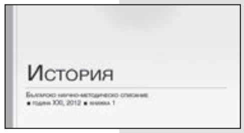
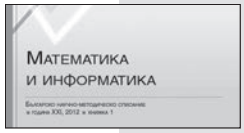
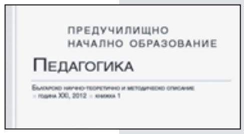
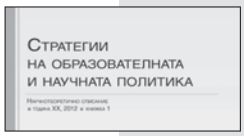
Министерство
на образованието и науката

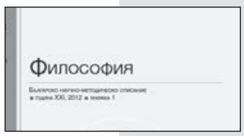
АЗ-БУКИ Национално издателство
за образование и наука

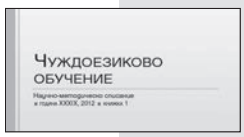












Избрано

от текстовете, публикувани в списанията
на Национално издателство

АЗ-БУКИ

www.azbuki.bg

51 – 52 20 декември
2018 г.

Особеностите при акредитацията на икономическите факултети

www.strategies.azbuki.bg

Списанието се реферира и индексира в Web of Science: Emerging Sources Citation Index

Откъс от „Акредитация и качество на висшето бизнес образование“

Веселин Лулански
Европейско висше училище по икономика и мениджмънт

Институционален контекст

Съгласно справка в регистрите на акредитираните висши училища и програми в НАОА за учебната 2017/2018 година се оказва, че 33 висши училища в България имат в структурата си стопански факултети или катедри, от които: 27 са с програмна акредитация по професионално направление „Администрация и управление“, 26 – по професионално направление „Икономика“, и 14 – по професионално направление „Туризъм“. Това означава, че в почти 2/3 от висшите училища в страната (33 от общо 51) се преподават икономически и/или управленски дисциплини, вследствие на което ежегодно се дипломират хиляди бакалаври и магистри по икономика, администрация и управление и туризъм. В същото време, в резултат на почти пълното приватизиране на държавната собственост през последните 30 години, стихийното развитие на частното предприемачество и продължаващите неясноти относно приоритетите пред развитието на националната икономика, се породи влошаване на условната връзка между висшите училища и пазара на труда. Хаотичният трудов пазар формира информационни дефицити и неустойчивост на тенденциите в заетостта по сектори, което, от своя страна, спомогна за нереалистични квоти за прием на висшите училища в комбинация с други фактори, като начина на финансиране съобразно броя обучавани, предпочитанията в студентския избор на по-елитарните управленски специалности, повторения на одобрени капацитети от предходни години без отчитане на повсеместните тенденции на спад в броя на кандидатстванията и други. Засилената конкуренция на пазара на висше образование – вътрешна и международна – принуди висшите училища със стопански факултети (ВУСФ) да отстъпят от редица свои изисквания към студентите, предлагайки занижени

Заглавието е на редакцията

Главен редактор
Проф. д-р Ирина Колева
E-mail: kolevaira@gmail.com

Редактор
Д-р Албена Симова
0889 88 21 83

Тел.: 02/425 04 70
02/425 04 71

E-mail: strategies@azbuki.bg

Съдържание на сп. „Стратегии на образователната и научната политика“, кн. 5/2018:

Приложение на вестник АЗ-БУКИ

критерии по приема – често по документи и без изпит, занижени критерии, свързани със студентското оценяване и успеваемост, но и отсъствие на ясен ангажимент към професионалната им реализация, което поставя в риск качеството на полученото образование и професионалната пригодност на получената диплома. Оттук стигаме и до парадокса на затворения кръг на взаимодействие на висшите училища, трудовия пазар и държавното управление в тези два сектора, водещ до следните резултати: публично финансиране на в голямата си част недостатъчно подготвени, но в максимален брой кандидат-студенти за неясно доколко съществуващи трудови позиции, получаващи дипломи без гаранция за актуални знания и умения, в примиренческия климат на обикновено административно съответствие от страна на академичната общност. Всичко посочено не трябва и не може повече да се подминава безучастно, особено в управленските специалности, защото създадената неефективност неминуемо води до усещащата се липса на експертност в управлението на всички нива и съпътстващите го недобри национални икономически и социални показатели.

Капацитетът за прием на студенти в държавни и частни висши училища продължава да повтаря остарели квотни стереотипи, като липсва реално повишаване на качеството на обучение и студентската успеваемост. В Националната програма за развитие на България 2020 (МС 1057/2012 г.) са декларирани образователни стратегии по приоритети, като например повишаване на качеството на образованието и обучението и качествените характеристики на работната сила, които са общи за всички направления, но в индикаторите на Програмата няма реални измерители на това качество: косвено близки са дял на населението във възраст 25 – 64, участващо в образование/обучение през последните 4 седмици (1,2% за 2016 г.), относителен дял на населението 30 – 34 с висше образование (27%), дял на заетите със завършено висше, средно или професионално обучение (68%). В отчета на хода на Програмата за периода 2017 – 2019 година (Тригодишен план за действие за изпълнението на Националната програма за развитие: България 2020 в периода 2017 – 2019 г.; МС 1080/2016 г.) са посочени реализиращи се мерки по усъвършенстване на Рейтинговата система на висшите училища, включване на международни експерти в работните групи на НАОА, програмата за субсидирани студентски практики, но същевременно прави впечатление отсъствието на дейности по мерки, свързани с реинтеграцията на млади кадри за висшите училища и институти (100 млн. лева предвиден бюджет), финансови стимули за изграждането на научна инфраструктура в партньорство с бизнеса (460 млн. лева предвиден бюджет), подпомагане на алумни организации (1 млн. лева предвиден бюджет) – всички тези операции дори не са разработени към датата на последния доклад от октомври 2016 г. Формално погледнато, има взети решения, част от които касаят повишаване на качеството на висшето образование и неговото оценяване, но към май 2018 г. няма официална информация за тяхното фактическо изпълнение.

Относно акредитациите

Акредитацията и получената акредитационна оценка показват стойността на дипломата на висшето училище, като в този смисъл акредитационната агенция може да се разглежда като един от пазарните посредници в процеса на наемане на абсолвенти (виж т.нар. „меки регулации" в Willmott, 2011). Тя служи като лице и имидж на образова-

Приложение на вестник Аз-буки

телната институция, символ на легитимност, качество и репутация. В България съществуват две отделни процедури за оценка на качеството на висшите училища – **институционална акредитация и програмна акредитация**. Това създава известно объркване предвид тяхната генерична свързаност, като допълнително натоварва висшите училища с перманентни ангажименти по разминаващи се по време и акцент на съдържанието процедури. Съществуват и редица международни акредитационни организации, като основните външни акредитации в областта на бизнес училищата са тези на AACSB (Асоциацията на асоциираните колегиални бизнес училища), EFMD-EQUIS (Европейската фондация за развитие на мениджмънта) и AMBA (Асоциацията на МБА програмите). Те са доброволни, различават се по отношение на своя произход, обхват и форма на акредитация и са сравнително скъпи като административна цена. В България нито едно ВУСФ няма подобна акредитация.

Актуалните критерии за **институционална акредитация** на НАОА се съдържат в 10 стандарта и 12 критерия със съответните им оценъчни коефициенти. Дванадесетте критерия включват отделни съдържателни компоненти (подкритерии) – общо 45 на брой, като за изпълнението на всеки компонент съответстват определен брой точки. Обобщената оценка за изпълнението на всеки критерий се съставя съгласно събраните точки от неговото съдържание въз основа на представени доказателства (документални и от физическата проверка на място), като най-често това са вътрешната нормативна уредба на висшето училище, наличие и спазване на процедури и процеси при изпълнение на дейностите, статистическа и документарна отчетност, ресурсна осигуреност, вътрешен и външен контрол върху качеството, обратна връзка от широк кръг заинтересовани лица, публичност и други. При критериите за **програмна акредитация** на НАОА отново има заложени 10 стандарта и 12 критерия, почти напълно идентични с тези на институционалната акредитация, като тук критериите са насочени към програмното съдържание. В обхвата на критериите за програмна акредитация има известни различия с тези от институционалната: те са 49 на брой и в голямата си част засягат учебното съдържание по професионалното направление, а не общия институционален профил на висшето училище.

Стандартите от критериалната таблица на НАОА съвпадат и за двата вида акредитации (НАОА, 2018), като в момента включват: политика по осигуряване на качество, разработване и одобряване на програми; обучение, преподаване и оценяване, ориентирани към студентите; прием, развитие, признаване и сертифициране на студентите; преподавателски състав; учебни ресурси и подпомагане на студентите; управление на информацията; информация за обществеността; текущ мониторинг и периодичен преглед на програмите; циклично външно осигуряване на качеството. Редица ръководители и представители на Академията, сред които и авторът, считат, че **обединяването на институционалната с програмната акредитация е логично и рационално,** тъй като в допълнение на ползи, като целесъобразност, пълен преглед на качеството, яснота на планиране, комплексна резултатност и ефективност, то ще създаде възможност и за реално вникване в съдържанието на основните дейности на висшето училище и реалните критерии за тяхната оценка и подобрение, т.е. процесът по акредитация ще стане по-разбираем, прозрачен, полезен и демократичен инструмент за акционерите на висшето училище: студенти и преподаватели, бизнес и общество, националната и международната образователна общност.

Практически предложения към етапите на акредитационния процес

Доклад самооценка. Обичайно след стартиране на процедура по акредитация се изготвя доклад самооценка, след което висшето училище се посещава от експертна група на НАОА, която, на свой ред, изготвя доклад с препоръка за акредитация и акредитационна оценка, като окончателното решение се взема от акредитационен съвет на НАОА. Докладът самооценка се изготвя по посочените стандарти и критерии, като е важно той да бъде добре планиран, задълбочен и разбираем. Неговото подготвяне трябва да бъде систематичен процес, а не няколкомесечно упражнение. **Докладът следва** да отговаря на ключови въпроси, а не просто да констатира формална наличност или не. Трябва да бъде балансиран и обективен – вярно да посочва актуалното състояние, съответните силни и слаби страни на висшето училище, както и да заяви решимост за разрешаване на проблемите. **Възможно е да излиза от рамката на посочените източници** на информация в критериалната таблица: колкото повече източници на информация са посочени, толкова по-добре. **И трето, докладът следва да бъде инклузивен,** т.е. при събирането на данни и оценяването на резултатите трябва да участват различни групи заинтересовани лица от висшето училище, за да се постигне по-голям консенсус относно изводите и препоръките с цел подобряване на обективността и комуникацията, включване на различни перспективи и убеденост в резултатите. При някои от външните акредитации се изготвя дори отделен студентски доклад по избрани критерии от самите студенти, който се разглежда по време на срещата на експертната група със студентите.

Посещение на експертна група. Експертната група се среща с ръководството на висшето училище, разглежда и оценява програмното портфолио, академичното управление на факултетите, научноизследователската дейност (НИД), ръководителите на програми или специалности, програмното съдържание – учебни планове и програми, квалификационни характеристики, разписания на учебния процес и друга документация, състава на студенти, преподаватели и администрация, **финансовото управление и контрол, наличието на корпоративни връзки и кариерен център, алумни организация на завършилите.** При програмната акредитация първо се разглежда и оценява цялото портфолио, а след това може да се изследва в детайл избрана/и специалност/и. Оценяването се извършва чрез коефициент – резултат с претеглена тежест, но може да бъде и синтетично, отчитайки дали са покрити, или не определени изисквания. Едва след изготвяне на независимите оценки на участниците в експертната група се прави обсъждане и се изгражда консенсусно решение, което се оформя в съответен доклад на групата и впоследствие се докладва на акредитационен съвет.

Общи характеристики на ВУСФ

Спецификите на бизнес училищата най-ясно и съпоставимо биха могли да се разглеждат не през общите рамки на националните организации на висшите училища, а по същество – т.е. по групи критерии, свързани с основните им структури и дейности. Така ще може да се отчетат редица специфични критерии, свързани с институцията/факултета, учебните планове, студентите, преподавателите, научноизследователските дейности, административните и физическите ресурси, както и по-общите критерии на средата, като корпоративни връзки, интернационализация и бизнес етика. Съвършено необходим момент е **равноправното участие на студентите в процеса на акредитация**, разбирането за студентската гледна точка по поставените въпроси, изхождайки от обстоятелството, че студентите са ключов фактор в учебното заведение, дефакто изпълняващи ролята на инвеститор, участник, бенефициент, партньор и бъдещ референт.

Мисията, визията, целите и задачите на бизнес училището следва да бъдат ясно посочени, разбираеми и споделяни от всички участници в учебния процес. Училището трябва да има реалистична стратегия, отговаряща на пазарното позициониране, ресурси и ограничители. Училището следва да изгради ефективна управленска организация, така че да може да определя своите дейности и да предопределя бъдещото си развитие. Училищната идентичност, мисия и стратегически цели трябва да отговарят на рамките на националния и **международния** контекст, в който то оперира, както и на националния и международния пазар на своите специалности и услуги (виж още Amann, W. Et al., 2012). Училището следва и да демонстрира, че действията му са в унисон със собствените му етични стандарти и норми, с ясно застъпени области на отговорно управление и устойчиво развитие. Училището трябва да е ясно разпознаваемо в съответствие със своята идентичност и обществена легитимация. Особена важност имат **структурата на управление и процесите на вземане на решения.** Опитът в това отношение е еднозначен: неефективните управленски процеси са основен недостатък пред постигането на качество в образованието. Това важи както за избора на предлагани специалности, така и за управлението на ресурсите (финансови, човешки, материални). Мениджмънтът на висшето бизнес училище следва ясно да покаже, че на основата на наличните ресурси, възможности, специалности и интелектуален потенциал добре познава кои са целевите му образователни пазари и групи, както и кои са трудовите пазари, където намират реализация неговите студенти. Нещо повече, мениджмънтът следва да управлява добре и два други критични компонента, които ще бъдат разгледани по-долу – маркетинговото управление на училището и корпоративните му връзки. При представянето на училищната среда е необходимо да бъдат отчетени и основните акционери на училището, финансови партньори и конкуренти, взаимодействията му с пазара на труда и социалната среда. Важно е всичко посочено да има ясен количествен или синтетичен измерител за състоянието и промяната за изследвания период.

Управление на ВУСФ. По отношение на управлението на бизнес училището, от голяма важност са неговата структура, разпределението на задължения и отговорности, както и системата за контрол при изпълнението на задачите, например на кого е длъжен да се отчита ректорът или деканът на училището (настоятелство, министър, акционери и т.н.), какви правомощия има той, как управлява (финансово и стратегически), има ли външен контрол и наблюдение (от кого и как), по какъв начин студентите участват в управлението на училището, как училището прилага принципите на етика и отговорно устойчиво управление. Текущото **стратегическо позициониране** следва да изхожда и от отговора на въпроса кои са основните акционери, които училището обслужва, и каква е тяхната относителна важност при вземането на решения по стратегически въпроси и при инвестиране на ресурси. И тъй като все пак се преследват учебни резултати, следва да е ясно кои са стратегиите за постигане на педагогически иновации и/или технологични образователни продукти. Важно е как училището следи за изпълнението на стратегическите си цели, как ги променя, как ги прави публични, как те се вписват в останалите дейности, как се възползва от нови възможности, как преценява и прави превенция на рисковете. По отношение на **стратегическата политика по качеството** отново особено важни и проблемни се оказват наблюдението и реакцията на дадено моментно състояние на училището. В този смисъл е необходимо да има яснота по отношение на методите за проследяване на изпълнението на индивидуалните цели, както и на основните индикатори за изпълнение на дейностите. И в частност, по отношение на **корпоративните връзки** следва да се изясни как бизнес лидерите извън училището участват в неговите органи на управление, както и има ли училището отделна политика и стратегия по управление на връзките си с корпоративния свят.

В заключение, по въпросите на управлението може да се посочи, че бизнес училищата са създадени, за да обслужват корпоративния пазар, и мисията им следва да отговаря на екзистенциални въпроси, като например защо съществуват и за какво служат, каква е тяхната мисия в рамките на образователната общност и трудовия пазар. Визията за бъдещето показва управленската амбиция за развитие на училището, а стратегиите най-общо планират пътя към реализиране на визията в рамките на заявената мисия.

Програмно съдържание. Учебните планове на висшето бизнес училище следва да са внимателно разработени, за да реализират нужния баланс между знания и умения и да предоставят възможност за проследяване на резултатите от обучението. Методите за разработването им следва да са релевантни на съвременните образователни практики. Не трябва да се пропуска и сериозното изследване на качеството на студентските постижения. Програмите трябва да бъдат осигурени с качествени преподаватели, да са добре управлявани и административно обслужвани, както и редовно оценявани чрез обратната връзка от студенти и други заинтересовани лица. Програмите следва да отразяват националните и регионалните особености, но в глобален контекст (виж Crosling, G. et al., 2008). За това съществено допринася увеличаващото се сходство в програмното проектиране след проведените реформи на Болонския процес, осигуряващи съвместимост на степени и мобилност на студенти. В програмното съдържание трябва да намират отражение стратегиите и политиките към образование, обучение и преподаване и да се вижда как те са насочени към различните целеви пазари. В тях се търси адекватност на финансови и учебни ресурси, които подкрепят учебното портфолио. В България нерядко се наблюдават проблеми, свързани с прекаленото увеличаване броя на учебните предмети и програми. Процесът по определяне на програмите следва да бъде ясен на всеки един етап – планиране, предоставяне, мониторинг и оценка, тъй като за това доколко отделната дисциплина допринася за процеса на обучение, е видно от студентския интерес и постигнатите резултати.

Управлението на програмите е важно – необходимо е да се дефинират ясно ролите на академичното и административното ръководство по програми. Всяка програма трябва да има ясно посочена цел, задачи и резултати от обучението. Важна е и обратната връзка от студенти и работодатели. Студентите е добре да бъдат по-ясно ориентирани по отношение на специфичните знания и умения, придобивани чрез учебното съдържание.

Принципите на етика, отговорност и устойчивост следва да бъдат интегрирани в програмите. За обществото е важно каква ценностна система възпитава висшето училище у бъдещите бизнес лидери (Loulanski, 2016c). Чрез ИТ системи училището може да оптимизира обучението, както и практическото прилагане на учебните резултати. Дистанционното обучение би трябвало да отговаря на същите стандарти за качество, както и редовното обучение.

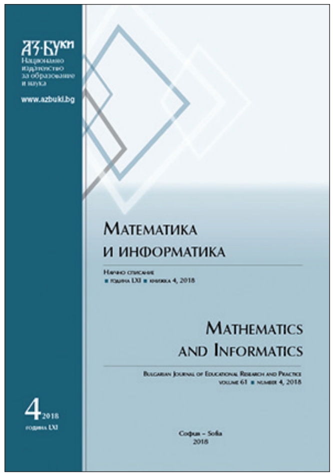
Оценяването на студентите е важно да следва целите и философията на всяка дисциплина, но да бъде точно, задълбочено и надеждно. Тук се проявява още една особеност при бизнес училищата, а именно необходимостта от **баланс между академично развитие и развитие на управленски компетенции**.

Всяка програма следва да се оценява по отношение на актуалността на предлаганото учебно съдържание, качеството и ефективността от обучението (постигнати учебни резултати). Необходим е баланс между различните нива на преподавани програми – бакалавър, магистър, доктор, обучение за стопански ръководители. Трябва редовно да се отчитат силните и слабите страни на програмите, как се вписват и с какво допринасят в рамките на училището. Проследяването на промените през годините, както и бъдещите планове за реформи следва да бъдат оценявани на базата на системата за програмно управление.

Основен е въпросът как програмите отговарят на нуждите на своите участници и на пазарите, които обслужват. Важно е да се посочат и кои са уникалните характеристики, отличаващи ги от други училища. Българските училища могат да заимстват много от западните бизнес училища, използвайки принципа на т.нар. диалектика на прогреса. В този смисъл, следва да се провери дали има насърчаване от страна на училището на иновации и креативност, на мултидисциплинарност в програмите. Как училището актуализира съдържанието с най-добрите практики, основни тенденции и значими иновации в световен мащаб. В същото време, нека тази оценка бъде щадяща, отчитайки бизнес средата в страната, определените правомощия на ръководствата, ограничените ресурси (финансови, човешки, материални) и цялостното поскоро резервирано отношение към институциите на науката и образованието (Loulanski, 2013).

Пълния текст четете в „Стратегии на образователната и научната политика", кн. 5

Някои от основните хипотези за простите числа



Откъс от „За простите числа“

www.mathinfo.azbuki.bg

Списанието се реферира и индексира в Web of Science: Emerging Sources Citation Index

Сава Гроздев
Висше училище по застраховане и финанси – София

Веселин Ненков

Главен редактор
Проф. д.п.н. Сава Гроздев
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

Редактор
Живка Бакалова
0878 652 676

Тел.: 02/425 04 70
02/425 04 71

E-mail:mathinfo@azbuki.bg

По време на Световния конгрес на математиците през 1912 г. в Кеймбридж, Англия, немският математик Едмунд Ландау (1877 – 1938) формулира 4 основни проблема относно простите числа, характеризирани от докладчика като „невъзможни да бъдат атакувани при съвременното състояние на математиката“. Към днешна дата, повече от 100 години след доклада на Ландау пред делегатите на конгреса, *проблемите на Ландау*, както са известни в математиката, продължават да бъдат нерешени. Става дума за:

1. хипотезата на Голдбах (за Голдбах ще стане дума по-нататък), че всяко четно естествено число, по-голямо от 2, е сбор на две прости числа;
2. хипотезата за простите числа близнаци, че съществуват безброй много прости числа p, за които числото $p + 2$ е също просто;
3. хипотезата на Льожандър (Андре-Мари Льожандър (1752 – 1833) е френски математик), че между всеки две последователни съвършени числа съществува поне едно просто число;
4. хипотезата, че съществуват безброй много прости числа p, за които числото $p – 1$ е точен квадрат, т.е. че съществуват безброй много прости числа от вида $n^2 + 1$.

Основно настоящата статия е посветена на втория проблем на Ландау.

Английският математик Годфри Харди (1877 – 1947) е защитник на тезата, че качествена математика се прави от млади умове. В книгата си (Hardy, 2004), която се счита за едно от най-добрите описания на прозренията на един действащ математик, предназначено за непрофесионалисти, той пише: „Не познавам голямо постижение в математиката, което да е дело на чо-

---

Заглавието е на редакцията

Приложение на вестник Аз-буки

век, преминал петдесетте". Разбира се, подобно твърдение може да се приеме и като проява на скромност от страна на Харди за качествата на книгата му, която той публикува през 1940 г. на 62-годишна възраст. По-нататък авторът продължава: „Ако човек на зряла възраст загуби интерес към математиката и се отдалечи от нея, това едва ли е голяма загуба за математиката и за самия него". Изключение от подобно твърдение със сигурност е свързано с родения в Китай през 1955 г. американски математик Уитанг Занг (Yitang Zhang). В продължение на десетина години след завършване на докторската си дисертация въпросният Занг даже не работел като математик, а като счетоводител в щата Кентъки. Той напуснал службата си, която заемал в един ресторант за бързо хранене в станция на метрото, и станал преподавател в Университета в щата Ню Хемпшир. През 2013 г., когато е на 57 години, Занг анонсира изключително важно математическо откритие в (Yitang, 2014). През следващата година публикацията в цитираното първокласно списание му носи една от най-престижните награди в математиката – тази на фондация „МакАртур" (625 хил.щ. долара), а така също и професорска позиция в Калифорнийския университет в Санта Барбара. Публикацията на Уитанг Занг е свързана с т.нар. „хипотеза за простите числа близнаци", която е с около 200-годишна история. Занг не доказва хипотезата, но прави значителна стъпка към потвърждаването ѝ. И макар че оттогава нещата не са отишли много далеч, откритието му вдъхновява получаването на обещаващи резултати и нови прозрения в областта на простите числа. Постижението на Уитанг Занг се отнася до първата крайна оценка за разликата между две последователни прости числа.

Просто число е такова естествено число $n>1$, което се дели само на числото 1 и на себе си. Прости са числата 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, … и т.н. Те са с важно приложение в съвременната криптография и са свързани например със сигурността на кредитните ни карти. Но истинската роля, която играят, е в областта на теорията на числата, в тази част от математиката, която е посветена на целите числа. Простите числа са градивните елементи на числата, защото всяко естествено число, по силата на основната теорема на аритметиката, може да се представи по единствен начин като произведение на прости числа и техните степени. Известният английски математик Джеймс Майнард (р. 1987 г.) от Оксфордския университет в Англия, който дава ново доказателство на теоремата на споменатия Уитанг Занг, казва: „Същата идея съществува и в химията. За да изучите свойствата на някое сложно съединение, следва да разберете от кои атоми е съставено то и как тези атоми са свързани помежду си". Основната теорема на аритметиката гласи: всяко естествено число $n>1$ може да се представи по единствен начин във вида $n=p_1^{k_1}.p_2^{k_2}\dots p_m^{k_m}$, където $p_1, p_2, \dots, p_m$ са всички прости делители на *n*, а $k_1, k_2, \dots, k_m$ са съответните им кратности.

Интересът към простите числа датира от времето на древните гърци. В своите *Елементи* Евклид (III – IV в.пр.н.е.) дава едно красиво доказателство на факта, че простите числа са безброй много. Ето това доказателство. Да допуснем, че простите числа са краен брой, и да означим техния брой с n. Нека самите прости числа са $p_1, p_2, ..., p_n$. Да разгледаме числото $q = p_1.p_2. ... p_n + 1$. Ясно е, че остатъкът при деление на q с кое да е просто число от списъка е равен на 1, т.е. q не се дели на никое просто число. Следователно q е просто и това е противоречие.

От факта, че простите числа са безброй много, следва, че не съществува най-голямо просто число. Проблемите се появяват, когато искаме да разберем как са разпределени простите числа върху числовата права. В края на XIX век френският математик Жак Адамар (1865 – 1963) и белгийският математик Шарл Пусен (1866 – 1962) (когото кралят на Белгия удостоява с титлата барон) независимо един от друг доказват т.нар. теорема за простите числа, която дава оценка за броя на простите числа, които са по-малки от предварително зададено число. Тази теорема е свързана с информация за осредненото разпределение на простите числа по числовата права, което наподобява разпределението на простите числа до 100. Например първите прости числа са 2, 3 и 5, които са близо едно до друго. Разстоянието между двете най-големи прости числа до 100, т.е. между 89 и 97, е значително по-голямо. След 100 обаче са простите числа 101, 103, 107 и 109, които са отново близо едно до друго. И макар че разпределението на по-големите прости числа е с по-големи разстояния между тях, в осреднен смисъл се оказва, че съседните прости числа, които са близо едно до друго, са много. В това се състои интуитивната същност на теоремата на Уитанг Занг. И точно тук идва хипотезата за простите числа близнаци. С изключение на 2 и 3, които са едно до друго, няма друга двойка прости числа, които се различават с 1. Причината е, че 2 е единственото четно просто число. За сметка на това примерите на съседни прости числа, които се различават с 2, са много: 3 и 5, 17 и 19, 41 и 43, …., 107 и 109, и т.н. Такива прости числа се наричат *прости числа близнаци*.

Хипотезата за простите числа близнаци гласи, че те са безброй много. След като простите числа са безброй много, естествено е да се очаква, че и близнаците са безброй много. Съществуват сериозни основания за това. Едно от важните е, че с помощта на компютри са намерени доста големи прости числа близнаци, при това значителен брой. Въпросът е дали компютърът е успял да открие най-голямата двойка. Съмненията се засилват от наличието на модел за формулиране на съдържателни хипотези относно броя на двойките близнаци, които се намират до дадена точка от числовата права. В същото време, тази точка може да се фиксира произволно далеч. Всичко това обаче е недостатъчно за потвърждаване на хипотезата за простите числа близнаци, защото математиците се нуждаят от неопровержимо доказателство, т.е. от математическо доказателство, което да не поражда съмнения, както доказателството на Евклид за безкрайния брой на простите числа не допуска каквато и да е мисъл за противното. За съжаление, такова доказателство все още липсва.

Всъщност през 2013 г. Уитанг Занг доказа, че съществуват безброй много двойки съседни прости числа, разстоянията между които са по-малки от 70 милиона. На пръв поглед, 2 и 70 милиона са несравними, но 70 милиона е крайно число и затова теоремата на Занг е важна. „Самият факт, че е получено някакво число, е необикновен – споделя английският математик Ендрю Гранвил (р. 1962 г.) от Университета в Монреал и Юнивърсити колидж в Лондон, който е специалист по теория на числата. – Много хора са се опитвали и не са успявали. Изобщо не вярвах, че това е възможно да се случи."

Макар че оценката е подобрена, за което ще стане дума по-долу, до този момент сериозен напредък за доказване на хипотезата за простите числа близнаци не е направен. Постижението на Уитанг Занг е значимо и по друга причина. В доказателството си Занг използва подход, който много математици пренебрегват. Става дума за т.нар. „метод на решето", който датира от времето на древногръцкия математик Ератостен (276 г.пр.н.е. – 195 г.пр.н.е.). За да отдели простите числа от останалите, Ератостен методично задрасквал всички естествени числа от 1 нататък, които не са прости. Например, за да отделим простите числа, които са по-малки от 100, тръгваме от простото число 2 (преди това сме задраскали 1, което не е просто по дефиниция) и задраскваме всички числа, които се делят на 2, т.е. всяко второ число. Първото число след 2, което остава незадраскано, е 3 и следователно то е просто. По-нататък задраскваме всички числа, които се делят на 3, т.е. всяко трето число от незадрасканите. Първото незадраскано число след 3 е 5 и следователно 5 е просто. Продължаваме по същия начин до изчерпване на списъка. Остават незадрасканите числа, които са простите числа от 1 до 100. В този случай решетото се нарича „решето на Ератостен".

Методът на решето е ръчен метод и предизвиква отегчение, но все пак е работещ. Подобна идея в по-съвършен вид използва и Уитанг Занг в доказателството на своята теорема. Методът на решето е усъвършенстван в различни посоки. Така, преди десетина години (преди анонса на Уитанг Занг) американският математик Даниел Голдстън (р. 1954 г.), унгарският математик Януш Пинтс (р. 1950 г.) и турският математик

Цем Уилдирим (р. 1961 г.) използват модифицирана версия на метода на решето (различна от тази на Уитанг Занг) и получават резултат, който, базиран на хипотезата на Елиот-Халберстам (Питър Елиот, р. 1941 г., е американски математик, а Хейни Халберстам, 1926 – 2014, е английски математик), подобрява резултата на Уитанг Занг от 70 милиона на 16. Тук сме свидетели на подход, който е доста често срещан в математиката – от една хипотеза се отива към друга, от верността на която следва придвижване на първата. Междупрочем по подобен начин Ендрю Уайлс (Grozdev & Nenkov, 2016) атакува Великата теорема на Ферма, при доказателството на която потвърждава хипотезата на Танияма-Шимура (Grozdev & Nenkov, 2016). Да отбележим изрично, че резултатът на Уитанг Занг е чист и не се позовава на друга хипотеза, т.е. не се позовава на недоказани твърдения.

Веднага след анонса на Уитанг Занг се появиха опити да се вникне в подхода на автора. Оказа се, че границата 70 милиона не е най-добрата, до която може да се стигне с използваните от Занг аргументи. Онлайн беше стартирано т.нар. „Полимат“ сътрудничество, инициатор на което е австралийският доцент по математика Скот Морисън (р. 1982 г.) от Австралийския национален университет. Един от първите, които се включиха в инициативата, е вероятно най-гениалният математик на нашето време – носителят на милиондоларовата награда на Института „Клей“ и Фийлдсов лауреат, известният американски математик с австралийско-китайски произход Теренс Тао (р. 1975 г.) от Калифорнийския университет в Лос Анджелис. Идеята на проекта „Полимат“ е да се работи публично върху нерешени проблеми чрез интернет. Само след няколко месеца беше доказано, че съществуват безброй много двойки последователни прости числа, разликите между които не надминават 4680. Така от 70 милиона се стигна до 4680.

Всичко възможно от подхода на Уитанг Занг беше „изстискано“ и прогресът по проекта замря. Появи се необходимост от нови „оръжия“. Споменатият в началото Джеймс Майнард предложи да се използват т.нар. прости дупки. Става дума за следното: ако p_n и p_{n+1} са последователни прости числа, то разликата $g_n = p_{n+1} - p_n$ се нарича n-та проста дупка. Пак чрез метода на решето, и по-точно с използване на подобрена версия на подхода на Голдстън-Пинтс-Уилдирим (вж. по-горе), но вече приложена към прости дупки, Майнард подобри оценката до 600. Той успя да реши и „най-скъпата“ задача, поставена от унгарския математик Пол Ердьош (1913 – 1996) и свързана с теоремата на шотландския математик Робърт Ранкин (1915 – 2001) от 1936 г., която гласи, че съществува такава константа $c > 0$, че за безброй много стойности на n е изпълнено неравенството

$$g_n > \frac{c \log n \log\log n \log\log\log\log n}{(\log\log\log n)^2}.$$

Задачата на Ердьош е да се потвърди или опровергае твърдението, че константата c може да се вземе произволно голяма. През 2014 г. Майнард решава положително задачата на Ердьош (независимо от него, но малко по-късно, задачата е решена и от Кевин Форд, Бен Грийн, Сергей Конягин и Теренс Тао) и получава определената от екстравагантния унгарец награда в размер на 10 хил. щ. долара. Освен със значимите си резултати и голямия брой публикации, който го доближава до изключителната продуктивност на Леонард Ойлер, Пол Ердьош е известен и с това, че обявявал парични награди за успешното решаване на трудни математически задачи – колкото по-трудна била една задача, толкова по-голяма била паричната награда за нея.

През м. април 2014 г. проектът „Полимат“ бил възобновен и с помощта на новия метод на Майнард оценката 600 била подобрена до 246. Засега всичко свършва дотук. Пътят от 246 до 2 е доста по-кратък в сравнение с пътя от 70 милиона до 246, но трудността да се извърви този път, е обратно пропорционална на дължината му, и то с порядъци. Проблемът е в дефиницията на простите числа и начина, по който методът на решето работи. От една страна, простото число притежава само един делител (себе си), а от друга – методът на решето губи ефективност, когато се прилага за числа с нечетен брой прости делители. „Случаят наподобява радара, който засича нарушителя, но заедно с него и голям брой неправилно заподозрени – казва Джеймс Майнард. – Не е възможно да различиш „сигналите”, които се отнасят до простите числа, от тези, които са свързани с числа, „приличащи“ на прости, но притежаващи два или четири прости делителя“, продължава Майнард. Сблъскваме се с т.нар. проблем за четността, за решаването на който все още не е открит подходящ подход. Все пак Майнард споделя оптимистичното си усещане за краен успех, което се основава на неотдавнашно откритие: осреднението поведение на числата върху далечни интервали от числовата права се поддава на модели за по-близки до началото. Тази идея е доста стара и е била считана за изключително трудно реализуема, дори невъзможна. Но през 2015 г. финландската математичка Кайса Матомаки (р. 1985 г.) от Университета в Турку, Финландия, и канадският математик с руски произход Максим Раджиуил (р. 1988 г.) от Университета „МакЖил“ в Монреал доказаха именно това. „Те установиха – казва Джеймс Майнард, – че почти винаги, когато някой интервал от числовата права се „пренесе“ назад към началото, се получават числа с четен брой прости делители и числа с нечетен брой прости делители. Това е един технически резултат, който е много вълнуващ за нас, защото получаващите се по този начин „гайки“ и „болтове“ могат да се използват в други области.“ Да отбележим, че по този начин Теренс Тао успя да потвърди хипотезата на Чоула (Сарвадаман Чоула, 1907 – 1995, е индийски математик, роден в Англия), известна като „бебешки вариант“ на хипотезата за простите числа близнаци и появила се като преходен етап в доказването на оригиналната хипотеза. Тао разглежда редицата $1\times3,\ 2\times4,\ 3\times5,\ 4\times6,\ 5\times7,\ \ldots$ и показва, че вероятността една число в тази редица да има нечетен брой прости делители, е равна на вероятността това число да има четен брой прости делители. Примерът е свързан с проблема за четността в термините на вероятностите. Нито един от тези резултати не е пряко свързан с хипотезата за простите числа близнаци. Макар че е бил шокиран от резултата на Матомаки и Раджиуил, споменатият по-горе Ендрю Гранвил не е убеден, че той (резултатът) ще помогне в потвърждаването на хипотезата за простите числа близнаци. „Изобщо не е ясно как би могло да стане това“, споделя Гранвил. За разлика от него Джеймс Майнард е оптимист. „Всякакви резултати относно проблема за четността са добре дошли“, казва той. Различните мнения са повод да се смята, че краен успех не е реално да се очаква преди появата на звезда от рода на Уитанг Занг. Отново се сблъскваме с обстоятелство, типично за развитието на математиката – прогресът е бавен, докато не се появи някое зашеметяващо откритие.

През м. май 2016 г. се появи онлайн публикацията arXiv:1603.03720v4, в която се съобщава, че е открито ново, по-рано незабелязано свойство на простите числа. Автори на анонса са индийският математик Канан Саундарараджан (р. 1974 г.) от Станфордския университет в Калифорния и американският математик Робърт Лемке Оливър (р. 1987 г.) от Университета Тъфтс в гр. Медфорд, щата Масачузетс. Става дума за следното. Ясно е, че освен 2 и 5 всички прости числа завършват на 1, 3, 7 или 9. Ако последната цифра на едно просто число се появява случайно, както се очаква, то не следва да има значение каква е последната цифра на предходното просто число. Всяка една от четирите възможности 1, 3, 7 или 9 трябва да има 25% шанс да се появи в края му. Оказва се, че не е така. Проверявайки с помощта на компютър първия един милиард известни прости числа, двамата математици забелязали, че тези, които завършват на 1, са последвани от просто число с единица в края само в 18,5% от случаите – факт, който не би се получил, ако простите числа бяха разпределени случайно. Простите числа, завършващи на 3 или 7, последвани от просто число с единица в края, са по 30%, докато простите числа, които завършват на 9, са последвани от прости числа с единица в края в 22% от случаите. Проверката установява също, че вероятността след просто число, завършващо на 9, да следва число, завършващо на 1, е с 65% по-голяма от вероятността след него да следва число, отново завършващо на 9. Излиза, че простите числа не са разпределени съвсем случайно. „Беше много странно – споделя Саундарараджан в английското сп. *New Scientist*. – Имаш чувството, че притежаваш картина, която познаваш отлично, но в един момент осъзнаваш, че има фигура от нея, която никога не си виждал преди това.“ Въз основа на наблюденията Саундарараджан и Лемке Оливър създават модел (Lemke Oliver & Soundararajan, 2017), който описва поведението на окончанията на простите числа. Подобни модели се появяват и за комбинации от окончания. Те по аналогичен начин се отклоняват от очакваните произволни стойности. Тази закономерност е проверена и при други бройни системи, различни от десетичната. Оказва се, че и там е същото. Това означава, че закономерностите в моделите не са в резултат на десетичната бройна система, а описват присъщо свойство на самите прости числа. Моделите обаче губят устойчивост при нарастване на числата. Саундарараджан и Лемке Оливър, заедно със свои сътрудници, са разработили компютърна програма за продължаване на изследванията сред първите 400 милиарда прости числа. Моделът им продължава да работи, но и тук той бавно намалява устойчивостта си с увеличаване големината на числата. Двамата учени смятат, че продължавайки до безкрайност, простите числа ще стигнат до случайно разпределение, което математиците са свикнали да очакват и за други задачи.

Саундарараджан разказва пред *Quanta magazine*, че идеята за проверка на случайността на простите числа му хрумнала по време на лекция на американския математик с японски произход Токиеда Тадаши (р. 1967 г.) от Станфордския университет в САЩ. Лекторът обърнал внимание на следния пример от теорията на вероятностите. Ако Алис реши да хвърля монета, докато не получи тура, последвана от ези, а Боб – дотогава, докато не получи два пъти поред ези, то на Алис, ще ѝ трябват средно 4 хвърляния на монетата, докато на Боб – съответно 6. При това вероятността да се падне ези или тура, е една и съща. Саундарараджан и Лемке Оливър намират обяснение на този факт, основавайки се на друга известна хипотеза, която ще бъде обсъдена в друга публикация. Хипотезата е свързана с имената на споменатия в началото Годфри Харди и английския математик Джон Литълууд (1885 – 1977). Тя описва по-точно разпределението на двойки, тройки и по-големи групи прости числа, отколкото основното очакване, че простите числа са равномерно разпределени. Засега не е ясно дали откритието на Саундарараджан и Лемке Оливър е изолирано явление, или е свързано с по-дълбоки свойства на простите числа. Дори то да няма някакви непосредствени приложения в математиката, както казва Ендрю Гранвил: „Ако това, което приемаме за даденост, излезе погрешно, следва да преосмислим обясненията и на други факти, които знаем“.

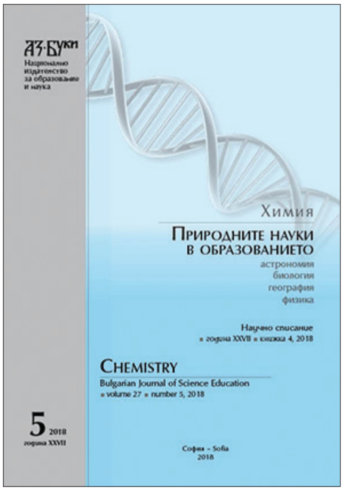
Хипотези, проблеми на Ландау, пак хипотези и нови хипотези – това е пътят за развитие на съвременната математика. Ето още някои подробности.

Хипотеза на Голдбах от 1742 г. (Кристиан Голдбах, 1690 – 1764, е немски математик). Всяко четно число, по-голямо от 2, може да се представи като сбор на две прости числа. Например $4=2+2$, $6=3+3$, $8=3+5$, $10=3+7$, $12=5+7$, $14=3+11=7+7$, ..., $78=31+47$, ... Хипотезата е недоказана. До 2014 г. тя е потвърдена за всички числа до 4.10^{18}. Това, което е известно още, е, че всяко четно число може да се представи като сума на шест прости числа, но от 6 до 2.....?

Хипотеза на Жермен (Софи Жермен, 1776 – 1831, е френска математичка). Едно просто число се нарича просто число на Жермен, ако след удвояването му и прибавяне на 1 се получава отново просто число. Например 3 е просто число на Жермен, защото $7=2.3+1$ и 7 е просто. 11 е също просто число на Жермен, защото $11=2.5+1$ и 5 е просто. Друг пример е 59, защото $59=2.29+1$ и 29 е просто число. Хипотезата е, че простите числа на Жермен са безброй много, което също е все още недоказано.

Пълния текст четете в „Математика и информатика“, кн. 4

Квантовото заплитане като четвърто състояние на материята



Списанието е представено в ERIH PLUS, CEEOL, EBSCOhost

Главен редактор

Проф. д.х.н. Борислав Тошев
E-mail: toshev@chem.uni-sofia.bg

Редактор

Георги Дянков
0887 81 27 67
Тел.: 02/425 04 70
02/425 04 71

E-mail: science@azbuki.bg

Откъс от „The fourth state of matter“

Roumen Tsekov
University of Sofia

Traditionally, the state of matter is recognized from its volume and shape properties. The solid state possesses both fixed volume and shape, while the liquid state maintains a fixed volume at variable shape. The gaseous state has both variable volume and shape, adapting them to fit the container. Usually the plasma is considered as the fourth state of matter. From its definition as a neutral mixture of charged particles, however, it follows that the traditional plasma is a gas with both variable volume and shape. Furthermore, ionic liquids (e.g. RTIL) and crystals (e.g., NaCl) could be considered as liquid and solid plasmas, respectively. The liquid and solid metals are definitely plasmas as well. The forgoing logic shows that the only possibility of the fourth state of matter is to possess variable volume at fixed shape. The reason for the different states of matter is the forces acting between the particles of matter. The thermal energy in solids is so small as compared to the potential interactions that the positions of the particles are firmly fixed and only small vibrations around them are present. That is why the solids maintain both fixed volume and shape. At higher temperature, the particles in liquids still cannot separate each other but they can move, allowing the liquids to flow. In gasses, the thermal energy is so high that the potential interactions between particles are negligible. In any case, the classical potentials decrease with increase of the distance between the particles and a very dilute matter is always an ideal gas (the Boyle's law). From this perspective the fourth state of matter, which does not possess a fixed volume, cannot be explained by the classical interaction potentials.

The ability to maintain an own shape even in a very dilute state requires interactions, which are not depressed by the distance. At present, the only known interaction, being independent from the distance between particles, is due to quantum mechanics. It is possible to generate quantum particles in such a way that the quantum state is defined

---

Заглавието е на редакцията

Съдържание на сп. „Химия. Природните науки в образованието“, кн. 5/2018:

only for the whole system. Thus, the quantum state of each particle depends on the states of the others, without presence of any classical potential interactions. This so-called quantum entanglement exists even if the particles are separated by a large distance. Therefore, the fourth state of matter could be an entangled one. The quantum entanglement is quantitatively described via the Bohm quantum potential (Bohm, 1952). It is latter recognized that the Bohm potential is an information potential (Bohm & Hiley, 1975) and represents the Fisher information force Reginatto, 1998). Due to the very close relationship between information and entropy (Shannon, 1948), the information forces are entropic and, hence, they differ from the usual potential interactions. The lack of volume restrictions suggests that the fourth state could probably be present at cosmological scale, which requires a relativistic treatment of the quantum problem.

In the beginning of the previous century Einstein's relativity and quantum mechanics have reformulated physics. The square root in the special relativity expression $E=\sqrt{m^2c^4+p^2c^2}$ for the energy of a particle generates, however, some quantization problems and a usual way to get through is to consider its quadrate. Introducing the energy $\hat{E}\equiv i\hbar\partial_t$ and momentum $\hat{p}\equiv -i\hbar\nabla$ operators from quantum mechanics into $\hat{E}^2=m^2c^4+\hat{p}^2c^2$ yields the Klein-Gordon equation (Greiner, 2000)

$$\Box\psi+(mc/\hbar)^2\psi=0 \qquad (1)$$

where $\Box\equiv\partial_t^2/c^2-\nabla^2$ is the d'Alembert operator. This partial differential equation describes scalar bosonic fields and reduces particularly to the wave equation $\Box\psi=0$ for photons, since their rest mass $m\equiv 0$ is zero. The Klein-Gordon equation (1) suffers, however, serious problems with the probabilistic interpretation of the wave function ψ (Greiner, 2000). The reason for this could be an improper quantization of the rest mass energy, which must be persistent in space and time.

To resolve the problem one can introduce an energy operator, where the rest mass energy remains constant. Substituting $\hat{E}\equiv mc^2+i\hbar\partial_t$ into the quadrate $\hat{E}^2=m^2c^4+\hat{p}^2c^2$ of the relativistic energy yields another fundamental equation for the relativistic quantum mechanics

$$\Box\psi+(2m/i\hbar)\partial_t\psi=0 \qquad (2)$$

which reduces also to the wave equation for photons. As is seen, the wave function now is not a Lorentz invariant but ψ is not an observable quantity. The physically relevant quantity is the probability density $\rho\equiv\bar{\psi}\psi$, which is invariant. One can easily recognize in Eq. (2) the relativistic Schrödinger equation, which can be rewritten in the alternative form

$$i\hbar\partial_t\psi=\hbar^2\Box\psi/2m+U\psi=\hat{H}\psi+\hbar^2\partial_t^2\psi/2mc^2 \qquad (3)$$

thus accounting for an external potential energy U as well. The standard Hamiltonian operator reads $\hat{H}\equiv-\hbar^2\nabla^2/2m+U$. A simple relationship $E_n=\sqrt{m^2c^4+2m\varepsilon_n c^2}$ between the full relativistic E_n and nonrelativistic ε_n energy eigenvalues follows from Eq. (3), which resembles the Einstein expression. In the limit $c\to\infty$ Eq. (3) reduces naturally to the nonrelativistic Schrödinger equation, while the relativistic energy expands in series as $E_n = mc^2 + \varepsilon_n - \varepsilon_n^2 / 2mc^2 + \cdots$. To demonstrate that the relativistic Schrödinger equation (3) overcomes the probability problems of the Klein-Gordon equation (1) let us introduce the Madelung transformation of the complex wave function $\psi = \sqrt{\rho}\exp(iS/\hbar)$, where S is the real quantum phase and ρ is the local probability density. Thus, Eq. (3) reduces straightforward to the following two real equations

$$\partial_t \rho = \partial^\mu (\rho \partial_\mu S / m) \tag{4}$$

$$\partial_t S - (\partial^\mu S)(\partial_\mu S) / 2m + U + Q = 0$$

where ∂_μ is the standard 4-gradient operator with $\partial^\mu \partial_\mu = \Box$. The first equation is the continuity equation, while the second one is the relativistic quantum Hamilton-Jacobi equation. The latter differs from the classical analog (Landau & Lifshitz, 1973) via the additional term $Q \equiv \hbar^2 \Box \sqrt{\rho} / 2m\sqrt{\rho}$, being the relativistic Bohm quantum potential (Nikolic, 2005). As is seen, the latter can be strong even at vanishing matter density as required for the fourth state. Since the probability is conserved, $\int \rho d^3 x = 1$, the direct integration of the continuity equation leads to the following expression $\partial_t (\int \rho \partial_t S d^3 x) = 0$. It reflects the conservation of energy $E = -\int \rho \partial_t S d^3 x$, which is an integral of motion, independent of time.

The system of Eq. (4) defines the relativistic Bohmian mechanics. If one is interested in open quantum systems (Nassar & Miret-Artes, 2917), the relativistic Hamilton-Jacobi equation can be further extended to (Tsekov, 2009)

$$\partial_t S - (\partial^\mu S)(\partial_\mu S) / 2m + U + Q = -\gamma S \tag{5}$$

where the new term on the right-hand side describes the quantum phase decay with a collision frequency γ. If the latter is high enough, one can neglect the second nonlinear term and substituting $-\gamma S = \partial_t S + U + Q$ into the continuity Eq. (4) yields a relativistic quantum telegraph-like equation

$$\gamma \partial_t \rho = -\partial^\mu [\rho \partial_\mu (U + Q + \partial_t S) / m] = -\partial^\mu [\rho \partial_\mu (U + Q) / m] - \partial_t^2 \rho \tag{6}$$

The last expression follows from the time derivative of the continuity equation, linearized on S again. Since the Bohm quantum potential is a nonlinear function of the probability density, one can linearize further Eq. (6) on ρ to obtain the following linear equation

$$\partial_t^2 \rho + \gamma \partial_t \rho + (\hbar / 2m)^2 \Box^2 \rho + \partial^\mu (\rho \partial_\mu U / m) = 0 \tag{7}$$

In the case of a free particle ($U \equiv 0$) the time-space Fourier transformation of Eq. (7) provides the dispersion relation

$$-\omega^2 + i\omega\gamma + (\hbar / 2m)^2 (k^2 - \omega^2 / c^2)^2 = 0 \tag{8}$$

At low frequency Eq. (8) simplifies to the imaginary nonrelativistic solution $\omega = i(\hbar k^2 / 2m)^2 / \gamma$, while at high ω the spectrum is modulated by the Zitterbewegung frequency $2mc^2 / \hbar$. In general, Eq. (8) is a complex relationship between three important characteristic frequencies reflecting the collisions, Zitterbewegung and super-relativistic propagation with frequency ck.

Another dissipative model implies radiative friction (Tsekov, 2016), where the corresponding relativistic Hamilton-Jacobi equation reads

$$\partial_t S - (\partial^\mu S)(\partial_\mu S) / 2m + U + Q = \tau \partial_t^2 S \tag{9}$$

Пълния текст четете в „Химия. Природните науки в образованието“, кн. 5

Рекламна тарифа

на Национално издателство за образование и наука „Аз-буки“

София 1113, бул. „Цариградско шосе“ № 125, бл. 5, тел.: 02/420-04-70, 02/420-04-71; azbuki@mon.bg; www.azbuki.bg

Вестник „Аз-буки“

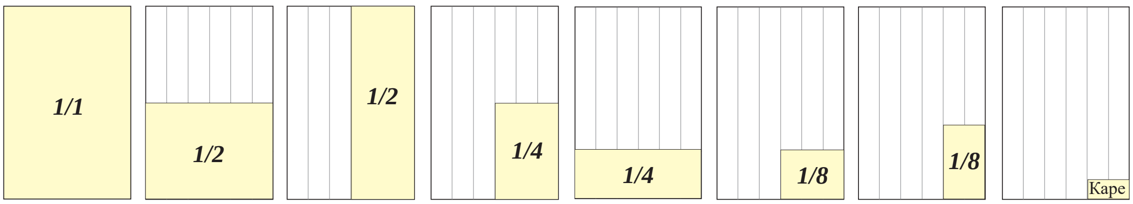
1. Стандартни карета на вътрешна страница:

Размер	Черно-бяло	+1 цвят	Пълноцветно
1/1 страница – 256 мм/388 мм	780,00 лв.	900,00 лв.	985,00 лв.
1/2 страница – 256 мм/194 мм – 125 мм/388 мм	410,00 лв. 410,00 лв.	460,00 лв. 460,00 лв.	510,00 лв. 510,00 лв.
1/4 страница – 256 мм/97 мм – 125 мм/194 мм	230,00 лв. 230,00 лв.	258,00 лв. 258,00 лв.	270,00 лв. 270,00 лв.
1/8 страница – 125 мм/97 мм – 83 мм/147 мм	115,00 лв. 115,00 лв.	129,00 лв. 129,00 лв.	135,00 лв. 135,00 лв.
каре (83 мм х 50 мм)	30,00 лв.	43,00 лв.	45,00 лв.

2. Цени за реклама на първа и последна страница – по договаряне

3. Влагане на стандартни вложки с тегло до 20 г – 80 лв. за 1000 бр.

4. Влагане на нестандартни вложки – по договаряне.



Научно-методическите списания на издателство „Аз-буки“

1. Цена за вътрешна страница

Размер	Черно-бяло	+1 цвят	Пълноцветно
1/1 страница	90 лв.	130 лв.	180 лв.
1/2 страница	50 лв.	70 лв.	90 лв.
1/4 страница	30 лв.	45 лв.	70 лв.

2. Цена за реклама на втора, трета или четвърта корица – по договаряне.

3. Размер на една печатна страница в списанията на НИОН „Аз-буки“:

a. Обрязан формат: 167 мм х 233 мм **b.** Необрязан формат: 171 мм х 240 мм

4. Влагане на вложки – по договаряне.

Забележка:

Всички посочени цени са без ДДС.

Отстъпки при брой и обем публикации или комбинирана реклама в няколко издания на издателство „Аз-буки“ – по договаряне.

Тарифата е в сила от 1 юли 2017 г.