Educational Technologies
Образователни технологии

СИСТЕМА ОТ ЗАДАЧИ В ОБУЧЕНИЕТО ПО МАТЕМАТИКА

Петя Асенова, Марин Маринов
Нов български университет

Резюме. Статията разглежда понятието „система от задачи“ като метод за обучение, което означава обучение чрез задачи. Тя покрива всички етапи на усвояване на новото знание – въвеждане, затвърждаване и приложение. Предложен е модел на система от задачи на различни равнища. Проектирането на системата е йерархично и включва: цел; очаквани резултати; подбор на задачите; организация, методи и средства при преподаването. Реализацията на системата е илюстрирана върху система от задачи първо равнище по темата „Сечение на многостен с равнина“ за свободноизбираема подготовка в XI клас. Методиката предполага използване на компютърни системи за визуализация и анимация.

Keywords: education in Mathematics; intersections; system of tasks; computer visualization and animation

1. Що е система от задачи

Задачите играят важна роля в обучението. Те могат да се разглеждат в два аспекта: като цел на обучението и като средство за обучение. Първият аспект е насочен към овладяване на методи за решаване на класове задачи. Вторият аспект се отнася до използване на задачите като метод за обучение.

Тази статия е посветена на втория аспект.

Обучение, което се осъществява с помощта на задачи, изисква специално разработена система. Разработването на система от задачи е въпрос, разглеждан в изследванията на редица математици от руската школа по методика на обучението по математика. Такива са работите на Dalinger V. A. (Dalinger, 1982), Kolyagin Y. M. (Kolyagin, 1977), Muravin K. S. (Muravin, 1966), Sarantsev G. S. (Sarantsev, 1982), Suvorova S. V. (Suvorova, 1982) и др. В България темата намира отражение в изследванията на Asenova P. (Asenova, 1990), Dureva D. (Dureva, 2001), Garov K. (Garov, 2004; Garov, 2006; Garov, 2010), и др.

Тук ще възприемем следното определение за ***система от задачи***: *това е методически обоснована съвкупност от задачи, която осигурява постигане на планирани резултати в обучението.*

Всяка задача от системата носи определена информация, свързана с изучавания теоретичен материал, има определено място и роля (Kolyagin, 1977). Задачите в системата се подреждат по принципа от просто към сложно (Asenova, 1990; Dalinger, 1982; Kolyagin, 1977). Задачите в системата трябва да са разнообразни по тип и да способстват за формиране на знания и умения на различни равнища на усвояване (Asenova, 1990; Dalinger, 1982). Задачите трябва да са достатъчно за работата в клас и самостоятелната работа у дома. Системата от задачи осигурява всички етапи на усвояване на знанието – въвеждане на новото учебно съдържание, неговото затвърждаване и прилагане на различни равнища (Asenova, 1990; Dalinger, 1982).

Задачите за въвеждане на ново учебно съдържание изпълняват различни функции: мотивиране на изучаваното ново съдържание, разкриване на неговата същност (съществени свойства), въвеждане на термини, открояване на последователност от стъпки за действие (в теоретичен и операционален план) (Asenova, 1990).

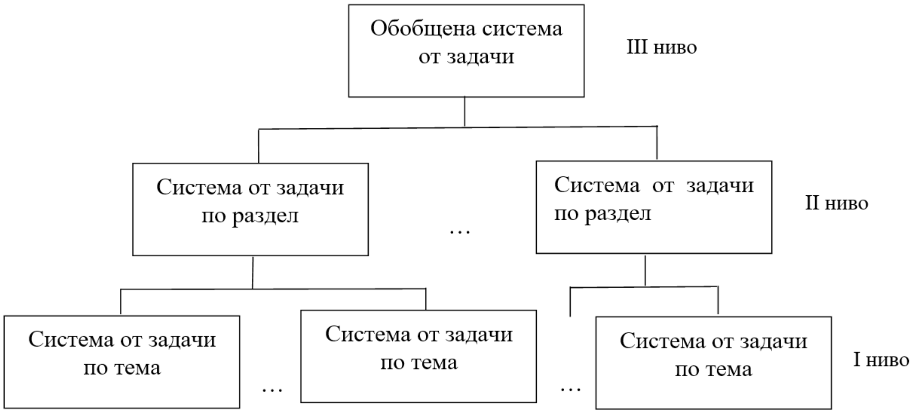
Задачите за затвърждаване способстват за осъзнатост и трайност на въведените знания. Те отработват съществените признаци на понятията и алгоритмите за действие.

Задачите за приложение на изучавания материал са важна методическа стъпка. Знанията се считат усвоени, когато обучаемите са способни да ги прилагат. Подборът на задачите тук е насочен към разбиране на границите на приложимост на изучаваните обекти, към разкриване на вътрешнопредметните връзки и връзките към други системи от обекти. Задачите разкриват приложения на различни равнища на сложност – от репродукция до приложение в стандартни и нестандартни ситуации (Asenova, 1990).

При *проектиране на системата* от задачи са целесъобразни следните етапи:

– да се определят целта и очакваните резултати, които ще формира системата, и условията за тяхното постигане;
– да се подберат подходящи задачи, като се съблюдават изложените погоре принципи;
– да се осмислят методическите похвати за използване на системата от задачи – организация, използвани методи и средства за обучение (Asenova, 1990).

Dalinger V. A. включва и *система от задачи второ равнище*. Той я разглежда като обобщаваща система за даден учебен предмет (Dalinger, 1982). Asenova P. разглежда системите от задачи като тематични, обобщаващи за тематичен раздел и обобщаващи по предмета (фиг. 1). Това разделение е естествено за структурата на учебното съдържание по даден предмет (Asenova, 1990).



Фигура 1. Структура на система от задачи

Създаването на система от задачи не е еднократен акт. Системата се усъвършенства непрекъснато според обратната връзка от нейното използване и нивото на учениците, за които е предназначена.

2. Проектиране на система от задачи

Ще илюстрираме създаването на система от задачи на примера на темата *Сечение на многостен с равнина за XI клас, свободноизбираема подготовка (СИП)*. Това е система от задачи първо равнище.

Ще проектираме системата, като определим нейните основни параметри: цел, очаквани резултати, подбор на задачите, методи и средства за използване.

Цел: обучаемите да се научат да построяват сечения на многостен с равнина.

Очаквани резултати:

– да разбират понятията: секуща равнина, сечение на многостен с равнина, следа;

– да знаят алгоритъма за построяване на сечение на многостен с равнина по метода на следата и да умеят да го прилагат при решаване на задачи;

– да използват допълнителни помощни сечения за построяване на сечения.

Условия на използване на системата от задачи

Предварителните знания, които имат обучаемите и на които се разчита, са: многостен, видове многостени, равнина, различни начини за определяне на равнина, пресечници на две равнини. Обучаемите имат базови знания и умения за изчисляване и построения по стереометрия от задължителната подготовка, а някои от тях могат да имат по-висока степен на владеене от профилираната подготовка.

Методи и средства

Препоръчва се да се използва компютърна система за визуализация и анимация на сеченията като Geogebra, Halomda, Wolfram Mathematica и др. В настоящата разработка се използва Wolfram Mathematica. Визуализацията и анимацията са средство да се демонстрират и анализират елементите на обекти в тримерно пространство, да се проследява последователността на построяването на сечения. Демонстрациите се съпътстват от анализ и дискусия. Компютърните системи се използват като помощно средство за демонстрация, подпомагащо по-доброто разбиране на същността на методите за построяване на сечения и проследяване на последователността на самото построяване. Обучаемите прилагат наученото за построяване на сечения във вариативни ситуации, ползвайки традиционни средства. По този начин се предизвикват по-голяма активност в процеса на обучение и по-голямо разбиране на усвояващия материал.

3. Подбор на задачите и използване на системата от задачи

Задача 1. Даден е тетраедър $ABCD$.

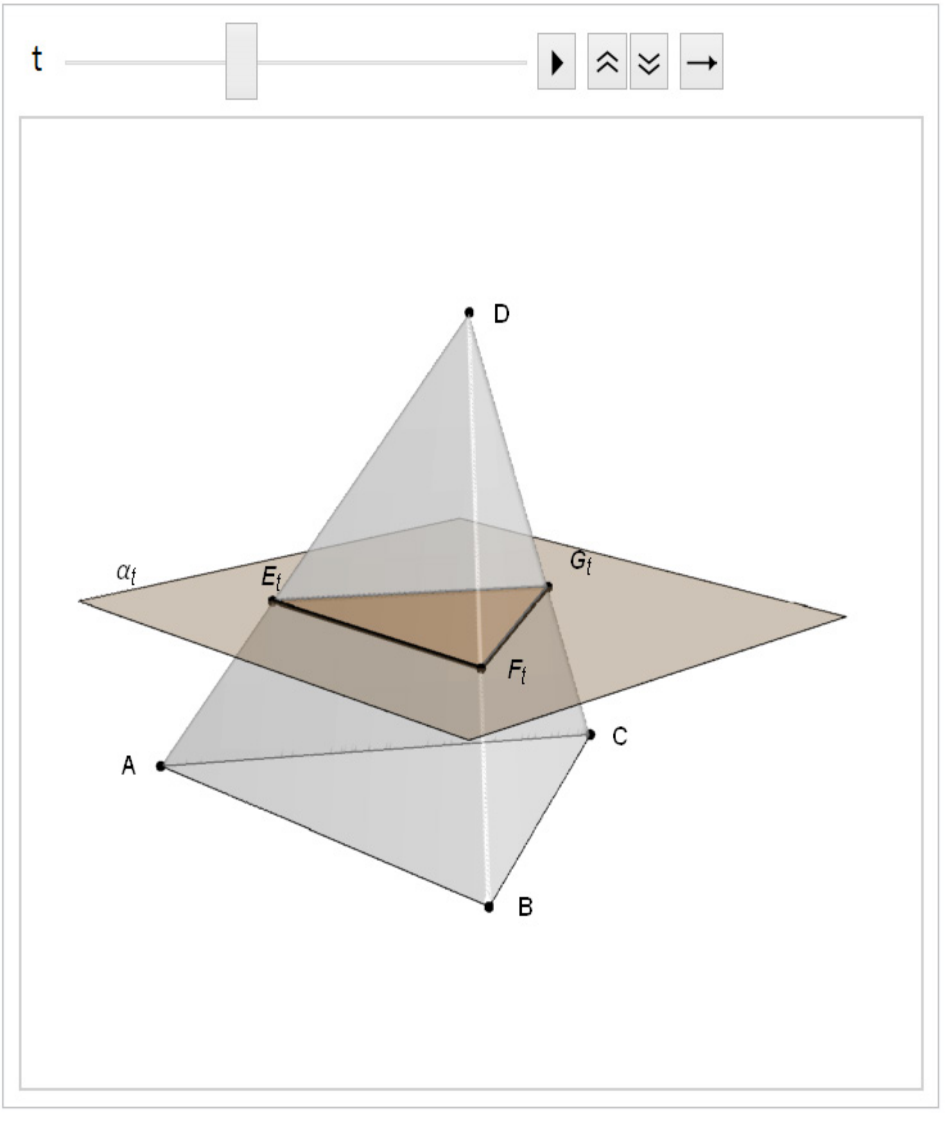
а) Опишете взаимното разположение на неговите върхове, ръбове и стени.

б) Нека *a* е равнина, успоредна на основата *ABC*. Как се променя сечението на тетраедъра $ABCD$ с равнината α, когато α се движи от основата към върха?

Задачата е подходяща да се припомни взаимно положение на точки, прави и равнини в пространството. Система Mathematica позволява тетраедърът $ABCD$ да се завърта в различни положения, за да се огледа от различни посоки разположението на елементите точки, прави, равнини. Упражнението е полезно за развиване на ориентация в тримерно пространство. Втората част на задачата дава възможност да се въведат основните за темата понятия секуща равнина и сечение на многостен с равнина. Използването на анимация (виж анимация 1) позволява да се проследи промяната на сечението, когато секущата равнина α се движи от основата *ABC* към върха *D*.

Анимация 1. Анимацията демонстрира сеченията $\beta_t = ABCD \cap \alpha_t$, $0 \le t \le 1$, където равнините α_t са успоредни на равнината (*ABC*), α_0 съвпада с равнината (*ABC*) и транслирайки се, стига до α_1, за която точката D е единствената ѝ обща точка с $ABCD$.

Анимацията демонстрира, че за $0 \le t < 1$ сечението $\beta_t = ABCD \cap \alpha_t$ е триъгълник $E_tF_tG_t$, при което $E_0 = A, F_0 = B$ и $G_0 = C$ (виж фиг. 2). С нарастването на t от 0 до 1 точката E_t се движи по реброто AD и при $t = 1$ съвпада с точката D. Аналогично точката F_1 се движи по реброто BD, а точката G_1 се движи по реброто CD и $F_1 = D = G_1$. Подчертава се фактът, че върховете на сечението са точки от ръбовете на тетраедъра, а страните на сечението са отсечки, принадлежащи на стените на тетраедъра.



Фигура 2. Сечение на тетраедър с равнина, успоредна на основата (задача 1)

Натрупаният опит от дискусиите върху задача 1 и анимация 1 ни дават възможност да преминем към анализ на задача 2.

Задача 2. Нека E е фиксирана точка от стената ABD на тетраедъра $ABCD$, а равнината α съдържа E и е успоредна на равнината (ABC). Ще построим сечението на тетраедъра $ABCD$ с равнината α.

Геометричният експеримент, демонстриран с анимация 1, насочва към отговора: $ABCD \cap \alpha = E_tF_tG_t$ за такова t, за което $E \in E_tF_t$. Съществуването на такова t е естествено – анимация 1 показа, че отсечката E_tF_t преминава през всяка точка на стената ABD. Освен това решението ни дава повод да се припомни следното.

Аксиома 1. Ако две различни равнини имат две общи точки, то правата, определена от тези точки, е сечението на равнините (пресечница).

Теорема 1. Ако успоредните равнини α и β се пресекат с трета равнина γ, то сеченията $\alpha \cap \gamma$ и $\beta \cap \gamma$ са успоредни прави.

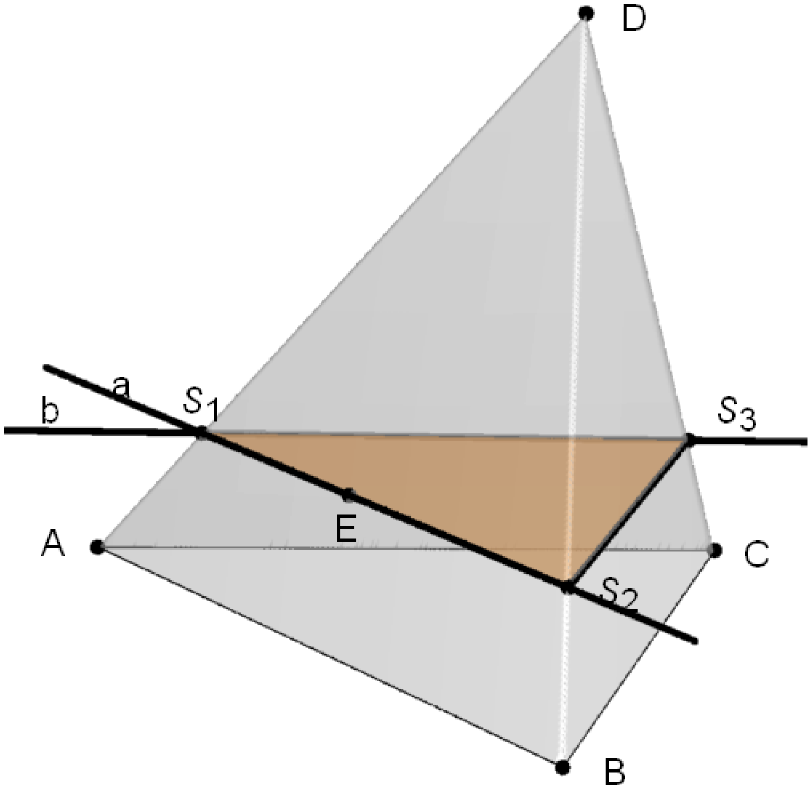
Решение:

1) Понеже успоредните равнини α и (ABC) се пресичат с равнината (ABD), то според теорема 1 правата (AB) е успоредна на пресечницата $a = \alpha \cap ABD$. Това дава възможност да определим в равнината (ABD) правата a, която съдържа точката E и е успоредна на правата (AB). Означаваме пресечните точки на правата a с ръбовете на тетраедъра: т. $S_1 = a \cap AD$ и т. $S_2 = a \cap BD$ (фиг. 3).

2) Успоредните равнини α и (ABC) се пресичат с равнината $(\grave{A}CD)$ и аналогично на 1) установяваме, че правата (AC) е успоредна на пресечницата $b = \alpha \cap ACD$. Това дава възможност да определим в равнината (ACD) правата b, която съдържа т. S_1 и е успоредна на правата (AC). Означаваме: т. $S_3 = b \cap CD$ (виж фиг. 3).

3) Правата, определена от точките S_2 и S_3, е пресечница на равнините α и (BCD). Това е следствие от аксиома 1.

Тогава сечението на тетраедъра $ABCD$ и равнината α е $\Delta\, S_1S_2S_3$ (виж фиг. 3).



Фигура 3. Сечението на тетраедъра $ABCD$ с равнината α (задача 2)

Представената в решението на задача 2 логическа конструкция се затвърждава със следващата задача за самостоятелна работа:

Задача 3. Даден е тетраедърът $ABCD$.

(а) Нека т. $E \in ABD$, равнината $\alpha_1 \parallel (ACD)$ и $E \in \alpha_1$. Да се намери сечението $\alpha_1 \cap ABCD$.

(б) Нека т. $E \in ABD$, равнината $\alpha_2 \parallel (BCD)$ и $E \in \alpha_2$. Да се намери $\alpha_2 \cap ABCD$.

(в) Нека т. $E \in AB$, равнината $\alpha_3 \parallel (ACD)$ и $E \in \alpha_3$. Да се намери $\alpha_3 \cap ABCD$.

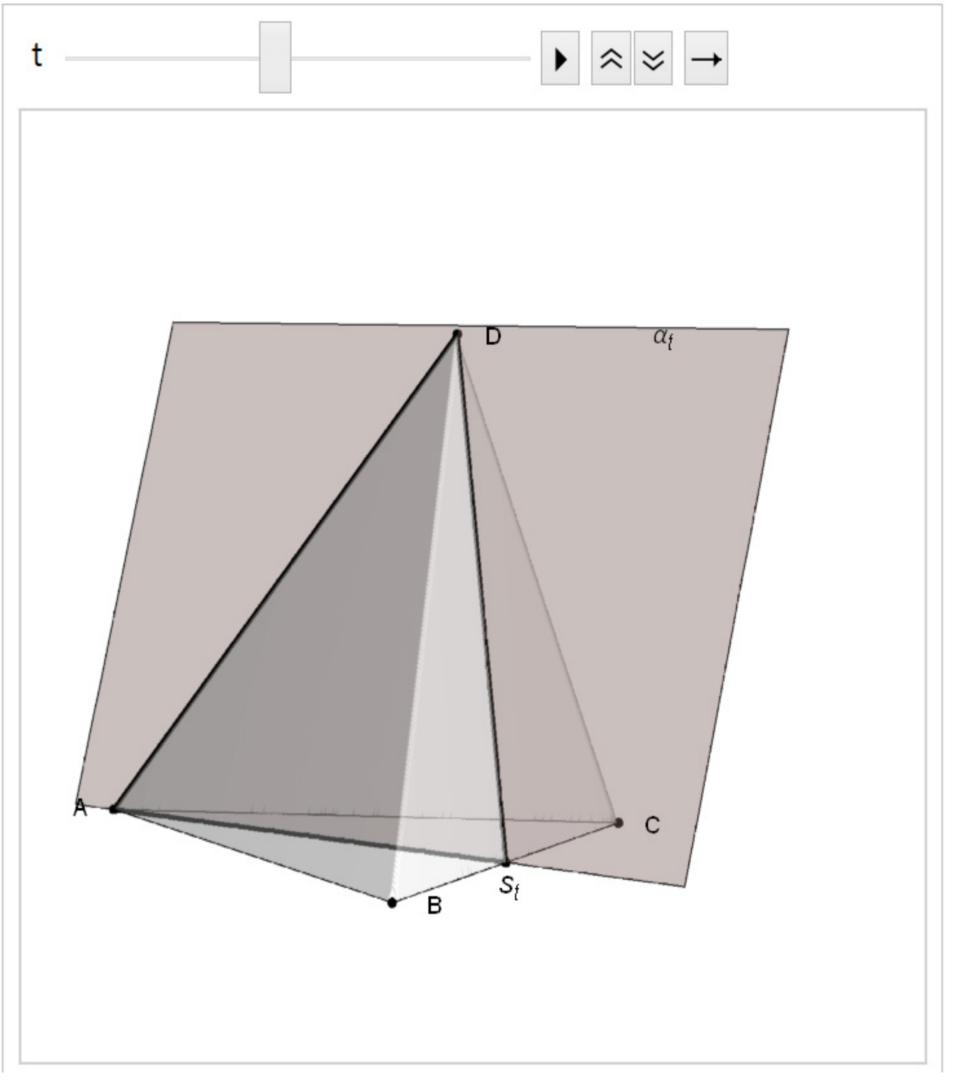
(г) Нека т. $E \in ABD$, равнината $\alpha_4 \parallel (BCD)$ и $E \in \alpha_4$. Да се намери $\alpha_4 \cap ABCD$.

Определение: Следа на равнината α върху стена на тетраедъра ще наричаме пресечницата на α с равнината на стената.

Анимация 2. Даден е тетраедър $ABCD$. Точката $S_t \in BC$, $0 \le t \le 1$, като $S_0 = B, S_1 = C$ и S_t описва отсечката BC, когато t се изменя от нула до едно.

Анимацията демонстрира сеченията $\beta_t = ABCD \cap \alpha_t$, $0 \le t \le 1$, където равнината α_t се определя от трите точки A, D и S_t.

За $0 \le t \le 1$ сечението $\beta_t = ABCD \cap \alpha_t$ е $\Delta\ AS_tD$, при което $\beta_0 = ABD$, $\beta_1 = ACD$ (фиг. 4.) За произволно избрани сечения β_t се посочват следите на α_t върху (ABC) и (BCD). Подчертава се фактът, че върхът S_t е пресечна точка на реброто BC, с която и да е от тези следи.



Фигура 4. Сечение на тетраедър с равнина, определена от три точки (анимация 2)

Разгледаните задачи и анимация 2 илюстрират факта, че:

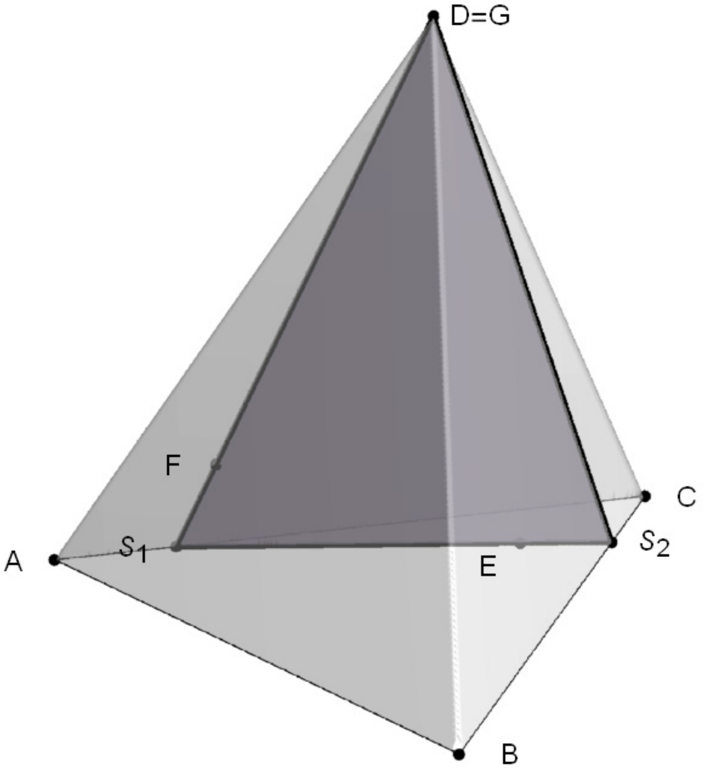
(i) сечението β на тетраедъра с равнината α е оградено от следи на α върху стени на тетраедъра;

(ii) върховете на сечението β са пресечни точки на ръб на тетраедъра със следа на α, а страните на сечението са отсечки, лежащи на стена на тетраедъра.

Под метод на следата ще разбираме начин за построяване на сечението β с помощта на (i) и (ii).

Ефективността на този метод се основава на факта, че сечението на многостен с равнина е многоъгълник, принадлежащ на секущата равнина и имащ върхове, които принадлежат на ръбове на многостена.

Задача 4. Даден е тетраедър $ABCD$. Точка E е от стената ABC, а т. F – от стената ACD. Да се построи сечението $ABCD \cap \alpha$, където α е определена от трите точки E, F и D (фиг. 5).



Фигура 5. Сечение на тетраедър с равнина, определена от три точки (задача 4)

Решение:

1) Понеже F и D са общи точки за равнините α и (ACD), то правата (DF) е следа на α върху стената ACD (виж аксиома 1). В равнината (ACD) построяваме правата (DF) и означаваме с S_1 точката, в която следата (DF) пресича ръба AC.

2) Точката S_1, като точка от ръба AC, е точка и на равнината (ABC), и заедно с точката E са общи точки на равнините α и равнината (ABC). Аналогично построяваме в равнината (ABC) следата (S_1E) на равнината α. Означаваме с S_2 точката, в която следата (S_1E) пресича ръба BC.

(3) Аналогично се аргументира, че правата (DS_2) е следата на α върху BCD.

Сечението $ABCD \bigcap \alpha$ е построеният $\Delta\ S_1S_2D$ (фиг. 5).

Представеният в решението на задача 4 метод на следата за построяване на сечения се затвърждава чрез самостоятелно решаване на следната задача 5.

Задача 5. Даден е тетраедър $ABCD$. Равнината α е определена от точките E, F и D. Да се намери сечението $\alpha \bigcap ABCD$ във всеки един от случаите:

а) $F \in AC$ и $E \in ABD$;

б) $F \in AC$ и $E \in BCD$;

в) $F \in ABD$ и $E \in BCD$;

г) $F \in AD$ и $E \in ABD$;

д) $E \in AD$ и $F \in BCD$.

Досега всички построения се извършваха върху стените на тетраедъра. В следващите три задачи построението е извън стените на тетраедъра. В задача 6 то е върху равнина, съдържаща стена на тетраедъра, а в задачи 7 и 8 – върху равнина, която не съдържа стена на тетраедъра.

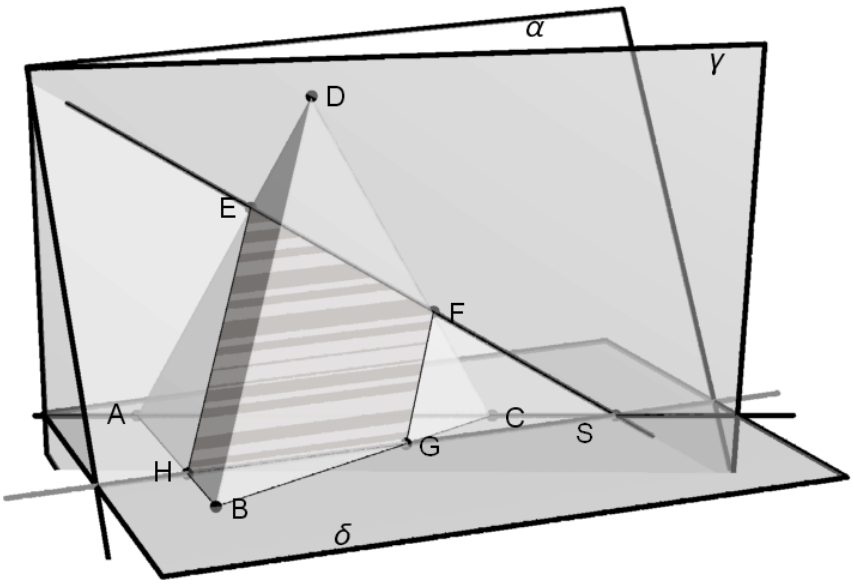
Задача 6. Равнината α се определя от три точки E, F и G, които принадлежат на ръбовете на тетраедъра $ABCD$, както следва: $E \in AD$, $F \in CD$ и $G \in BC$. Предполагаме, че правата (EF) не е успоредна на равнината (ABC) (фиг. 6). Ще построим сечението $ABCD \bigcap \alpha$.

Решение:

Две от страните на сечението са известни. Това са отсечките EF и FG.

За да построим следата на α върху ABC, ще намерим две общи точки на тези равнини. Едната точка е дадена по условие. Това е точката G. Съществуването на другата точка се гарантира от условието, че правата (EF) не е успоредна на равнината (ABC). Означаваме с S пресечната точка на правата (EF) с равнината (ABC).

Правата (EF) лежи на равнината (ACD) и следователно точката S е обща за равнините (ACD) и (ABC). Освен това правата (AC) е пресечница на равнините (ACD) и (ABC) и съдържа всички техни общи точки. Това доказва, че правите (AC) и (EF) се пресичат в т. S. Построяваме т. S като пресечна точка на правата (AC) с правата (EF) (т.е. $S = (AC) \bigcap (EF)$) (фиг. 6).



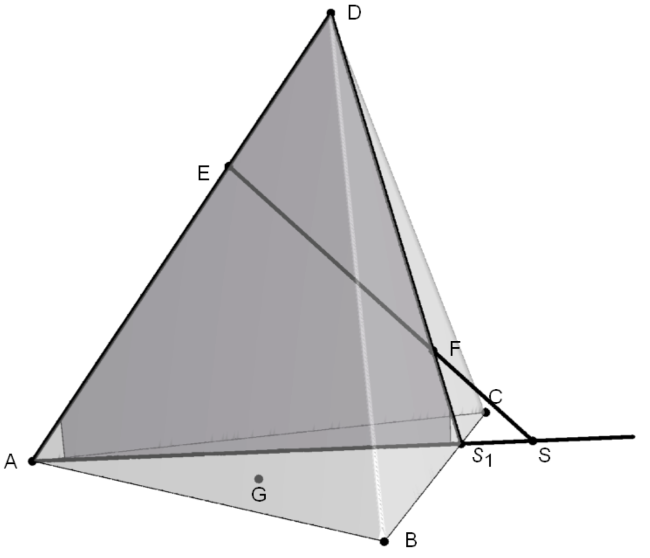
Фигура 6. Построение върху равнината $\gamma = (ACD)$, но извън стената ACD (задача 6)

Построяваме правата (SG) в равнината (ABC). Според аксиома 1 това е следата на равнината α върху ABC. Означаваме с H пресечната точка на следата (SG) с реброто AB. Отсечката GH е следващата страна на сечението. Аналогично според аксиома 1 правата (HE) е следа на α върху ABD.

И така сечението $ABCD \cap \alpha$ е построеният четириъгълник $GFEH$ (фиг. 6).

В следващите две задачи ще използваме построение върху равнина, която не съдържа стена на тетраедъра. Тази допълнителна равнина ще пресича тетраедъра, а нейното сечение ще се определя по описания по-горе начин. Този подход се нарича ***метод на помощното сечение***.

Задача 7. Равнината α се определя от три точки E, F и G, за които е известно, че $E \in AD$, $F \in BCD$ и $G \in ABC$ и правата (EF) не е успоредна на равнината (ABC) (фиг. 7). Да се построи сечението $ABCD \cap \alpha$.



Фигура 7. Помощно сечение с (EFD) (задача 7)

Решение:

Ще използваме идеята, демонстрирана в решението на задача 6. За тази цел разделяме тетраедъра $ABCD$ на две части с равнината (FDE) и сечението $\beta_1 = ABCD \bigcap (FDE)$ ще наричаме помощното сечение.

1) Построяваме помощното сечението $\beta_1 = ABCD \bigcap (FDE)$, като разсъждаваме аналогично на задача 4 (виж още анимация 2 и задача 5 д).

а) Понеже E и D са общи точки за равнините (FDE) и (ACD), то правата (DE) е следа на (FDE) върху стената ACD. Точката A по условие е точка от правата (DE) и едновременно с това е точка на ръба AC. Следователно AD е страна на помощното сечение.

б) Освен това F и D са общи точки за равнините (FDE) и (BCD). Следователно правата (DF) е следа на (FDE) върху стената (BCD). В равнината (BCD) построяваме правата (DF) и означаваме с S_1 точката, в която следата (DF) пресича ръба BC.

в) Аналогично на (а) се аргументира, че правата (AS_1) е следата на (FDE) върху ABC.

Помощното сечение β_1 е $\Delta\, AS_1D$.

2) За точката G е в сила точно един от случаите:

а) $G \in AS_1$; б) $G \in ABS_1$; в) $G \in AS_1C$.

Ако $G \in AS_1$, то задачата е решена, защото сечението $ABCD \bigcap \alpha$ е построеното помощно сечение, т.е. $ABCD \bigcap \alpha = AS_1D$.

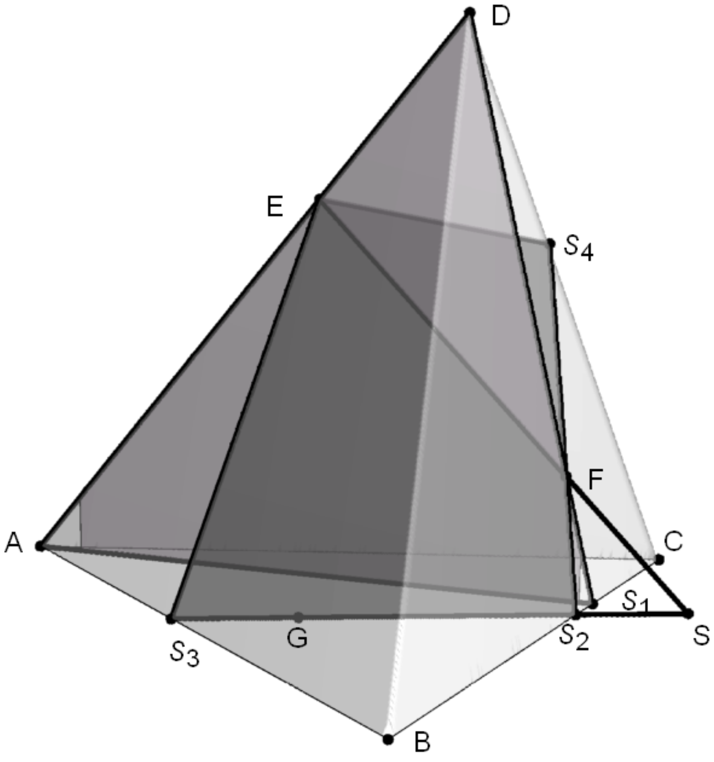
Случаите б) и в) се решават аналогично. За това ще разгледаме само случая, когато $G \in ABS_1$.

Аналогично на задача 6 доказваме, че пресечната точка S на правата (EF) с равнината (ABC) се построява като пресечна точка на правата (EF) с правата (AS_1).

След като е построена т. S, то в равнината (ABC) построяваме правата (SG), която е следата на α върху ABC. Означаваме с S_2 и S_3 пресечните точки на (SG) съответно с ръбовете BC и AB (фиг. 8).

От аксиома 1 следва, че (S_2F) е следата на α върху BCD. Означаваме с S_4 пресечната точка на (S_2F) с ръба CD. Аналогично според аксиома 1 правата (ES_3) е следата на α върху ABD.

И така, ако $G \in ABS_1$, то сечението $ABCD \cap \alpha$ е построеният четириъгълник $ES_3S_2S_4$ (фиг. 8).



Фигура 8. Построяване на сечение с използване на помощно сечение (задача 7)

Демонстрираният в задача 7 метод за построяване на пресечната точка на правата (EF) с равнината (ABC) с използване на помощно сечение дава възможност да се решат редица интересни задачи. В случая, когато се строи сечение на тетраедър, обикновено помощното сечение е с равнина, съдържаща правата (EF) и определен връх на тетраедъра.

Следващата задача също използва този метод.

Задача 8. Равнината α се определя от три точки E, F и G, които са точки от стените на тетраедъра $ABCD$, както следва: $E \in ABC, F \in BCD$ и $G \in ACD$. Правата (EF) не е успоредна на равнината (ACD) (фиг. 9). Да се построи сечението $ABCD \cap \alpha$.

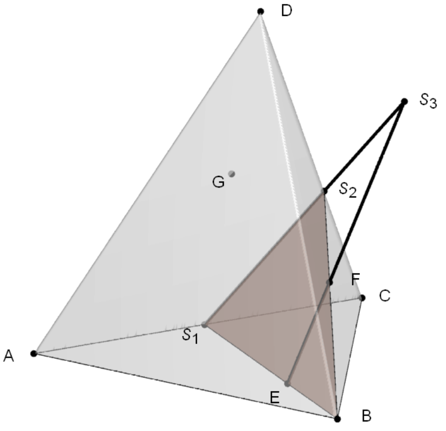
Решение:

1) Построяваме пресечната точка на правата (EF) с равнината (ACD), като използваме помощно сечение на равнината (FEB) с тетраедъра. Помощното сечение се построява по същия начин, както сечението β_1 в задача 7.

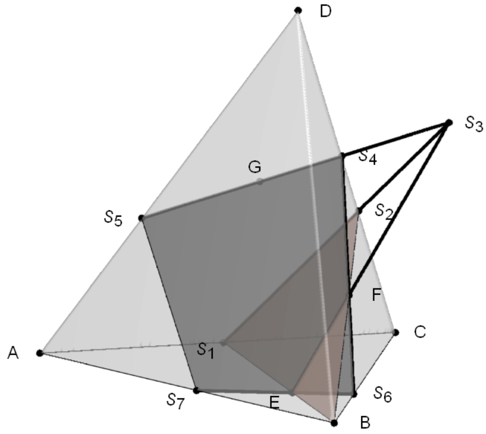
а) Следата (BE) на (FEB) върху ABC пресича реброто AC в т. S_1.

б) Следата (BF) на (FEB) върху BCD пресича реброто CD в т. S_2.

в) Според аксиома 1 правата (S_1S_2) е следата на (FEB) върху ACD.



Фигура 9. Пресечна точка на правата (EF) с равнината (ABC) (задача 8)



Фигура 10. Построяване на сечение чрез помощно сечение (задача 8)

Следователно $\Delta\, S_1BS_2$ е помощното сечение на равнината (FEB) с тетраедъра $ABCD$.

Ще отбележим, че ако $G \in S_1S_2$, то задачата е решена и $ABCD \cap \alpha$ е $\Delta\, S_1BS_2$.

Ще предположим, че $G \in S_1S_2DA$. (Случаят $G \in S_1CS_2$ е аналогичен на разгледания случай в задача 7.)

По условие правата (EF) не е успоредна на равнината (ACD). Означаваме с S_3 пресечната точка на (EF) с (ACD).

Правата (EF) лежи на равнината (FEB) и следователно точката S_3 е обща за равнините (ACD) и (FEB). Освен това правата (S_1S_2) е сечението на равнините (ACD) и (FEB) и съдържа всички техни общи точки. Следователно правите (S_1S_2) и (EF) се пресичат в т. S_3. Построяваме т. S_3 в равнината (FEB) като пресечна точка на правата (S_1S_2) с правата (EF) (т.е. $S_3 = (S_1S_2) \cap (EF)$) (фиг. 9).

2) Построяваме сечението $ABCD \cap \alpha$ при условие $G \in S_1S_2DA$.

а) Точката $S_3 \in EF$, а правата $(EF) \subset \alpha$. Следователно G и S_3 са общи точки на равнините α и (ACD). Означаваме с S_4 и S_5 пресечните точки на следата (GS_3) съответно с ръбовете CD и AD. Добре е фигура 9 да се огледа от различни посоки. Целта е да се получи ясна представа за взаимното разположение на α и помощната равнина (FEB).

б) Следата на α върху BCD се определя от точките S_4 и F (фиг. 9.). В равнината (BCD) построяваме пресечната точка S_6 на следата (S_4F) с ръба BC.

в) Следователно равнините α и (ABC) имат общи точки S_6 и E. В равнината (ABC) построяваме пресечната точка S_7 на следата (S_6E) с ръба AB.

г) Според аксиома 1 правата (S_7S_5) е следата на α върху ABD.

И така сечението $ABCD \cap \alpha$ е построеният четириъгълник $S_4S_5S_7S_6$ (фиг. 10).

При решаването на следващата задача ще използваме следната теорема.

Теорема 2. Ако равнината β съдържа права s, която е успоредна на равнината α и пресича равнината α в правата g, то правите s и g са успоредни.

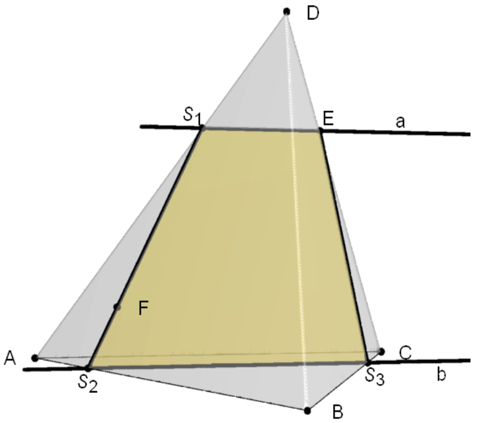
Задача 9. Върху ръба CD на тетраедъра $ABCD$ е фиксирана точката E, а върху стената ABD е фиксирана точката F (фиг. 11). С α означаваме равнината, която съдържа точките E и F и е успоредна на ръба AC. Ще построим сечението $ABCD \cap \alpha$.

Решение:

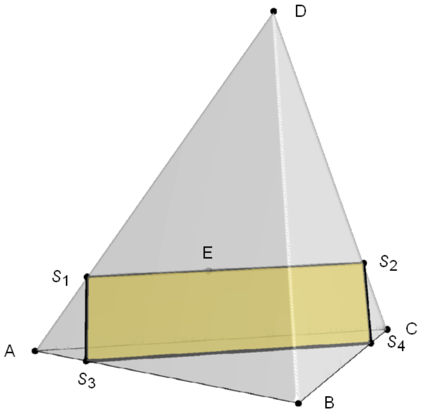
1) Означаваме с a следата на равнината α върху ACD. По условие a съдържа точката E. Равнината (ACD) съдържа правата (AC) и пресича равнината α в правата a. Според теорема 2 правите (AC) и a са успоредни. Следователно следата a на равнината α върху ACD може да се построи като единствена права в равнината (ACD), която минава през т. E и е успоредна на правата (AC). Означаваме с S_1 пресечната точка на следата a с ръба AD (фиг. 11).

2) Точката S_1 принадлежи на равнините (ABD) и α. От аксиома 1 следва, че правата (S_1F) е следа на α върху (ABD). Означаваме с S_2 пресечната точка на следата (S_1F) с ръба AB.

3) Означаваме с b следата на равнината α върху ABC. Правата b съдържа т. S_2. Аналогично на 1) установяваме, че правите b и (AC) са успоредни. Построяваме правата b в равнината (ABC) като права, която съдържа т. S_2 и е успоредна на (AC). Означаваме с S_3 пресечната точка на следата b с ръба BC (фиг. 11).



Фигура 11. Решение на задача 9



Фигура 12. Решение на задача 10

4) От аксиома 1 следва, че (S_3E) е следата на α върху BCD.

Сечението $ABCD \cap \alpha$ е четириъгълникът $ES_1S_2S_3$ (фиг. 11).

Задача 10. Върху стената ACD на тетраедъра $ABCD$ е фиксирана точката E. С α означаваме равнината, която съдържа т. E и е успоредна на ръбовете AC и BD. Да се построи сечението $ABCD \cap \alpha$.

Решение:

1) Построяваме следата a на равнината α върху ACD като права, съдържаща точката E и успоредна на (AC). Доказателството повтаря 1) от решението на задача 9.

Означаваме с S_1 и S_2 пресечните точки на следата a съответно с ръбовете AD и CD (фиг. 12).

2) Означаваме с d следата на равнината α върху ABD. В 1) установихме, че т. S_1 се съдържа в d. Равнината (ABD) съдържа правата (BD) и пресича равнината α в правата d. Според теорема 2 правите (BD) и d са успоредни. Аналогично на 1) построяваме правата d и означаваме

с S_3 пресечната точка на следата d с ръба AB (фиг. 12).

3) Означаваме с *e* следата на равнината *a* върху *ACD*. Аналогично на 2) построяваме *e* като успоредна права на (BD), която съдържа т. S_2. Означаваме с S_4 пресечната точка на следата e с ръба BC (фиг. 12).

4) От аксиома 1 следва, че (S_3S_4) е следата на α върху ABC.

Сечението $ABCD \cap \alpha$ е четириъгълникът $S_1S_3S_4S_2$ (фиг. 12).

3. Заключение

Използването на система от задачи дава по-задълбочени, по-осъзнати и трайни знания, тъй като изисква по-голяма активност от страна на обучаемите. Системата осигурява целия процес на усвояване на знанието: въвеждане, затвърждаване и приложение. Нейното създаване изисква повече усилия от страна на преподавателя и повече времеви ресурс за прилагането ѝ в процеса на обучение. По тази причина не е възможно да се използва напълно по време на всеки урок, но дава добри резултати за използване на отделни нейни елементи в уроците, както и пълно използване по определени теми, които са по-сложни за учениците.

REFERENCES/ЛИТЕРАТУРА

Asenova, P. (1990). Design and implementation of a system of tasks in teaching algorithms in Bulgarian schools. *PhD thesis*. Moscow. RAE. [Асенова, П. (1990). Построение и использование системы задач для обучения алгоритмизации в курсе информатики болгарской школы. *Дисс. канд. пед. наук*. Москва. РАО.]

Garov, K. (2010). The tasks in learning Informatics and Information Technologies. In: *Education in the information society*. National conference [Гъров, К. (2010) Задачите в обучението по информатика и информационни технологии. *Образованието в информационното общество.* Национална конференция.]

Garov, K. (2004). The system of tasks in teaching talented students for olympiads and competitions on Informatics. In: *Mathematics and education in Mathematics*. 33-th conference of the Union of the Bulgarian Mathematicians, 316 – 321. [Гъров, К. (2004). Система от опорни задачи при подготовката на талантливи и изявени ученици за участие в олимпиади и състезания по информатика**,** *Математика и математическо образование*. 33-та пролетна конференция на СМБ, 316 – 321.]

Garov, K. (2006). One example of a system of tasks on the topic „Algorithms and tasks in the Theory of numbers“ for teaching talented students on

Informatics. In: *Mathematics and education in Mathematics*. 35-th conference of the Union of the Bulgarian Mathematicians, 374 – 380. [Гъров, К. & Тодорова, Е. (2006). Примерна система от опорни задачи по темата „Алгоритми и задачи от теория на числата“ за подготовка на талантливи ученици по информатика, *Математика и математическо образование*. 35-та пролетна конференция на СМБ, 374 – 380.]

Dalinger, V. A. (1982). Theoretical model of the system of tasks as a tool for internal relations in school Mathemaics. In: *New research in education*. Moscow. Pedagogy, 1, 53 – 56. [Далингер, В. А. (1982). Теоретическая модель системы упражнений как средство реализации внутрипредметных связей в школьном курсе математики, св. научн. ст., *Новые исследования в педагогических науках*, Москва. Педагогика, 1, 53 – 56.]

Dureva, D. (2001). Module approach in school Informatics. *PhD thesis.* [Дурева, Д. (2001) Модулен подход в училищния курс по информатика, *Дис. за кандидат на пед. науки.*]

Kolyagin, Y. M. (1977). Mathematical tasks as a mean for students education and development. *Dr. thesis*. Moscow. [Колягин, Ю. М. (1977). Математические задачи как средство обучения и развития учащихся средней школы. *Автореф. диссертации доктора педагогических наук*. Москва.]

Kopitov, N. A. (1977). Design of a system of tasks aiming at geometric notions development. *PhD thesis*. Moscow. [Копытов, Н. А. (1977). Методика построения системы упражнений, ориентированной на формирование геометрических понятий, *Дисс. канд. пед. наук,* Москва.]

Kutassov, A., Pigolkina, T., Tchehlov, V. & Yakovleva T. (1981). *Mathematics for an university admission*. Moscow: Nauka. [Кутасов, А., Пиголкина, Т., Чехлов, В. & Яковлев, Т. (1981). *Пособие по математике для поступающих в вузы*. Москва. Наука.]

Muravin, K. S. (1966). Some prinsiples of a system of tasks design on Algebra for 8 grade. *Mathematics in school*, 5, 37 – 39. [Муравин, К. С. (1966). Некоторие принципи построения системы упражнений в курсе алгебры восьмилетней школы. *Математика в школе*, 5, 37 – 39.]

Sarantsev, G. S. (1982). A system of tasks in Mathematics as a research in education. Moscow. *Pedagogika, 1*, 40 – 42. [Саранцев, Г. С. (1982). Система упражнений по математике как предмет методического исследования в педагогических науках. Москва. *Педагогика, 1*, 40 – 42.]

Suvorova, S. V. (1982). A system of task as a base to organize students activity on Algebra lessosns for 6 – 8 grades. *PhD thesis*. [Суворова, С. В. (1982). Система упражнений как средство организации учебной деятельности при обучении алгебре в VI – VIII классах, *Дисс. канд. пед. наук*.]

Mathematics curriculum, XI grade, compulsory and selective education [Учебни програми по математика за XI клас задължителна и профилирана подготовка.]

SYSTEM OF TASKS IN MATHEMATICS EDUCATION

Abstract. This paper presents a view to the notion System of tasks as a pedagogical approach, which means education trough tasks. It covers all steps in the teaching process – introduction of a new knowledge, training and application. The multilevel model of the system of tasks is proposed here. Its design is based on hierarchy: objectives and planned achievements; selection of the tasks; organization, teaching technics and tools. The implementation of the system of tasks is illustrated for the first level on the Solid geometry topic on Intersections for upper secondary school, elective form of education. The teaching technics proposed are strongly based on using computer software as a tool for visualization and animation.

✉ **Dr. Petya Asenova, Assoc. Prof.**
Prof. Dr. Marin Marinov
Department of Computer Science
New Bulgarian University
21, Montevideo Blvd.
1618 Sofia, Bulgaria
E-mail: pasenova@nbu.bg
E-mail: mlmarinov@nbu.bg