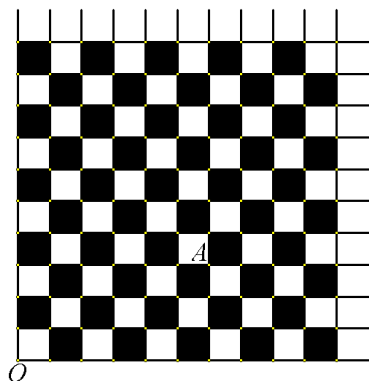


РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 6, 2018

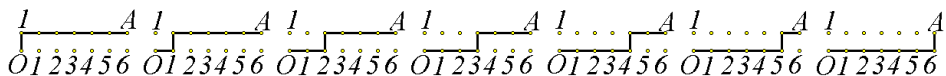
Задача 1. Точката O е левият долен връх на безкрайна шахматна дъска. Една муха тръгва от O и се движи само по страните на квадратчетата. Нека A е общ връх на някои квадратчета. Казваме, че мухата изминава пътя между O и A , ако се движи само надясно и нагоре. Ако точките O и A са противоположни върхове на правоъгълник $m \times n$, да се намери броят на пътищата, свързващи точките O и A , по които мухата може да мине, когато:

а) $m = 1$ и $n = 6$; б) $m = 3$ и $n = 6$; в) m и n са произволни естествени числа.



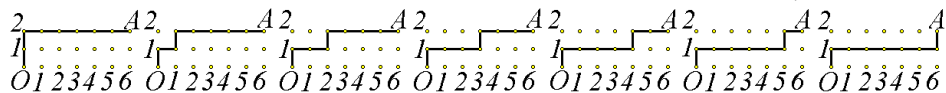
Сава Гроздев, София, и Веселин Ненков, Бели Осъм

Решение: означаваме върховете по хоризонталния и вертикалния ръб на дъската, следващи точката O , с естествените числа $1, 2, 3, \dots$. Първо да разгледаме 1×6 правоъгълника OB_1A_1 . На фиг. 1 са показани всичките възможни седем пътя, които може да измине мухата. Те се образуват след комбинирането на седемте точки $O, 1, 2, 3, 4, 5$ и 6 с точките, намиращи се над тях. Следователно в този случай броят на всички пътища може да се запише по следния начин: $C_7^1 = C_{6+1}^1$. Оттук става ясно, че в правоъгълника $1 \times n$ мухата може да измине $C = n + 1$ пътя.



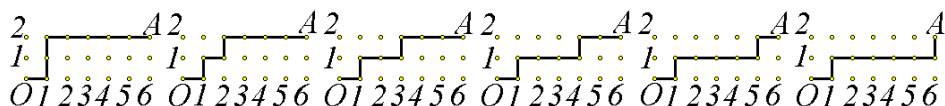
Фигура 1

Сега да разгледаме 2×6 правоъгълника OB_2A_2 . Ако мухата тръгне във вертикална посока и за момент спре в точката 1, по-нататък всички възможни пътища са както във вече разгледания случай. Следователно те са C_7^1 (фиг. 2.0).



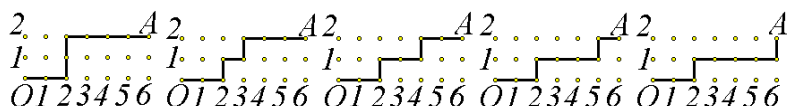
Фигура 2.0

След това нека мухата тръгва в хоризонтална посока и спре за момент в точката 1. Оттук нататък е приложима предишната ситуация, но за 6 точки. Това означава, че в този случай пътищата са C_6^1 (фиг. 2.1).

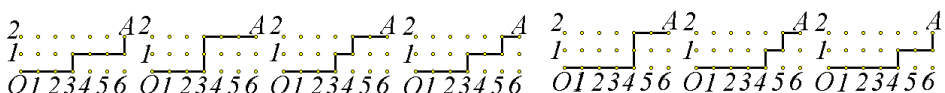


Фигура 2.1

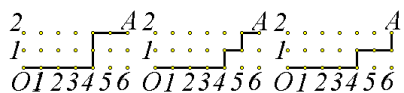
По-нататък, ако мухата временно спира за момент в точките 2, 3, 4, 5 и 6, по същия начин преброяваме, че възможните пътища са съответно C_5^1 , C_4^1 , C_3^1 , C_2^1 и C_1^1 (фиг. 2.2 – 2.6).



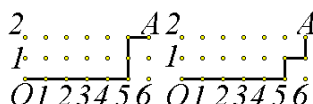
Фигура 2.2



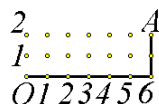
Фигура 2.3



Фигура 2.4



Фигура 2.5



Фигура 2.6

По този начин получаваме, че всички възможни пътища, които съответстват на правоъгълник 2×6 , са $C_7^1 + C_6^1 + C_5^1 + C_4^1 + C_3^1 + C_2^1 + C_1^1$. Ясно е, че тази сума е равна на $7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$. Ако разгледаме правоъгълника $2 \times n$, търсеният брой пътища е равен на $C_{n+1}^1 + C_n^1 + C_{n-1}^1 + \dots + C_3^1 + C_2^1 + C_1^1 = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$. Ще покажем още един начин за пресмятане на тази сума. Той се основава на следната:

Лема. Ако $s \geq k$, изпълнено е равенството:

$$C_s^k + C_{s-1}^k + C_{s-2}^k + \dots + C_{k+2}^k + C_{k+1}^k + C_k^k = C_{s+1}^{k+1}.$$

Доказателство. Ще използваме основното комбинаторно равенство, за да запишем следните равенства: $C_{s-1}^{k+1} = C_s^{k+1} - C_{s-1}^k$, $C_{s-2}^{k+1} = C_{s-1}^{k+1} - C_{s-2}^k$, $\dots$, $C_{k+3}^{k+1} = C_{k+4}^{k+1} - C_{k+3}^k$, $C_{k+2}^{k+1} = C_{k+3}^{k+1} - C_{k+2}^k$, $C_{k+1}^{k+1} = C_{k+2}^{k+1} - C_{k+1}^k$. След почленно събиране на тези равенства получаваме

$$C_{k+1}^{k+1} = C_s^{k+1} - C_{s-1}^k - C_{s-2}^k - \dots - C_{k+3}^k - C_{k+2}^k - C_{k+1}^k.$$

Следователно $C_{s-1}^k + C_{s-2}^k + \dots + C_{k+3}^k + C_{k+2}^k + C_{k+1}^k + C_k^k = C_s^{k+1}$ (използвахахме, че $C_{k+1}^{k+1} = C_k^k$). От последното и основното комбинаторно равенство получаваме

$$C_s^k + (C_{s-1}^k + C_{s-2}^k + \dots + C_{k+2}^k + C_{k+1}^k + C_k^k) = C_s^k + C_s^{k+1} = C_{s+1}^{k+1}.$$

С това лемата е доказана.

От лемата при $s = n+1$ и $k = 1$ отново получаваме

$$C_{n+1}^1 + C_n^1 + C_{n-1}^1 + \dots + C_3^1 + C_2^1 + C_1^1 = C_{n+2}^2 = \frac{(n+2)(n+1)}{2}.$$

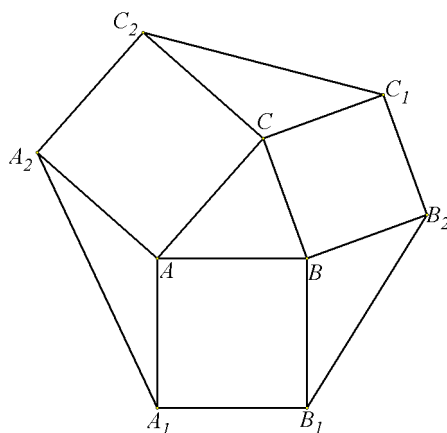
Установихме, че в случаите $1 \times n$ и $2 \times n$ възможните пътища са съответно C_{n+1}^1 и C_{n+2}^2 . Тези резултати ни дават основание да направим следното индукционно предположение: *За правоъгълник $(m-1) \times n$ всички възможни пътища са C_{n+m-1}^{m-1} .* Сега да разгледаме правоъгълник $m \times n$. Както в случая с 2×6 правоъгълника предполагахме, че мухата тръгва вертикално и спира в точката 1. Според индукционното предположение възможните пътища на мухата са C_{n+m-1}^{m-1} . След това мухата спира във всяка от точките 1, 2, 3, ..., $n-2$, $n-1$ и n . Отново според индукционното предположение получаваме, че в съответните случаи пътищата са C_{n+m-2}^{m-1} , C_{n+m-3}^{m-1} , C_{n+m-4}^{m-1} , ..., C_{m+1}^{m-1} , C_m^{m-1} , C_{m-1}^{m-1} . Така, като използваме лемата, получаваме, че общият брой пътища е равен на $C_{n+m-1}^{m-1} + C_{n+m-2}^{m-1} + C_{n+m-3}^{m-1} + C_{n+m-4}^{m-1} + \dots + C_{m+1}^{m-1} + C_m^{m-1} + C_{m-1}^{m-1} = C_{n+m}^m$. Въз основа на метода на математическата индукция заключаваме, че броят на всички възможни пътища, които може да измине мухата в правоъгълник $m \times n$, е равен на $C_{n+m}^m = \frac{(n+m)!}{n!m!}$. Ако $m = 3$ и $n = 6$, пътищата са $\frac{9!}{6!3!} = 84$.

Задача 2. Върху страните на AB , BC и CA на триъгълник ABC , външно за триъгълника, са построени съответно квадратите ABB_1A_1 , BCC_1B_2 и CAA_2C_2 . Ако лицата на шестоъгълника $A_1B_1B_2C_1C_2A_2$ и триъгълника $\bar{ABC}$ са съответно S_6 и S , да се намери най-малката стойност на частното $\frac{S_6}{S}$.

Христо Лесов, Казанлък

Решение: лицето S_6 на шестоъгълника $A_1B_1B_2C_1C_2A_2$ е сбор от лицето S на $\triangle ABC$, лицата на квадратите ABB_1A_1 , BCC_1B_2 , CAA_2C_2 и лицата на триъгълниците AA_1A_2 , BB_1B_2 и CC_1C_2 . Означаваме дължините на страните BC , CA и AB съответно с a , b и c . Тогава лицата на квадратите ABB_1A_1 , BCC_1B_2 и CAA_2C_2 са съответно равни на c^2 , a^2 и b^2 . Ако $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$ и $\sphericalangle BCA = \gamma$, то $\sphericalangle A_1AA_2 = 180^\circ - \alpha$, $\sphericalangle B_1BB_2 = 180^\circ - \beta$

и $\sphericalangle C_1CC_2 = 180^\circ - \gamma$. Следователно $S_{AA_1A_2} = \frac{1}{2}bc \sin \alpha = S$,
 $S_{BB_1B_2} = \frac{1}{2}ca \sin \beta = S$ и $S_{CC_1C_2} = \frac{1}{2}ab \sin \gamma = S$. Така получаваме, че
 $S_6 = 4S + a^2 + b^2 + c^2$. От известните зависимости $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$ и
 $S = \frac{1}{4}\sqrt{2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4}$, които са изпълнени за всеки
 триъгълник, се получава $(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2 \geq 0$. Равенство
 е изпълнено тогава и само тогава, когато $a = b = c$, т.е. $\triangle ABC$ е равностран-
 нен. Следователно $S_6 \geq 4S + 4\sqrt{3}S = 4(\sqrt{3} + 1)S$, т.е. $\frac{S_6}{S} \geq 4(\sqrt{3} + 1)$. Това
 означава, че търсената най-малка стойност е $4(\sqrt{3} + 1)$ и се достига само при
 равностранен триъгълник ABC .



Задача 3. Мерките на ъглите при върховете A , B и C на $\triangle ABC$ са съот-
 ветно α , β и γ , а M и N са точки от $\sphericalangle ACB$, за които са изпълнени равен-
 ствата $\sphericalangle AMC = 2\beta$, $\sphericalangle BMC = \alpha + \frac{\gamma}{2}$, $\sphericalangle BNC = 2\alpha$ и $\sphericalangle ANC = \beta + \frac{\gamma}{2}$. Ако
 E е средата на AB , а L е пресечната точка на ъглополовящата на $\sphericalangle ACB$ и
 AB , да се докаже, че точките M , N , L и E лежат на една окръжност.

Хаим Хаимов, Варна

