

ДРУГИ ВРЪЗКИ МЕЖДУ ЗАБЕЛЕЖИТЕЛНИ ТОЧКИ В ЧЕТИРИЪГЪЛНИКА

¹⁾Веселин Ненков, ²⁾Станислав Стефанов

¹⁾Висше военноморско училище „Никола Вапцаров“ – Варна

²⁾Технически университет – София

Резюме. В статията се описват нови геометрични връзки между различни забележителни точки в четириъгълника. Доказва се, че правите, определени от три конкретни двойки такива точки, са конкурентни. Разглеждат се и връзки между забележителни точки в четириъгълника, породени от изображенията изогонална спрегнатост и допълнение в триъгълника.

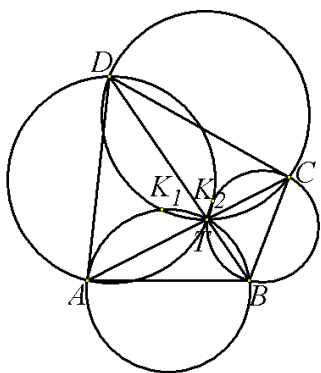
Ключови думи: четириъгълник; забележителни точки; линия; изогонална спрегнатост; допълнение

В статията (Nenkov & Stefanov, 2018) бяха разгледани редица геометрични връзки между различни забележителни точки в произволен изпъкнал четириъгълник. Към тях тук ще добавим нови. Една от тези връзки се заключава в това, че три прави, определени от три двойки забележителни точки, са конкурентни. Други са свързани с изображенията изогонална спрегнатост и допълнение в триъгълника. Преди да изложим въпросните връзки, ще припомним дефинициите на забележителните точки, които те касаят, и ще приведем тези от свойствата им, които ще използваме при доказателствата на тези връзки.

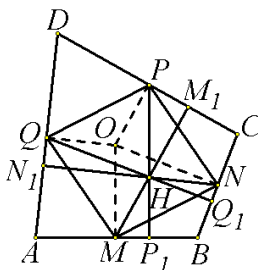
I. Дефиниции и свойства на забележителни точки в четириъгълника

1. Брокариани K_1 и K_2 на четириъгълник. Нека T е пресечната точка на диагоналите AC и BD на четириъгълника $ABCD$. Брокариана K_1 , съответна на страните AB и CD , се нарича втората обща точка на описаните окръжности около $\triangle ABT$ и $\triangle CDT$ (фиг. 1). Аналогично се дефинира и брокарианата K_2 , съответна на страните AD и BC (фиг. 1).

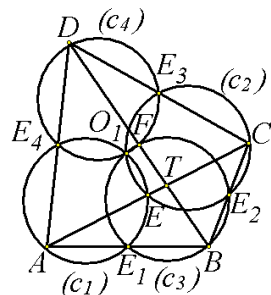
Да отбележим, че брокарианите на четириъгълника са аналози на точките на Брокер в триъгълника.



Фигура 1



Фигура 2



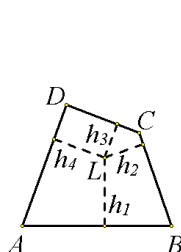
Фигура 3

2. Псевдоцентър O и ортоцентър H на четириъгълник. Нека в изпъкналия четириъгълник $ABCD$ радиусите на описаните около триъгълниците ABC , BCD , CDA и DAB окръжности са съответно R_{ABC} , R_{BCD} , R_{CDA} и R_{DAB} (фиг. 2). Доказва се, че в равнината на $ABCD$ съществува единствена точка O , за разстоянията от която до върховете му са изпълнени равенствата $AO \cdot R_{BCD} = BO \cdot R_{CDA} = CO \cdot R_{DAB} = DO \cdot R_{ABC}$. Тя се нарича *псевдоцентър*, или още *първи псевдоцентър* на четириъгълника $ABCD$.

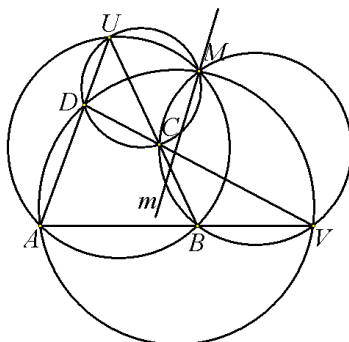
Едно основно свойство на псевдоцентъра на четириъгълника се състои в това, че ортогоналните му проекции върху правите, определени от страните, са върхове на успоредник (фиг. 2). Доказва се, че правите през върховете на този успоредник, перпендикулярни на срещуположните страни, се пресичат в една точка H . Тя се нарича *ортоцентър* на четириъгълника.

Да отбележим, че псевдоцентърът и ортоцентърът на изпъкналия четириъгълник са обобщения съответно на центъра на описаната окръжност и ортоцентъра на вписания четириъгълник.

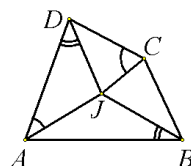
3. Втори псевдоцентър O_1 на четириъгълник. Освен псевдоцентъра друго обобщение на центъра на описаната окръжност на вписания четириъгълник за произволен изпъкнал четириъгълник е вторият му псевдоцентър O_1 . Ако E_1 и E_4 са средите съответно на страните AB и AD на четириъгълника $ABCD$, а E е средата на диагонала му AC , окръжността (c_1) , определена от точките E_1 , E и E_4 , се нарича *окръжност на Хапач*, съответна на върха A . Аналогично се дефинират окръжностите на Хапач, съответни на другите му върхове. Доказва се, че четирите окръжности на Хапач в произволен изпъкнал четириъгълник се пресичат в една точка. Тя се нарича *втори псевдоцентър* на $ABCD$ (фиг. 3).



Фигура 4



Фигура 5



Фигура 6

4. Точка на Лемоан на четириъгълник. Нека h_1 , h_2 , h_3 и h_4 са разстоянията от произволна точка в равнината на четириъгълник $ABCD$ съответно до правите, определени от страните му AB , BC , CD и DA (фиг. 4). Доказва се, че във вътрешността на $ABCD$ съществува единствена точка L , за която $\frac{h_1}{h_3} = \frac{AB}{CD}$ и $\frac{h_2}{h_4} = \frac{BC}{DA}$. Тя се нарича *точка на Лемоан на $ABCD$* .

Да отбележим, че точката на Лемоан на изпъкнал четириъгълник е аналог на точката на Лемоан в триъгълника.

5. Точка на Микел M на четириъгълник. Нека в изпъкналия четириъгълник $ABCD$ правите AD и BC се пресичат в точка U , а правите AB и DC – в точка V . Доказва се, че описаните около триъгълниците ABU , BCV , CDU и DAV окръжности имат обща точка M . Тя се нарича *точка на Микел на $ABCD$* (фиг. 5).

6. Инцентър J на четириъгълник. Доказва се, че в изпъкналия четириъгълник $ABCD$ съществува единствена точка J , за която са изпълнени равенствата: $\angle JAD + \angle JCD = \frac{1}{2}(\angle A + \angle C)$ и $\angle JBA + \angle JDA = \frac{1}{2}(\angle B + \angle D)$. Тя се нарича *инцентър на $ABCD$* (фиг. 6).

Да отбележим, че инцентърът на изпъкнал четириъгълник е обобщение на центъра на вписаната окръжност на описания четириъгълник.

Тук ще използваме следните свойства на така дефинираните забележителни точки в четириъгълника.

(I.1). Ако псевдоцентърът O лежи във вътрешността на четириъгълника $ABCD$, то са изпълнени равенствата: $\angle AOB = \angle ADB + \angle ACB$,

$\sphericalangle BOC = \sphericalangle BAC + \sphericalangle BDC$, $\sphericalangle COD = \sphericalangle CAD + \sphericalangle CBD$ и $\sphericalangle DOA = \sphericalangle DBA + \sphericalangle DCA$ (фиг. 2).

(I.2). Вторият псевдоцентър O_1 е симетричен на ортоцентъра H спрямо центъра на тежестта G на четириъгълника.

(I.3). Ако M е точката на Микел на четириъгълника $ABCD$ (фиг. 5), то са изпълнени равенствата $AM \cdot CM = BM \cdot DM = UM \cdot VM = r^2$. Числото r^2 се нарича константа на Микел за $ABCD$.

(I.4). Ако M е точката на Микел на четириъгълника $ABCD$, то ъглите AMC , BMD и UMV имат обща ъглополовяща m . Тя се нарича ос на Микел за $ABCD$ (фиг. 5).

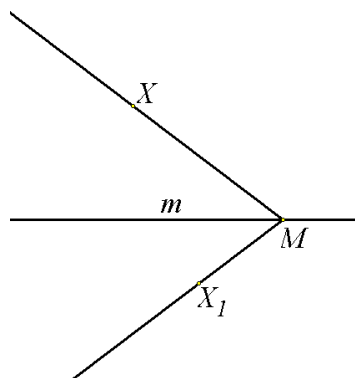
С точката на Микел на четириъгълника е свързано едно изображение в равнината, наречено инверсна симетрия, свойствата на което играят важна роля при доказателствата на почти всички твърдения в настоящата статия. Нека в равнината са дадени точка M , права m през M и положително число r^2 (фиг. 7). Композицията от симетрията g спрямо правата m и инверсията I с полюс M и степен r^2 се нарича *инверсна симетрия с полюс M , ос m и степен r^2* и се бележи с $Ig(M; m; r^2)$ или само с Ig . Инверсната симетрия се характеризира със следните свойства.

(I.5). Ако A и B са две точки в равнината, нележащи на една права с полюса M на инверсната симетрия Ig , и $Ig(A) = C$, $Ig(B) = D$, то M е точката на Микел на четириъгълника $ABCD$ (фиг. 8).

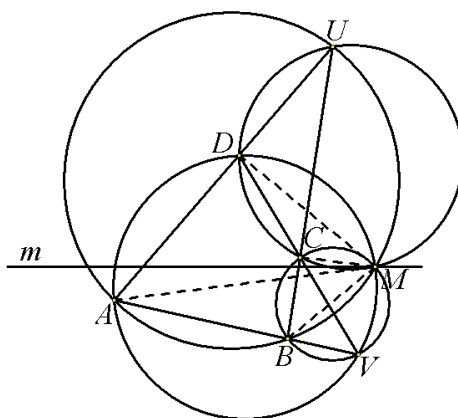
(I.6). Ако X_1 е образът на точката X при инверсната симетрия $Ig(M; m; r^2)$, то лъчът MX_1 е симетричен на лъча MX спрямо оста m и е изпълнено равенството $MX_1 \cdot MX = r^2$ (фиг. 7).

(I.7). Ако A и B са две точки в равнината, нележащи на една права с полюса M на инверсната симетрия Ig , и $Ig(A) = C$, $Ig(B) = D$, то $\triangle DCM \sim \triangle ABM$ (фиг. 8).

(I.8). Ако A и B са две точки в равнината, различни от полюса M на инверсната симетрия $Ig(M, m, r^2)$, и $Ig(A) = C$, $Ig(B) = D$, то $CD = \frac{AB \cdot r^2}{MA \cdot MB}$ (фиг. 8).



Фигура 7



Фигура 8

Нека M е точката на Микел на четириъгълника $ABCD$, m е оста му на Микел и r^2 е константата му на Микел. Инверсната симетрия $Ig(M, m, r^2)$ се нарича *инверсна изогоналност спрямо $ABCD$* и се бележи с $Ig(M; r^2)$.

Тук ще използваме следните свойства на инверсната изогоналност $Ig(M, r^2)$.

(I.9). При $Ig(M, r^2)$ бромарианите K_1 и K_2 се изобразяват една в друга, т.е. $Ig(K_1) = K_2$ и $Ig(K_2) = K_1$.

(I.10). При $Ig(M; r^2)$ първият псевдоцентър O се изобразява в пресечната точка на T на диагоналите, т.е. $Ig(O) = T$ и $Ig(T) = O$.

(I.11). При $Ig(M; r^2)$ вторият псевдоцентър O_1 се изобразява в точката L на Лемоан, т.е. $Ig(O_1) = L$ и $Ig(L) = O_1$.

(I.12). Инцентърът I е двойна точка на инверсната изогоналност $Ig(M; r^2)$.

Ще използваме и следните, вече доказани, връзки между разглежданите забележителни точки в четириъгълника.

(I.13). Първият псевдоцентър O , точката на Лемоан L и бромарианите K_1 и K_2 лежат на една окръжност – окръжността на Лемоан.

(I.14). Вторият псевдоцентър O_1 , пресечната точка T на диагоналите и бромарианите K_1 и K_2 лежат на една окръжност – Бромаровата окръжност.

(I.15). Вторият псевдоцентър O_1 , пресечната точка T на диагоналите и точката на Микел M лежат на една права – права на Микел.

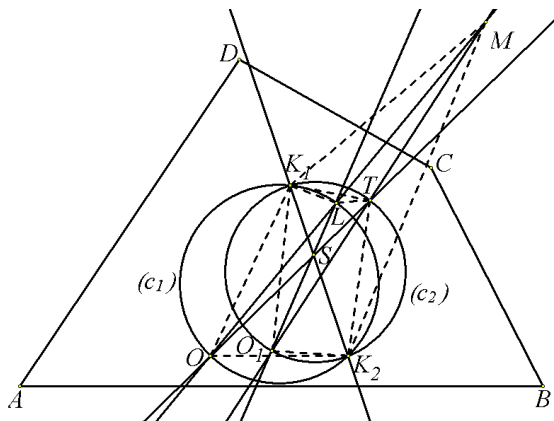
(I.16). Първият псевдоцентър O , точката на Лемоан L и точката на Микел M лежат на една права – права на Лемоан – образ на правата на Микел при инверсна изогоналност $Ig(M; r^2)$.

(I.17). Правата, определена от двата псевдоцентъра O и O_1 , е успоредна на правата, определена от точката на Лемоан L и пресечната точка T на диагоналите.

II. Нови връзки между забележителни точки в четириъгълника

1. Конкурентност на три прави, определени от три двойки забележителни точки. Ще докажем, че правите, определени от следните три двойки забележителни точки: (O, T) , (O_1, L) и (K_1, K_2) , са конкурентни.

Теорема 1. Нека $ABCD$ е четириъгълник с пресечна точка на диагоналите T , който не е вписан в окръжност и не е успоредник. Ако точките O, O_1, L, K_1 и K_2 са съответно първи псевдоцентър, втори псевдоцентър, точка на Лемоан, първа брокариана и втора брокариана на $ABCD$, правите LO_1, TO и K_1K_2 минават през една точка (фиг. 9).



Фигура 9

Доказателство. Означаваме точката, в която правата K_1K_2 пресича правата OT , с S_1 , а точката, в която правата LO_1 пресича правата OT – с S_2 (фиг. 9).

Достатъчно е да докажем, че $S_2 \equiv S_1$. Понеже $LT \parallel OO_1$ (от свойство (I.17),

имаме: $\frac{OS_2}{TS_2} = \frac{OO_1}{TL}$. Ще докажем, че $\sphericalangle O_1K_1T = \sphericalangle OK_2L$. Означаваме с

M точката на Микел на четириъгълника $ABCD$ и с $I \circ g(M, r^2)$ – инверсната изогоналност спрямо него. Понеже $I \circ g(O_1) = L$ (от свойство (I.11)) и $I \circ g(K_1) = K_2$ (от свойство (I.9), то $\Delta O_1 K_1 M \sim \Delta K_2 L M$ (от свойство (I.7)). Тогава $\sphericalangle O_1 K_1 M = \sphericalangle K_2 L M$. Понеже, от друга страна, $I \circ g(T) = O$ (от свойство (I.10)) и $I \circ g(K_1) = K_2$ (от свойство (I.9)), то аналогично $\Delta T K_1 M \sim \Delta K_2 O M$, откъдето $\sphericalangle T K_1 M = \sphericalangle K_2 O M$. Като използваме последните две равенства, получаваме:

$$(II.1) \quad \sphericalangle O_1 K_1 T = \sphericalangle O_1 K_1 M - \sphericalangle T K_1 M = \sphericalangle K_2 L M - \sphericalangle K_2 O M = \sphericalangle O K_2 L.$$

Така доказахме, че $\sphericalangle O_1 K_1 T = \sphericalangle O K_2 L$. Точките O , K_2 , K_1 и L лежат на една окръжност (c_1) – Лемоановата окръжност на четириъгълника $ABCD$ (от свойство (I.13)), и точките O_1 , K_2 , K_1 и T също лежат на една окръжност (c_2) – Брокаровата окръжност на $ABCD$ (от свойство (I.14)). Означаваме радиусите на окръжностите (c_1) и (c_2) съответно с R_1 и R_2 . От синусовата

теорема имаме $R_1 = \frac{OL}{2 \sin \sphericalangle O K_2 L}$ и $R_2 = \frac{TO_1}{2 \sin \sphericalangle O_1 K_1 T}$. Понеже от (II.1) следва,

че $\sin \sphericalangle O_1 K_1 T = \sin \sphericalangle O K_2 L$, то

$$(II.2) \quad \frac{R_2}{R_1} = \frac{TO_1 \sin \sphericalangle O K_2 L}{\sin \sphericalangle O_1 K_1 T \cdot OL} = \frac{TO_1}{OL}.$$

Означаваме $\sphericalangle K_1 O K_2 = \alpha$ и $\sphericalangle K_1 T K_2 = \beta$. От синусовата теорема имаме $\sin \alpha = \frac{K_1 K_2}{2R_1}$ и $\sin \beta = \frac{K_1 K_2}{2R_2}$. Оттук и от равенство (II.2) получаваме:

$$(II.3) \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{TO_1}{OL}.$$

От друга страна, понеже $I \circ g(O) = T$ и $I \circ g(K_1) = K_2$ (от свойства

(I.9)) и (I.10)), от свойство (I.8)) получаваме $OK_1 = TK_2 \frac{r^2}{MT \cdot MK_2}$, а понеже

$I \circ g(T) = O$ и $I \circ g(K_1) = K_2$ (от свойства (I.9)) и (I.10)), пак от свойство

(I.8)), имаме: $TK_1 = OK_2 \frac{r^2}{MO \cdot MK_2}$. Оттук чрез почленно деление получа-

ваме равенството

$$(II.4) \quad \frac{OK_1}{TK_1} \cdot \frac{OK_2}{TK_2} = \frac{MO}{MT}.$$

Аналогично, понеже $I \circ g(O) = T$ и $I \circ g(L) = O_1$ (от свойства (I.10)

и (I.11)), от свойство (I.8)) имаме $OL = TO_1 \frac{r^2}{MT \cdot MO_1}$ и $TL = OO_1 \frac{r^2}{MO \cdot MO_1}$,

откъдето след почленно деление получаваме

$$(II.5) \quad \frac{OL}{TL} \cdot \frac{OO_1}{TO_1} = \frac{MO}{MT}.$$

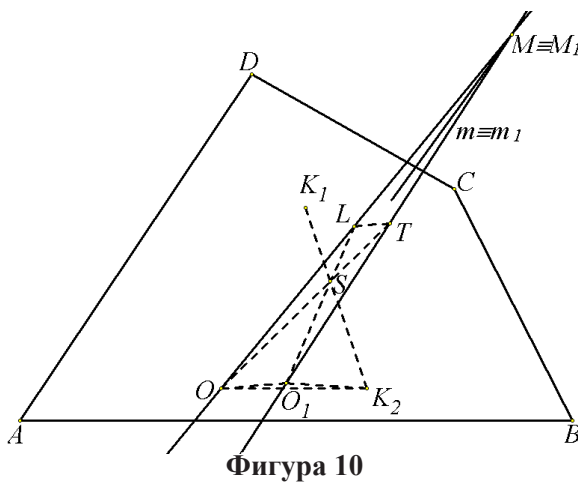
Като сравним десните части на равенства (II.4) и (II.5), получаваме

$$(II.6) \quad \frac{OK_1 \cdot OK_2}{TK_1 \cdot TK_2} = \frac{OL \cdot OO_1}{TL \cdot TO_1}.$$

С помощта на равенства (II.3) и (II.6) определяме:

$$\frac{OS_1}{TS_1} = \frac{S_{OK_2}}{S_{TK_2}} = \frac{OK_1 \cdot OK_2 \sin \alpha}{TK_1 \cdot TK_2 \sin \beta} = \frac{OL \cdot OO_1}{TL \cdot TO_1} \cdot \frac{TO_1}{OL} = \frac{OO_1}{TL}.$$

Така доказахме, че $\frac{OS_1}{TS_1} = \frac{OO_1}{TL}$, откъдето и от $\frac{OS_2}{TS_2} = \frac{OO_1}{TL}$ (по доказаното по-горе) и следва, че $S_1 \equiv S_2$. С това теоремата е доказана.



Фигура 10

Ще се спрем на едно интересно следствие от доказаната теорема.

Следствие. Четириъгълниците $ABCD$, OK_2TK_1 , $O_1K_2LK_1$ и OO_1TL имат общ инцентър, а последните три от тези четириъгълници имат и общ първи псевдоцентър (фиг. 10).

Доказателство. Ще докажем първо, че инверсните изогоналности спрямо чети-

триъгълниците $ABCD$, OK_2TK_1 , $O_1K_2LK_1$ и OO_1TL имат общ полюс, обща ос и равни степени, откъдето ще следва, че те съвпадат (т.е., че преобразуват точките в равнината по един и същ начин). Означаваме полюсите на инверсните изогоналности $I \circ g$ и $\bar{I} \circ \bar{g}$ съответно спрямо четириъгълник $ABCD$ и четириъгълник OK_2TK_1 с M и M_1 , осите им – съответно с m и m_1 , и степените им – съответно с r^2 и r_1^2 . Понеже $I \circ g(O) = T$ и $I \circ g(K_2) = K_1$ (от свойства (I.9) и (I.10)), то от свойство (I.5) следва, че полюсът M на инверсната симетрия $I \circ g$, т.е. точката на Микел на $ABCD$, е точка на Микел и на четириъгълника OK_2TK_1 , т.е. че полюсът M на $I \circ g$ съвпада с полюса M_1 на $I \circ g$.

От $I \circ g(O) = T$ (от свойство (I.10)) следва още, че правите OM и TM са симетрични спрямо оста m на инверсната симетрия $I \circ g$ (от свойство (I.6)), т.е. че m е ъглополовяща на ъгъл OMT . Но оста m_1 на инверсната изогоналност $\bar{I} \circ \bar{g}$ спрямо четириъгълника OK_2TK_1 също е ъглополовяща на ъгъл OMT (по дефиниция), следователно $m_1 \equiv m$. От $I \circ g(O) = T$ (от свойство (I.6)) за степента r^2 на инверсната симетрия $I \circ g$ имаме $r^2 = OM \cdot TM$ (от свойство (I.10)). За степента r_1^2 на $\bar{I} \circ \bar{g}$ пък имаме $r_1^2 = OM_1 \cdot TM_1$ (по дефиниция), следователно $r_1 \equiv r$ (понеже $M_1 \equiv M$ по доказаното). Убедихме се, че инверсните изогоналности $I \circ g$ и $\bar{I} \circ \bar{g}$ съвпадат. Тогава и двойните им точки – съответно инцентровете на четириъгълниците $ABCD$ и OK_2TK_1 , също ще съвпадат. Аналогично се доказва, че и инверсните изогоналности спрямо четириъгълниците $O_1K_2LK_1$ и OO_1TL съвпадат с инверсната изогоналност $I \circ g$ спрямо четириъгълника $ABCD$. Следователно инцентровете на тези четириъгълници също съвпадат с инцентъра на четириъгълника $ABCD$, т.е. инцентровете и на четирите четириъгълника съвпадат помежду си. Накрая от теорема 1 имаме, че правите LO_1 , TO и K_1K_2 минават през една точка S , което означава, че пресечните точки на диагоналите на четириъгълниците OK_2TK_1 , $O_1K_2LK_1$ и OO_1TL съвпадат с S . Тъй като инверсните изогоналности спрямо тези четириъгълници по доказаното съвпадат, то и образите на точката S при тях – псевдоцентровете на четириъгълниците OK_2TK_1 , $O_1K_2LK_1$ и OO_1TL , също ще съвпадат.

2. Свойства на забележителни точки в четириъгълника, свързани с изображенията изогонална спрегнатост и допълнение в триъгълника. Ще

припомним, че две точки в триъгълника се наричат изогонално спрегнати, когато лежат на изогонални прави спрямо ъглите му (две прави са изогонално спрегнати спрямо даден ъгъл, ако сключват равни ъгли с раменете на ъгъла). Ще ни бъде нужна следната

Лема 1. а) Ако вътрешните за даден $\triangle ABC$ точки X и Y са изогонално спрегнати, то е изпълнено равенството:

$$(*) \quad \sphericalangle AXB + \sphericalangle AYB = 180^\circ + \sphericalangle ACB.$$

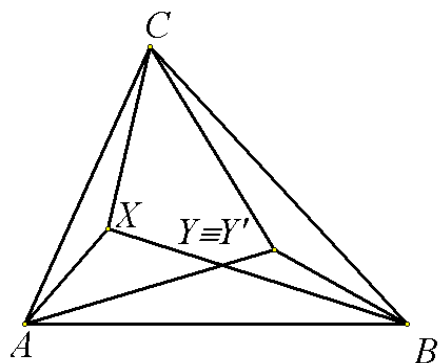
б) Обратно, ако за вътрешните за $\triangle ABC$ точки X и Y е изпълнено това равенство и те лежат на изогонални прави спрямо $\sphericalangle ACB$, те са изогонално спрегнати спрямо $\triangle ABC$.

Доказателство. а) Щом точките X и Y са изогонално спрегнати спрямо $\triangle ABC$, те лежат на изогонални прави спрямо всеки от ъглите му. Поради това имаме $\sphericalangle YAB = \sphericalangle XAC$ и $\sphericalangle YBA = \sphericalangle XBC$ (фиг. 11). Като използваме тези равенства, получаваме последователно:

$$\sphericalangle AYB = 180^\circ - \sphericalangle YAB - \sphericalangle YBA = 180^\circ - \sphericalangle XAC - \sphericalangle XBC$$

Но $\sphericalangle XAC + \sphericalangle XBC = \sphericalangle AXB - \sphericalangle ACB$, затова от последното равенство следва, че $\sphericalangle AYB = 180^\circ - (\sphericalangle AXB - \sphericalangle ACB)$. Оттук непосредствено получаваме, че е изпълнено доказваното равенство (*).

б) Означаваме изогонално спрегнатата точка на X спрямо $\triangle ABC$ с Y' (фиг. 11). Достатъчно е да докажем, че $Y' \equiv Y$. От доказаното (а) следва, че за точките X и Y' е изпълнено равенството $\sphericalangle AXB + \sphericalangle AY'B = 180^\circ + \sphericalangle ACB$. От друга страна, за точките X и Y по условие имаме $\sphericalangle AXB + \sphericalangle AYB = 180^\circ + \sphericalangle ACB$. Следва, че $\sphericalangle AY'B = \sphericalangle AYB$, т.е. точките Y и Y' лежат на една и съща дъга от

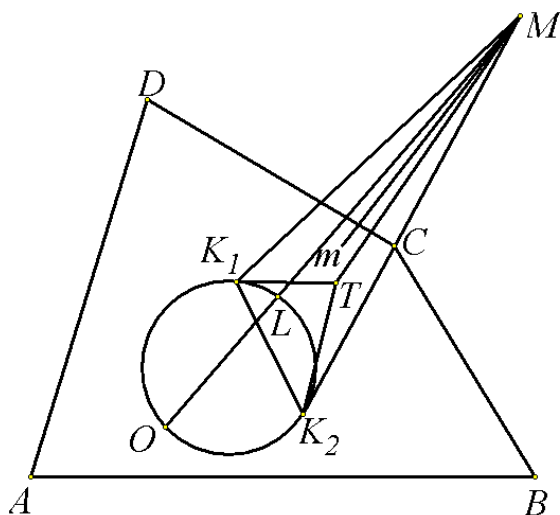


Фигура 11

окръжност с краища A и B . Ще покажем, че те лежат и на една и съща права през C , откъдето ще следва, че $Y' \equiv Y$. Правата CY' е изогонална на правата CX спрямо ъгъл ACB (понеже Y' е изогонално спрегнатата точка на X спрямо $\triangle ABC$). Но и правата CY по условие е изогонална на CX спрямо ъгъл ACB , следователно тя съвпада с CY' . Получихме, че точките Y и Y' лежат на една и съща права през C , откъдето, както видя-

хме, и следва, че $Y \equiv Y'$, т.е. че точките X и Y са изогонално спрегнати спрямо $\triangle ABC$.

Теорема 2. Нека $ABCD$ е четириъгълник с пресечна точка на диагоналите T и не е успоредник. Ако K_1 и K_2 са брокарианите, M е точката на Микел и L е точката на Лемоан за $ABCD$, точките L и T са изогонално спрегнати спрямо $\triangle K_1K_2M$ (фиг.12).



Фигура 12

Доказателство. Нека за определеност точките L и T са вътрешни за $\triangle K_1K_2M$ (фиг. 12). Точките K_1 и K_2 са инверсно изогонални спрямо четириъгълника $ABCD$ (от свойство (I.9)), следователно правите MK_1 и MK_2 са симетрични спрямо оста m на инверсната изогоналност $I \circ g(M; r^2)$ (от свойство (I.6)). От това следва, че оста m е ъглополовяща на ъгъла K_1MK_2 . Точката на Лемоан L лежи на правата на Лемоан, минаваща през точката M , а точката T – на правата на Микел, също минаваща през точката M (от свойства (I.15) и (I.16)). Двете прави LM и TM са инверсно изогонални и следователно са симетрични спрямо оста m на инверсната симетрия $I \circ g$ (от свойство (I.6)), т.е. спрямо ъглополовящата на ъгъл K_1MK_2 . Тогава тези прави са изогонални спрямо ъгъл K_1MK_2 . Получаваме, че точките L и T лежат на изогонални прави спрямо ъгъл K_1MK_2 . За да докажем, че те са изо-

гонално спрегнати спрямо $\Delta K_1 K_2 M$ съгласно лема 1, остава да докажем, че е изпълнено равенството:

$$(**) \quad \sphericalangle K_1 T K_2 + \sphericalangle K_1 L K_2 = 180^\circ + \sphericalangle K_1 M K_2.$$

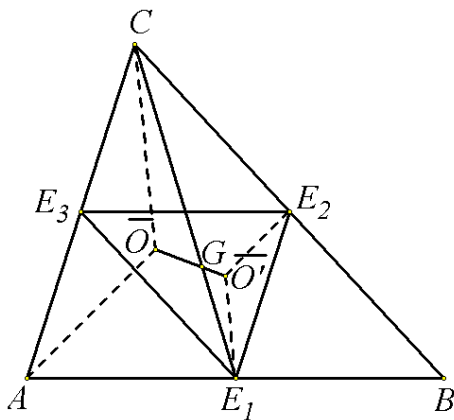
Нека O е първият псевдоцентър на четириъгълника $ABCD$. Имаме $I \circ g(K_1) = K_2$ и $I \circ g(O) = T$ (от свойства (I.9) и (I.10)). Тогава $\Delta M K_1 O \sim \Delta M T K_2$ (от свойство (I.7)), откъдето имаме $\sphericalangle M K_1 O = \sphericalangle M T K_2$. Аналогично от $I \circ g(K_2) = K_1$ и $I \circ g(O) = T$ (от свойства (I.9) и (I.10)) следва, че $\Delta M K_2 O \sim \Delta M T K_1$, откъдето $\sphericalangle M K_2 O = \sphericalangle M T K_1$. Като използваме последните две равенства от четириъгълника OK_2MK_1 получаваме:

$$\sphericalangle K_1 M K_2 + \sphericalangle K_1 O K_2 = 360^\circ - (\sphericalangle M K_1 O + \sphericalangle M K_2 O) = 360^\circ - \sphericalangle M T K_2 - \sphericalangle M T K_1 = \sphericalangle K_1 T K_2.$$

Точките K_1 , O , K_2 и L лежат на една окръжност – Лемоановата окръжност на четириъгълника $ABCD$ (от свойство (I.13)), поради което $\sphericalangle K_1 O K_2 = 180^\circ - \sphericalangle K_1 L K_2$.

Заместваме с помощта на последното равенство в лявата част на по-горното и получаваме $\sphericalangle K_1 M K_2 + (180^\circ - \sphericalangle K_1 L K_2) = \sphericalangle K_1 T K_2$, т.е. $\sphericalangle K_1 T K_2 + \sphericalangle K_1 L K_2 = 180^\circ + \sphericalangle K_1 M K_2$. С това равенство $(**)$ е доказано и можем да заключим, че точките L и T са изогонално спрегнати спрямо $\Delta K_1 K_2 M$.

Сега ще се спрем на една връзка между първия и втория псевдоцентър на четириъгълника, свързана с изображенията изогонална спрегнатост и допълнение в триъгълник.



Фигура 13

Определение 1. Нека G е медицентърът на даден ΔABC и $h\left(G; -\frac{1}{2}\right)$ е

хомотетията с център G и коефициент $-\frac{1}{2}$. Образът $\bar{O}'$ на произволна точка $\bar{O}$ в равнината на триъгълника при тази хомотетия се нарича допълнение на $\bar{O}$ (фиг.13).

Ще използваме следната

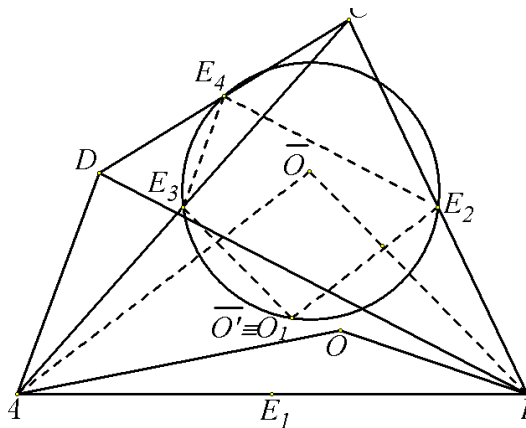
Лема 2. Нека E_1 , E_2 и E_3 са средите съответно на страните AB ,

BC и CA на даден $\triangle ABC$. За произволна точка $\bar{O}$ и нейното допълнение $\bar{O}'$ са изпълнени равенствата $\sphericalangle E_3 \bar{O}' E_2 = \sphericalangle A \bar{O} B$ и $\sphericalangle E_3 \bar{O}' E_1 = \sphericalangle B \bar{O} C$ (фиг.13).

Доказателство. Медианите AE_2 , BE_3 и CE_1 на $\triangle ABC$ се пресичат в медицентъра му G , който ги дели в отношение $2:1$, считано от върховете на триъгълника. Следователно образите на точките A , B и C при хомотетията $h\left(G; -\frac{1}{2}\right)$ са съответно E_2 , E_3 и E_1 . Освен това образът на точката $\bar{O}$ при $h\left(G; -\frac{1}{2}\right)$ е нейното допълнение $\bar{O}'$ (по определение 1). Хомотетията запазва ъглите между съответните прави, затова $\sphericalangle E_3 \bar{O}' E_2 = \sphericalangle A \bar{O} B$ и $\sphericalangle E_3 \bar{O}' E_1 = \sphericalangle B \bar{O} C$.

Теорема 3. Нека O е първият псевдоцентър на изпъкналия четириъгълник $ABCD$ и $\bar{O}$ е изогонално спрегнатата му точка спрямо $\triangle ABC$. Вторият псевдоцентър O_1 на $ABCD$ съвпада с допълнението на точката $\bar{O}$ спрямо $\triangle ABC$ (фиг. 14).

Доказателство. Без ограничение можем да считаме, че първият псевдоцентър O е вътрешна точка за $\triangle ABC$. Означаваме средите на страните AB , BC и CD съответно с E_1 , E_2 и E_4 , а средата на диагонала AC – с E_3 (фиг. 14).



Фигура 14

Понеже точките O и $\bar{O}$ са изогонално спрегнати спрямо $\triangle ABC$ (по условие), по лема 1 е изпълнено равенството $\sphericalangle A \bar{O} B + \sphericalangle A O B = 180^\circ + \sphericalangle A C B$.

Но $\angle AOB = \angle ACB + \angle ADB$ (от свойство (I.1)), следователно $\angle A\bar{O}B = 180^\circ + \angle ACB - \angle AOB = 180^\circ - \angle ADB$.

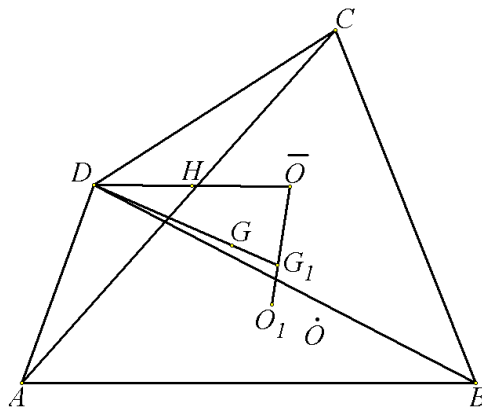
Означаваме допълнението на точката $\bar{O}$ спрямо $\triangle ABC$ с $\bar{O}'$. По лема 2 е изпълнено равенството $\angle E_3\bar{O}'E_2 = \angle A\bar{O}B$. Тогава предвид горното равенство имаме

$$(II.7) \quad \angle E_3\bar{O}'E_2 = 180^\circ - \angle ADB.$$

От друга страна, вторият псевдоцентър O_1 на $ABCD$ лежи на окръжността на Хапач, съответна на върха C , т.е. на окръжността, определена от точките E_4 , E_3 и E_2 (по определение). Тогава $\angle E_3O_1E_2 = 180^\circ - \angle E_3E_4E_2$. Но $\angle E_3E_4E_2 = \angle ADB$ (ъгли с еднорамени рамене), затова $\angle E_3O_1E_2 = 180^\circ - \angle ADB$. Оттук и от (II.7) следва, че $\angle E_3\bar{O}'E_2 = \angle E_3O_1E_2$. Можем да заключим, че точките $\bar{O}'$ и O_1 лежат на дъга от окръжност с краища точките E_3 и E_2 . По същия начин се доказва, че те лежат на дъга от окръжност с краища точките E_3 и E_1 , следователно те съвпадат. Така доказахме, че вторият псевдоцентър O_1 на $ABCD$ съвпада с допълнението $\bar{O}'$ на точката $\bar{O}$ спрямо $\triangle ABC$.

С помощта на доказаната връзка между първия и втория псевдоцентър на четириъгълника се получава още една връзка между първия псевдоцентър и ортоцентъра му.

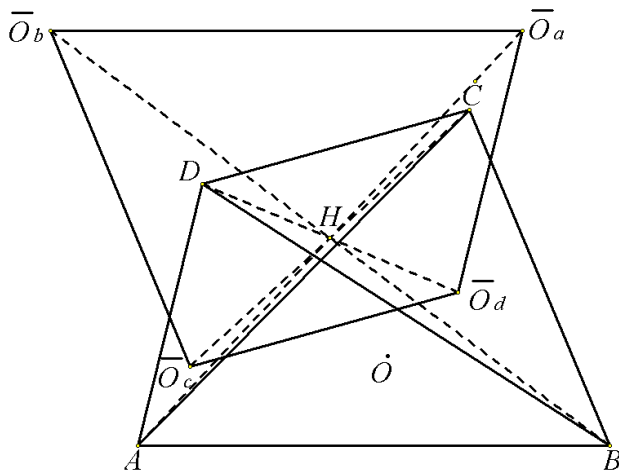
Теорема 4. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник и O е първият му псевдоцентър, а $\bar{O}$ е изогонално спрегната точка на O спрямо $\triangle ABC$. Тогава ортоцентърът H на $ABCD$ е среда на отсечката $D\bar{O}$ (фиг. 15).



Фигура 15

Доказателство. Нека G_1 е медицентърът на $\triangle ABC$. Вторият псевдоцентър O_1 съвпада с допълнението на точката $\bar{O}$ спрямо $\triangle ABC$ (по теорема 3). Следователно точката G_1 лежи на отсечката $O_1\bar{O}$ и $\bar{O}G_1 = 2O_1G_1$ (по определение 1). Вторият псевдоцентър O_1 е симетричен на ортоцентъра H спрямо центъра на тежестта G на четириъгълника $ABCD$ (по свойство (I.2)). Следователно точката G е среда на отсечката O_1H . От друга страна, добре известно е, че центърът на тежестта G на четириъгълника $ABCD$ лежи на отсечката, определена от върха D и центъра на тежестта G_1 на $\triangle ABC$. Прилагаме теоремата на Менелай към $\triangle O_1\bar{O}H$ и правата DG_1 и получаваме $\frac{O_1G_1}{G_1\bar{O}} \cdot \frac{\bar{O}D}{DH} \cdot \frac{HG}{GO_1} = 1$. Понеже $HG = GO_1$ и $G_1\bar{O} = 2O_1G_1$ (от по-горе), оттук следва, че $\bar{O}D = 2DH$, т.е. точката H е среда на отсечката $D\bar{O}$. С това теоремата е доказана.

Следствие. Нека O е първият псевдоцентър на четириъгълника $ABCD$ и $\bar{O}_a, \bar{O}_b, \bar{O}_c$ и $\bar{O}_d$ са съответно изогонално спрегнатите му точки спрямо триъгълниците BCD, CDA, DAB и ABC . Четириъгълникът $\bar{O}_a\bar{O}_b\bar{O}_c\bar{O}_d$ е симетричен на $ABCD$ спрямо ортоцентъра му H (фиг. 16).



Фигура 16

Доказателство. По доказаната теорема ортоцентърът H е среда на отсечката $D\bar{O}_d$. По същия начин се доказва, че H е среда и на отсечките $A\bar{O}_a$,

$B\bar{O}_b$ и $C\bar{O}_c$. Следователно четириъгълникът $\bar{O}_a\bar{O}_b\bar{O}_c\bar{O}_d$ е симетричен на $ABCD$ спрямо H .

В заключение привеждаме без доказателство още една интересна връзка между двата псевдоцентъра на четириъгълника.

Теорема 5. Нека E_1, E_2, E_3 са средите съответно на страните AD и AB и диагонала BD на изпъкналия четириъгълник $ABCD$. Ако вторият псевдоцентър O_1 се явява забележителна точка на $\Delta E_1E_2E_3$ от определен тип, то изогонално спрегнатата точка $\bar{O}$ на първия псевдоцентър O спрямо ΔABD се явява забележителна точка на ΔABD от същия тип.

ЛИТЕРАТУРА

- Ненков, В. & С. Стефанов. (2018). Връзки между забележителни точки в четириъгълника, *Математика и информатика*, 1, 73 – 82.
- Хаимов, Х. (2001). Брокарианите – забележителни точки в четириъгълника, *Математика и информатика*, 6, 17 – 23.
- Хаимов, Х. (2005). Брокариани на четириъгълника, *Математика*, 5, 15 – 22
- Хаимов, Х. (2010). Геометрия на четириъгълника, *Математика плюс*, 2, 28 – 51.
- Хаимов, Х. (2011). Точка на Лемоан, *Математика*, 6, 3 – 12.
- Ненков, В., Стефанов, С. & Хаимов, Х. (2017). Геометрия на четириъгълника. Точка на Микел. Инверсна изогоналност, *Математика и информатика*, 1, 81 – 93.
- Стефанов, С. (2017). Втори псевдоцентър на четириъгълник, *Математика и информатика*, 3, 261 – 270.
- Стефанов, С. (2018). Инцентър на четириъгълник, *Математика и информатика*, 4, 338 – 351.
- Ненков, В., Стефанов, С. & Хаимов, Х. (2016). Псевдоцентър и ортоцентър – забележителни точки в четириъгълника“, *Математика и информатика*, 6, 614 – 625.
- Сергеева, Т., Шабанова, М. & С. Гроздев. (2014). *Основы динамической геометрии*. Москва: АСОУ.
- Георгиева, М. & С. Гроздев. (2016). *Морфодинамиката за развитието на ноосферния интелект*. (4-то изд.). София: Изток-Запад. ISBN 987-619-152-869-1. 327 стр.

REFERENCES

- Nenkov, V. & Stefanov, S. (2018). Relations between notable points in the quadrilateral, *Mathematics and Informatics*, 1, 73 – 82.
- Haimov, H. (2001). The Brocardians – notable points in the quadrilateral (In Bulgarian). *Mathematics and Informatics*, 6, 17 – 23.
- Haimov, H. (2005). Brocardians of the quadrilateral (In Bulgarian). *Mathematics*, 5, 15 – 22.

- Haimov, H. (2010). Geometry of the quadrilateral (In Bulgarian). *Mathematics Plus*, 2, 28 – 51.
- Haimov, H. (2011). Lemoine point (In Bulgarian). *Mathematics*, 6, 3 – 12.
- Nenkov, V., Stefanov, S. & Haimov, H. (2017). Geometry of the quadrilateral. Miquel point. Inverse isogonality (In Bulgarian). *Mathematics and Informatics*, 1, 81 – 93.
- Stefanov, S. (2017). Second pseudocenter of the quadrilateral (in Bulgarian). *Mathematics and Informatics*, 2, 261 – 270.
- Stefanov, S. (2018). Incenter of the quadrilateral, *Mathematics and Informatics*, 4, 338 – 351.
- Nenkov, V., Stefanov, S. & Haimov, H. (2016). Pseudocenter and orthocenter – notable points in the quadrilateral (in Bulgarian). *Mathematics and Informatics*, 6, 614 – 625.
- Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics: The Bulgaria Experience (Theory and Practice)*. Sofia: ADE. ISBN 978-954-92139-1-1
- Sergeeva, T., Shabanova, M. & Grozdev, S. (2014). *Foundations of Dynamic Geometry*. Moscow: ASOU (in Russian).
- Georgieva, M. & Grozdev, S. (2016). *Morfodinamikata za razvitiето na noosfernia intelekt*. (4th ed.), Sofia: Iztok-Zapad. ISBN 987-619-152-869-1, 327 pages.

OTHER CONNECTIONS BETWEEN NOTABLE POINTS IN THE QUADRILATERAL

Abstract. New geometric connections between different notable points in the quadrilateral are considered in the paper. It is proved that the lines, determined by three pairs of notable points are concurrent. Also, connections between notable points in the quadrilateral, generated by the transformations isogonal conjugate and complement are discussed.

Keywords: quadrilateral; notable point; line; isogonal conjugate; complement

✉ **Dr. Veselin Nenkov, Assoc. Prof.**
Researcher ID AAB-5776-2019
“Nikola Vaptsarov” Naval Academy
73, Vasil Drumev St.
Varna, Bulgaria
E-mail: vnenkov@mail.bg

✉ **Mr. Stanislav Stefanov**
Technical University – Sofia
1000 Sofia, Bulgaria
E-mail: stanislav.toshkov@abv.bg