + \sqrt{3} \sin(2^{2x-x^2} \cdot 2^1)$. Полагаме $2^{2x-x^2} = y, y > 0$ и получаваме $2 \cos^2 y = a + \sqrt{3} \sin 2y$. След това използваме формулата за понижение на степента $1 + \cos 2y = a + \sqrt{3} \sin 2y$, а оттам делим двете страни на уравнението с $2 \cos 2y - \sqrt{3} \sin 2y = a - 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \cos 2y - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2y = \frac{a-1}{2} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{3} \cos 2y - \sin \frac{\pi}{3} \sin 2y = \frac{a-1}{2} \Rightarrow \cos\left(2y + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{a-1}{2}$. Като вземем предвид, че $|\cos \varphi| \leq 1$ и $y > 0$, получаваме, че $a \in [-1; 2)$.

Задача 11. Да се реши уравнението $\sin(\pi \lg x) + \cos(\pi \lg x) = 1$.

Решение: допустимите стойности на даденото уравнение са: $x > 0$. Като използваме $\cos(\pi \lg x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \pi \lg x\right)$, записваме даденото уравнение по следния начин: $\sin(\pi \lg x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \pi \lg x\right) = 1$. Прилагаме формулата за сбор на два синуса и получаваме произведението

$$2 \sin \frac{\pi \lg x + \frac{\pi}{2} - \pi \lg x}{2} \cdot \cos \frac{\pi \lg x - \frac{\pi}{2} + \pi \lg x}{2} = 1 \Rightarrow \sqrt{2} \cos\left(\pi \lg x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\text{или } \cos\left(\pi \lg x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \pi \lg x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ и}$$

$$\pi \lg x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \text{ След преобразуване намираме, че } \lg x = \frac{1}{2} + 2k$$

$$\text{и } \lg x = 2k, \text{ а оттам } x = 10^{\frac{1}{2}+2k} \text{ и } x = 10^{2k}, k \in \mathbb{Z}.$$

Задача 12. Да се реши уравнението $\sin|\lg x| + \cos|\lg x| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Решение: допустимите стойности на даденото уравнение са: $x > 0$. Като използваме $\cos x + \sin x = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$, преобразуваме даденото уравнение до $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \lg x\right) = \frac{1}{2}$, откъдето $\frac{\pi}{4} + \lg x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ и $\frac{\pi}{4} + \lg x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$.

Преобразуваме спрямо $\lg x$ и получаваме, че $\lg x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi$ и $\lg x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi$, а оттам – и корените $x = 10^{-\frac{\pi}{12} + 2k\pi}, k \in \mathbb{Z}$ $x = 10^{\frac{7\pi}{12} + 2k\pi}, k \in \mathbb{Z}$.

Задача 13. Да се реши уравнението $\sin(2\pi \cos x) = 0$.

Решение: даденото уравнение е равносилно на $2\pi \cos x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$, откъдето намираме, че $\cos x = \frac{n}{2}$. От $|\cos x| \leq 1$ следва $\left|\frac{n}{2}\right| \leq 1$, но $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n = 0, \pm 1, \pm 2$. Решаваме три уравнения:

$$1) |\cos x| = 1 \Rightarrow x = \pi l, l \in \mathbb{Z}.$$

$$2) \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$3) |\cos x| = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

След това получаваме и корените $x = \frac{\pi m}{2}, m \in \mathbb{Z}$ и $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Задача 14. Да се реши уравнението $\sin\left(\frac{\pi \cos x}{\cos^2 x + 1}\right) = 0$.

Решение: съобразявайки, че $\frac{\pi \cos x}{\cos^2 x + 1} = \pi n, n \in \mathbb{Z}$, преобразуваме и получаваме квадратното уравнение $n \cos^2 x - \cos x + n = 0$ относно $\cos x$ при $n \neq 0$. На полученото квадратно уравнение пресмятаме $D = 1 - 4n^2$. Като решим неравенството $1 - 4n^2 \geq 0$ при $n \in \mathbb{Z}$, получаваме, че $n = 0$. Тогава $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Задача 15. Да се реши уравнението $\sin(\sin(\cos x - \sin x)) = 0$.

Решение: решаваме даденото уравнение и получаваме $\sin(\cos x - \sin x) = \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Но като съобразим, че $|\sin \phi| \leq 1$, то $|\pi n| \leq 1 \Rightarrow n = 0$. След това решаваме уравнението $\sin(\cos x - \sin x) = 0$, което е равно силно на $\cos x - \sin x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Използваме тригонометричната формула $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ и по-

лучаваме, че $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi k \sqrt{2}}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Но $|\sin \phi| \leq 1$ и $\left|\frac{\pi k \sqrt{2}}{2}\right| \leq 1 \Rightarrow n = 0$.

Остава да решим уравнението $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi m, m \in \mathbb{Z}$.

В следващите няколко задачи ще разгледаме логаритмични уравнения със сложни аргументи или основи.

Задача 16. Да се реши уравнението $\log_{\left|\sin \frac{\pi x}{4}\right|} (9^x - 3^{x+3} + 30) = \log_{\left|\sin \frac{\pi x}{4}\right|} (3^x + 3)$.

Решение: допустимите стойности за даденото уравнение се определят от неравенствата: $9^x - 3^{x+3} + 30 > 0$, $\left|\sin \frac{\pi x}{4}\right| \neq 1$ и $\left|\sin \frac{\pi x}{4}\right| > 0$. Преобразувам даденото уравнение до $9^x - 3^{x+3} + 30 = 3^x + 3$, а оттук и до $3^{2x} - 27 \cdot 3^x - 3^x + 27 = 0$. Групираме две по две събираемите на полученото уравнение $3^x(3^x - 1) - 27(3^x - 1) = 0$ и го разлагаме на множители $(3^x - 1)(3^x - 27) = 0$. Оттук намираме $3^x = 1$ или $3^x = 27$ и корените са и $x = 0$ или $x = 3$, но $x = 0$ не принадлежи на допустимите стойности следователно $x = 3$ е единствен корен на даденото уравнение.

Задача 17. Да се реши уравнението $\cot gx + \lg(1 + 2^{\cot gx}) = \lg 5 \cot gx + \lg 6$.

Решение: допустимите стойности за даденото уравнение са тези gx , за които $\cot gx > 0$. Полагаме $\cot gx = a$, като $a > 0$, заместваме и получаваме $a + \lg(1 + 2^a) = \lg 5a + \lg 6$. Преобразуваме и получаваме $\lg 10^a + \lg(1 + 2^a) = \lg 30a$, а след това и $\lg 10^a(1 + 2^a) = \lg 30a \Rightarrow 10^a + 20^a = 30a$. Но $a > 0$, откъдето $a = 1$. Заместваме получената стойност на a в уравнението $\cot gx = a$ и получаваме $\cot gx = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k; k \in \mathbb{Z}$.

Решавайки горните задачи, както и подобни на тях, ученикът не само съчетава едни знания с други, но се създават условия за активизиране на учебните му дейности. Важното е да се осъществяват благоприятни ситуации за обучение чрез задачи. Това пък води до развитие на различни механизми на мислене, необходими за откриване, за творчество и за приложение на математически идеи.

REFERENCES/ЛИТЕРАТУРА

- Borodulja, I. (1968). *Exponential and logarithmic equations* (in Russian), Moscow: Prosveshtenie. [Бородуля, И. (1968). *Показателни и логаритмични уравнения и неравенства*. Москва, Просвещение.]
- Vavilov, V. et al. (1987). *Mathematics problems* (in Russian). Moscow: Nauka. [Вавилов, В. и др. (1987). *Задачи по математике*. Москва: Наука.]

- Georgieva, M. & S. Grozdev (2017). *Morphodynamics in the development of the noospheric intellect*. Beau Bassin: LAMBERT Academic Publishing (ISBN 978-3-659-53922-0), 304 pages.
- Zapryanov, Z., V. Vakarelova & B. Dimitrov (1996). *Mathematics for 10-th grade*. Sofia: Prosveta. [Запрянов, З., В. Вакарелова & Б. Димитров (1996). *Математика X клас*. София: Просвета.]
- Zapryanov, Z. & N. Raikov (2012). *How to solve difficult problems easily* (in Bulgarian). Sofia: Prosveta. [Запрянов, З. & Н. Райков (2012). *Как да решаваме лесно трудни задачи*. София: Просвета.]
- Sevrikov, P. & A. Smoljakov (2008). *Trigonometric, exponential and logarithmic equations and inequalities* (in Russian). Moscow: Prosveshtenie (ISBN 978-5-93078-567-8). [Севрюков, П. & А. Смоляков (2008). *Тригонометрические, показательные и логарифмические уравнения и неравенства*. Москва: Просвещение (ISBN 978-5-93078-567-8).]
- Stefanova, D. & P. Penev (2016). One more idea for solving trigonometric equations (in Bulgarian), *Mathematics and Informatics*, 59, 2, 170 – 182. [Стефанова, Д. & П. Пенев (2016). Още една идея за решаване на тригонометрични уравнения. *Математика и информатика*, 59, 2, 170 – 182.]
- Stefanova, D. & P. Penev (2016). Excel helps in solving some exponential equations (in Bulgarian), *Mathematics and Informatics*, 59, 5, 368 – 380. [Стефанова, Д. & П. Пенев (2016). Excel в помощ при решаване на някои показателни уравнения, *Математика и информатика*, 59, 5, 368 – 380.]
- Stefanova, D. & P. Penev (2016). Some groups of logarithmic equations by means of Excel (in Bulgarian), *Mathematics and Informatics*, 59, 6, 599 – 613. [Стефанова, Д. & П. Пенев (2016). Някои групи логаритмични уравнения с помощта на Excel, *Математика и информатика*, 59, 6, 599 – 613.]
- Stefanova, D. (2017). Exponential and trigonometric functions in transcendental equations (Part I), *Mathematics and Informatics*, 60, 1, 57 – 63. [Стефанова, Д. (2017). Показателни и тригонометрични функции в трансцендентни уравнения (I част). *Математика и информатика*, 60, 1, 57 – 63.]
- Stefanova, D. (2017). Logarithmic and trigonometric functions in transcendental equations (Part II). *Mathematics and Informatics*, 60, 4, 351 – 363. [Стефанова, Д. (2017). Логаритмични и тригонометрични функции в трансцендентни уравнения (II част). *Математика и информатика*, 60, 4, 351 – 363.]

Stefanova, D. (2017). Logarithmic and exponential functions in transcendental equations (Part III). *Mathematics and Informatics*, 60, 6, 601 – 615. [Стефанова, Д. (2017). Логаритмични и показателни функции в трансцендентни уравнения (III част), *Математика и информатика*, 60, 6, 601 – 615.]

EXPONENTIAL, LOGARITHMIC AND TRIGONOMETRIC FUNCTIONS IN TRANSCENDENTAL EQUATIONS (PART IV)

Abstract. The paper is dedicated to transcendental equations. Presently, combinations of exponential, logarithmic and trigonometric functions in a transcendental equation are considered. Approaches to solve them are proposed.

✉ **Dr. Diana Stefanova**

Teacher in Mathematics

116, Tsar Ivan Asen II St.

4230 Asenovgrad, Bulgaria

E-mail: dianastefanova13@gmail.com