

*Research Insights  
Изследователски проникновения*

## ОП АРТ В МАТЕМАТИЧЕСКОТО ОБРАЗОВАНИЕ, ИЛИ ПРЕБРОЯВАНЕ НА ЧЕТИРИЪГЪЛНИЦИ

**Тони Чехларова**

*Институт по математика и информатика - БАН*

**Резюме.** Изучаването на математика чрез изобразително изкуство е представено в контекста на STEAM (Science, Technology, Engineering, Art and Mathematics) образованието и като начин за доближаване на обучението до практиката. Има се предвид използването на математически знания при създаване на произведения на изкуството, както и изследването на произведения на изкуството с математически и информатични средства. Представена е възможност за осигуряване на условия за изследване в час по математика, свързано с откриване на закономерности, математическо моделиране и рационално извършване на преброяване чрез използване на картини в стил „Оп арт“. Поставена е задача за преброяване на черни четириъгълници в специално подготвени композиции в споменатия стил. При създаването им е търсено включване на случаи с различна четност, стартиране с относително малък брой четириъгълници и наличие на ефект от разглеждания стил от изобразителното изкуство. Обсъдени са различни начини за рационално преброяване. Представен е експеримент, включващ формалното и неформалното образование. При работа в клас е използвана тема от Виртуалния училищен кабинет по математика, разработван в секция „Образование по математика и информатика“ на Института по математика и информатика на Българската академия на науките. Представени са резултати от работа върху аналогична задача на онлайн състезание „VIVA математика с компютър“ и от направена анкета с участниците в него. Обсъдено е провокирането за създаване на композиции в този стил, включително с използване на софтуерни продукти. Представено е произведение в стил Оп арт с използване на стъклото като материал и е обсъдена възможността за формулиране на различни задачи с използване на ефекти от отражението му. Подчертана е модулната структура на голяма част от творбите в стил Оп арт и възможността за съставяне на аналогични задачи с използване на други модули – точки, триъгълници, криви и др. Двойственият характер на разглежданата тема и възможността за прилагане на бинарна форма са изразени и чрез подзаглавията – например „Въведение, или от STEM към STEAM“, „Задача за преброяване или разпознаване с преодоляване на оптични илюзии“ и др.

*Keywords:* STEAM; Op art; counting; online competition; creativity

### **Въведение, или от STEM към STEAM**

STEAM (Science, Technology, Engineering, Art and Mathematics) образованието е естествено разширение на STEM (Science, Technology, Engineering and Mathematics). Използването на математически знания при създаване на произведения на изкуството, както и изследването на произведения на изкуството с математически и информатични средства (Sendova & Chehlarova, 2013) са реалности. Изучаването на математика чрез изобразително изкуство е един от начините за доближаване на обучението до практиката.

Информационните технологии и специализираните програмни продукти създават възможност за по-широко използване на идеи и реализации от изобразително изкуство в математическото образование. Добра практика за художествено представяне на снимки чрез функции и геометрични преобразувания е описана в (Chehlarova & Chehlarova, 2014). Варианти за използване в обучението по математика на произведения в стила на Пийт Мондриан, Мориц Ешер, Анди Уорхол могат да се намерят в (Chehlarova, 2015), (Chehlarova et al., 2012), (Chehlarova, 2013), (Chehlarova & Chehlarova, 2013) и др. В раздел „Математика и изкуство“ на Виртуалния училищен кабинет по математика, разработван в секция „Образование по математика и информатика“ на Института по математика и информатика на Българска академия на науките (Chehlarova et al., 2014), има теми и аплети, разработени със софтуер GeoGebra (Hohenwarter et al., 2009).

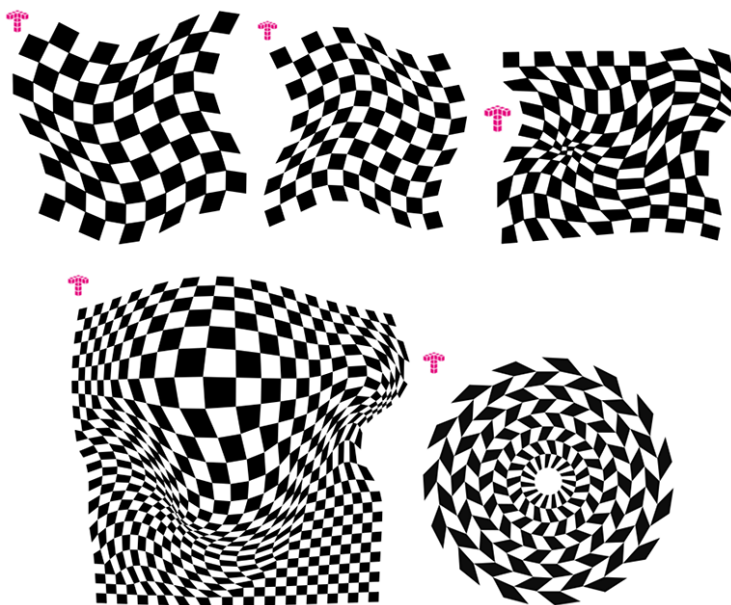
Тук ще представим една възможност за изследване в час по математика, свързано с откриване на закономерности, математическо моделиране и рационално извършване на преброяване чрез използване на картини в стил „Оп арт“. Оп арт (оптическо изкуство) е течение от визуални изкуства, което използва т.нар. оптически илюзии. Чрез тях се създава впечатление за движение, деформация или наличие на скрити изображения. Някои от задачите са тясно свързани с творби на Бриджит Райли и Виктор Вазарели, които са ключови автори за това направление в изкуството.

### **Задача за преброяване или разпознаване с преодоляване на оптични илюзии**

На фиг. 1. са представени пет фигури. Поставена е задача за преброяване на черните четириъгълници във всяка от тях.

Често използваме известни произведения на изкуството при съставяне на такива задачи, но в случая изображенията са създадени специално. Целта е да се включат случаи с различна четност, да се започне преброяване с относително малък брой четириъгълници, като едновременно с това се осигури ефектът от разглеждания стил от изобразителното изкуство.

Едното предизвикателство за учениците е свързано с установяване на факта, че за получаване на фигурите са използвани отсечки и получените фигури



Фигура 1. Фигури за преброяване на черни многоъгълници

са четириъгълници. Очакването е да съобразят, че всяка от фигурите може да се разглежда като деформиран правоъгълник с шахматно оцветяване, с което биха улеснили наблюдението и откриването на закономерност.

Първата фигура можем да разглеждаме като дъска  $10 \times 10$  с шахматно оцветяване, т.е. съдържаща общо  $10 \times 10 = 100$  полета. Във всеки ред има равен брой бели и черни полета, следователно черните полета са 50.

За втората фигура броят на черните четириъгълници в първи и втори ред, съответно в редовете на нечетно и на четно място, е различен. Изразът  $6 \times 6 + 5 \times 5$  съответства на тези разсъждения и е модел на 6 реда с по 6 черни четириъгълника и 5 реда с по 5 черни четириъгълника. Може да се разсъждава чрез модул от два съседни реда. Черните четириъгълници в този модул са 11. Има общо пет такива модула и последният ред остава самостоятелен. Записът в този случай е  $11 \times 5 + 6 = 61$ . Ако се използва общият брой полета и фактът, че черните четириъгълници са с 1 повече от белите, се получава

$$\frac{11 \times 11 - 1}{2} + 1 = 61.$$

Третата фигура е с нечетно оцветяване, броят на черните четириъгълници в нея е  $7 \times 7 + 6 \times 6 = 13 \times 6 + 7 = \frac{13 \times 13 - 1}{2} + 1 = 85$ , а на четвъртата

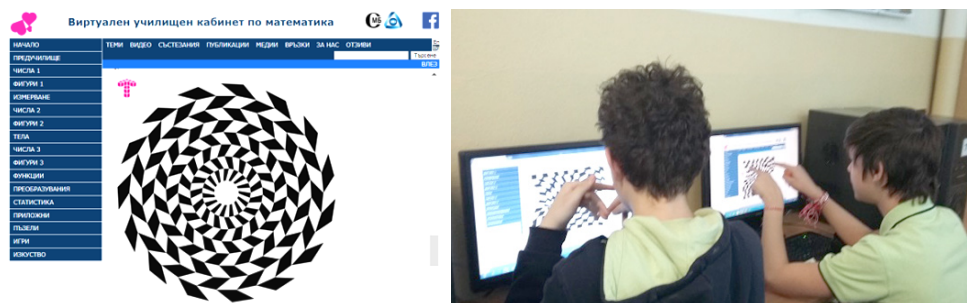
$$14 \times 14 + 13 \times 13 = 27 \times 13 + 14 = \frac{27 \times 27 - 1}{2} + 1 = 365.$$

Петата фигура може да се разглежда като съставена от осем диска, всеки от които съдържа равен брой бели и черни четириъгълници. Друга възможност е да се разглежда като получена от правоъгълник  $30 \times 8$  с шахматно оцветяване. Търсеният брой на черните четириъгълници е  $15 \times 8 = \frac{30 \times 8}{2} = 120$ .

### Изследователски подход при изучаване на математика или път към художествено творчество

Развитието на STEM и STEAM образованието е тясно свързано с внедряването на изследователския подход в образованието. Докато при изучаването на природни науки експериментът е традиционно използван, в обучението по математика в България в широк мащаб и системно все още не е постигнато желаното ниво. Наличието на специализиран софтуер създава възможност за сериозна подкрепа при внедряването на този подход, по отношение на създаване, използване и разпространение на образователни ресурси.

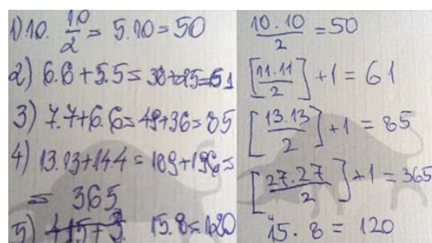
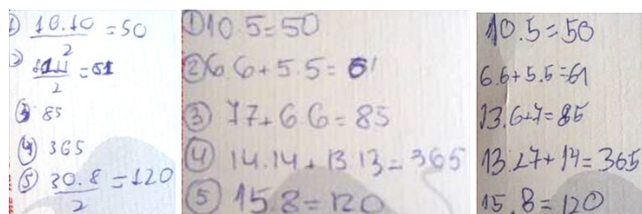
При извършване на експеримент с ученици от V – VII клас използвахме разгледаната горе задача чрез представянето ѝ в тема от споменатия Виртуален училищен кабинет по математика<sup>1)</sup> (фиг. 2).



Фигура 2. Работа по темата във Виртуален училищен кабинет по математика

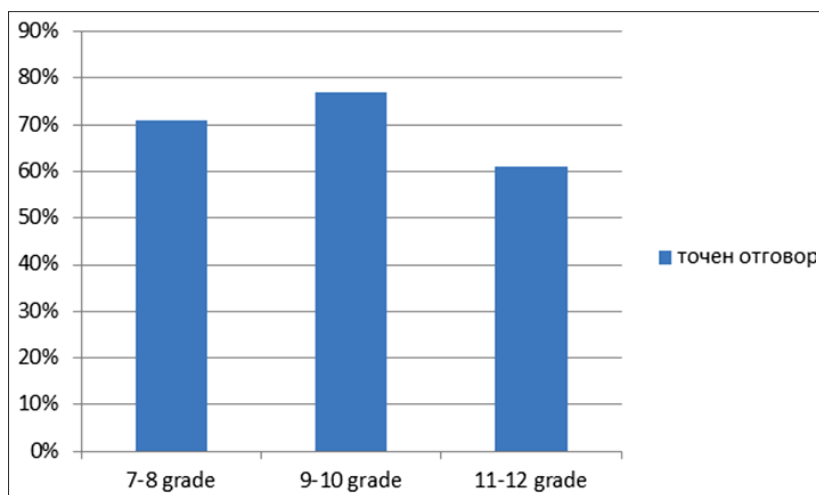
Всеки от разгледаните горе начини за решаване е използван от учениците (фиг. 3). Специално внимание заслужава изразяването чрез цяла част на разглеждания вече израз.

Стигна се и до обобщение. При шахматно оцветяване на правоъгълник  $n \times m$ , ако поне едно от числата  $n$  и  $m$  е четно, броят на белите квадратчета  $\frac{n \times m}{2}$  е равен на броя на черните квадратчета. Ако и двете числа са нечетни, тогава броят на различно оцветените квадратчета се различава с единица.



Фигура 3. Записи на ученици

Допуснатите грешки в присъствия експеримент са свързани с несъобразяване с нечетността, включване на броя и на бели квадратчета, получаване на два пъти по-малък резултат. Такива грешки са допускани и от участници от VII – XII клас в изданието през декември 2017 г. на онлайн състезание „VIVA Математика с компютър“, организирано от Института по математика и информатика на Българската академия на науките, Съюза на математи-



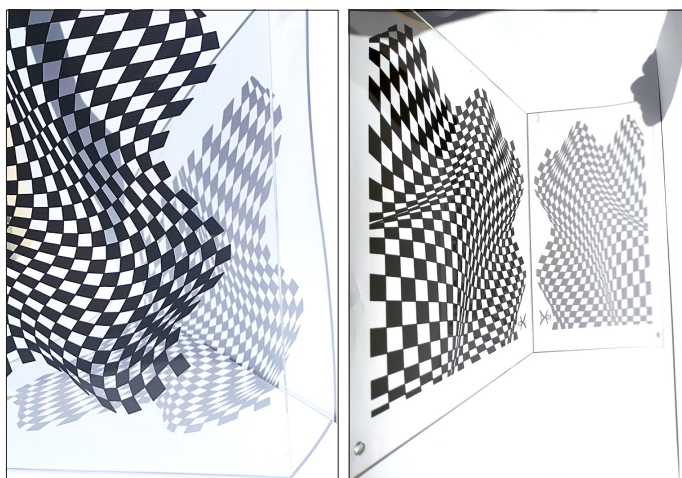
Фигура 4. Вярно решили зад. 3 от състезание „VIVA Математика с компютър“

ците в България и телекомпания VIVACOM (Kenderov, 2018), (Kenderov & Chehlarova, 2016). Удоволворяващо е, че както в присъствения експеримент, така и в състезанието е висок процентът на получилите верен отговор (фиг. 4).

Задача 3 и за III – IV и V – VI клас бе свързана с преброяване на фигури от картина в стил Оп арт, но с други предизвикателства. Бе направена анкета с участниците в състезанието, два от въпросите на която бяха „Коя задача ви хареса най-много?“ и „Коя задача ви затрудни най-много?“. На първия въпрос 8% от анкетираните не са отговорили или са записали „не мога да преценя“, „всички“. От останалите 13% са посочили разглежданата 3 задача. На втория въпрос не са отговорили или са записали „не мога да преценя“, „всички“, „никоя“ 9% от анкетираните, от останалите 15% са посочили разглежданата 3 задача. При посочването тази задача е идентифицирана освен с номера ѝ, като „арт задачата“, „с черните квадратчета“, „за преброяването на квадратите“, „за броенето на черните квадратчета“, „с черните и белите квадратчета“, „с черно-белите квадратчета“. Като имаме предвид, че анкетата е направена онлайн и едно денонощие след състезанието, считаме, че задачата е оставила следа.

Очакването е след решаването ѝ част от учениците да мислят в посока създаване на композиции в този стил. При работа с компютър могат да се използват различни софтуерни продукти и е подходящо да се продължи с Оп арт в обучението по информатика или Оп арт в обучението по информационни технологии.

На фиг. 5 е представено произведение с използване на стъклото като материал. Ефектите от отражението могат да служат за формулиране на нови задачи.



**Фигура 5.** От изложбата OpArtGlass в Нов български университет на Койя Чехларова (стъкло)

## Заклучение или разпространение на задачите за преброяване в стил Оп арт

Фланелки, чаши, чинии и рекламни картончета се оказаха удобни за разпространение на задачата и идеята (фиг. 6).



Фигура 6. Разпространение на задачите за преброяване в стил Оп арт

За създаването на творби в стил Оп арт се използват модули. Получаваните фигури са подходящи за задачи за броене, за решаването на които е важно разкриването на закономерности и използването им за рационално преброяване. В разглежданите примери като модули са използвани четириъгълници, но е подходящо съставяне на задачи, в които модулите за преброяване са други фигури – точки, триъгълници, видове четириъгълници, както и свързването им с произведения на художници, творили в този стил.

### NOTES/БЕЛЕЖКИ

1. <http://cabinet.bg/index.php?contenttype=viewarticle&id=167>

### REFERENCES/ЛИТЕРАТУРА

- Chehlarova, T. & Chehlarova, K. (2014). Photo-pictures and dynamic software or about the motivation of the art-oriented students. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, 21, (1).
- Chehlarova, T. (2013). Problem with fractions in the style of Escher. In: Kenderov, P. & Sendova, E. (Eds.). *Inquiry based mathematics education*. (pp. 127 – 132). Sofia: Regalia 6 [Чехларова, Т. (2013). Задачи с дроби в стил Ешер. В: Кендеров, П. & Сендова, Е. (ред.) *Изследователски подход в образованието по математика* (с. 127 – 132). София: Регалия 6].
- Chehlarova, T. (2015). Formation of Mathematical and Digital Competence through creativity in style Mondrian. In: Todorova, T., Kovacheva, E. & Nikolov, R. (Row) *ICT in Library and Information Sciences, Education and Cultural Heritage*. (pp. 263 – 272). Sofia: About the Letters – O Pismenah [Чехларова, Т. (2015) *Формиране на математическа и ди-*

- гитална компетентност чрез творчество в стил Мондриан. В: Тодорова, Т., Ковачева, Е. & Николов, Р. (ред.) *ИКТ в библиотечно-информационните науки, образованието и културното наследство*, (с.263 – 272). София: За буквите – О писменехъ].
- Chehlarova, T. & Chehlarova, N. (2013). Dynamic compositions in the style of Andy Warhol. *Educational forum*, 2, 56 – 62 [Чехларова, Т. & Чехларова, Н. (2013). Динамични композиции в стил Анди Уорхол. *Педагогически форум*, 2, 56 – 62].
- Chehlarova, T., Sendova, E. & Stefanova, E. (2012). Dynamic tessellations in support of the inquiry-based learning of mathematics and arts, in Theory, Practice and Impact. *Proceedings of Constructionism*, pp. 570 – 574.
- Chehlarova, T., Gachev, G., Kenderov, P. & Sendova, E. (2014). A Virtual School Mathematics Laboratory. (pp. 146 – 151). In: *V National Conference on e-Learning*. Ruse: University of Ruse.
- Hohenwarter, J., Hohenwarter, M. & Lavicza, Z. (2009). Introducing Dynamic Mathematics Software to Secondary School Teachers: the Case of GeoGebra. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 28(2), 135 – 146.
- Kenderov, P. & Chehlarova, T. (2016). *Mathematics with Computer Contest and the Inquiry Based Mathematics Education*. Plovdiv: Makros 2000 [Кендеров, П. & Чехларова, Т. (2016). *Състезание Математика с компютър и изследователски подход в образованието по математика*. Пловдив: Макрос 2000].
- Kenderov, P. (2018). Powering Knowledge Versus Pouring Facts. In: Kaiser, G., Forgasz, H., Graven, M., Kuzniak, A., Simmt, E., Xu, B. (eds) *Invited Lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education*. (pp. 289 – 306) ICME-13 Monographs. Cham: Springer.
- Sendova, E. & Chehlarova, T. (2013). *Studying fine-art compositions by means of dynamic geometry constructions*. *Scientia iuvenis*. Book of Scientific Papers. Nitra: Constantine the Philosopher University.

## OP ART IN MATHEMATICS EDUCATION OR COUNTING OF QUADRILATERALS

**Abstract.** The study of mathematics through fine arts is presented in the context of STEAM (Science, Technology, Engineering, Art and Mathematics) education as a way of bringing the teaching/learning process closer to practice. What is meant here is how to use mathematical knowledge in the creation of works of art, as well as how to explore works of art by means of mathematics and informatics



tools. How to provide conditions for explorations in mathematics classes related to finding patterns, mathematical modeling and rational counting is presented by means of “Op art” paintings. A task for counting black quadrilaterals has been set up in specially designed compositions in that style. Cases of different parity, starting with a relatively small number of quadrilaterals, and the effect of the art under consideration have been taken into account when creating these compositions. Various ways of rational counting are discussed. An experiment involving formal and informal education is presented. A theme from the Virtual Mathematics Laboratory being developed in the Mathematics and Informatics Education Department of the Institute of Mathematics and Informatics at the Bulgarian Academy of Sciences has been used in a class setting. The results of work on an analogous task of the online VIVA Mathematics with Computer Competition and from a poll conducted with the participants are presented. The provocation to create compositions in this style, including by means of software products, has been discussed. A glass work of art in Op Art style is discussed in terms of formulating various tasks using the effects of its reflection. The modular structure of a large number of op-art works and ideas for formulating similar tasks using modules such as points, triangles, curves, etc. are considered. The dual character of the subject under consideration and the possibility of applying binary teaching form are also expressed by the subheadings, for example, “Introduction or from STEM to STEAM”, “A task for counting or recognition by overcoming optical illusions”, etc.

✉ **Prof. Dr. Toni Chehlarova**

Institute of Mathematics and Informatics

Bulgarian Academy of Sciences

Sofia, Bulgaria

E-mail: [toni.chehlarova@math.bas.bg](mailto:toni.chehlarova@math.bas.bg)