

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 1, 2019

Задача 1. Да се намерят всички цели числа x , за които $\sqrt{x(x-9)+2019}$ е естествено число.

Христо Лесов, Казанлък

Решение: нека $\sqrt{x(x-9)+2019} = n$ е естествено число. Тогава $x^2 - 9x + 2019 - n^2 = 0$. Решенията на това квадратно относно x уравнение се определят чрез формулата $x_{1,2} = \frac{1}{2}(9 \pm \sqrt{D})$, където $D = 4n^2 - 7995$. Оттук следва, че x е цяло число, когато $D = m^2$ за нечетно естествено число m . Така стигаме до равенството $4n^2 - 7995 = m^2$ или $4n^2 - m^2 = 7995$, което се представя във вида $(2n+m)(2n-m) = 1.3.13.41$. Тъй като $0 < 2n-m < 2n+m$, получаваме следните възможности: $2n-m = 1, 3, 5, 13, 15, 39, 41, 65$ и техните съответни $2n+m = 7995, 2665, 1599, 615, 533, 205, 195, 123$. След почленно събиране и изваждане на тези две равенства изразяваме последователно: $4n = 7996, 2668, 1604, 628, 548, 244, 236, 188$ и $4m = 7994, 2662, 1594, 602, 518, 166, 154, 58$. Оттук имаме $n = 1999, 667, 401, 157, 137, 61, 59, 47$ и $m = 3997, 1331, 797, 301, 259, 83, 77, 29$. Сега за стойностите на x получаваме: $x = \frac{1}{2}(9+m) = 2003, 670, 403, 155, 134, 46, 43, 19$ и $x = \frac{1}{2}(9-m) = -1994, -661, -394, -146, -125, -37, -34, -10$.

Задача 2. В изпъкналият четириъгълник $ABCD$ са изпълнени равенствата $\sphericalangle ADC = \sphericalangle ABC$ и $AD \neq AB$. Ако симетралата на диагонала BD пресича диагонала AC в точка O , да се докажат равенствата $\sphericalangle ADO = \sphericalangle DBC$ и $\sphericalangle ABO = \sphericalangle BDC$.

Хаим Хаимов, Варна

Решение: нека O' е вътрешна за $ABCD$ точка, за която са изпълнени равенствата $\sphericalangle ADO' = \sphericalangle DBC$ и $\sphericalangle ABO' = \sphericalangle BDC$. Ще докажем, че $O' \equiv O$, с което твърдението на задачата ще бъде доказано. Въвеждаме означенията

$\sphericalangle CAD = \alpha_1$, $\sphericalangle CAB = \alpha_2$, $\sphericalangle O'AD = x$, $\sphericalangle O'AB = y$, $\sphericalangle DBC = \beta_2$, $\sphericalangle BDC = \delta_1$, $\sphericalangle O'DB = \omega_1$ и $\sphericalangle O'BD = \omega_2$. От тези означения и построението на точката O' следва, че $\sphericalangle ADO' = \sphericalangle DBC = \beta_2$ и $\sphericalangle ABO' = \sphericalangle BDC = \delta_1$.

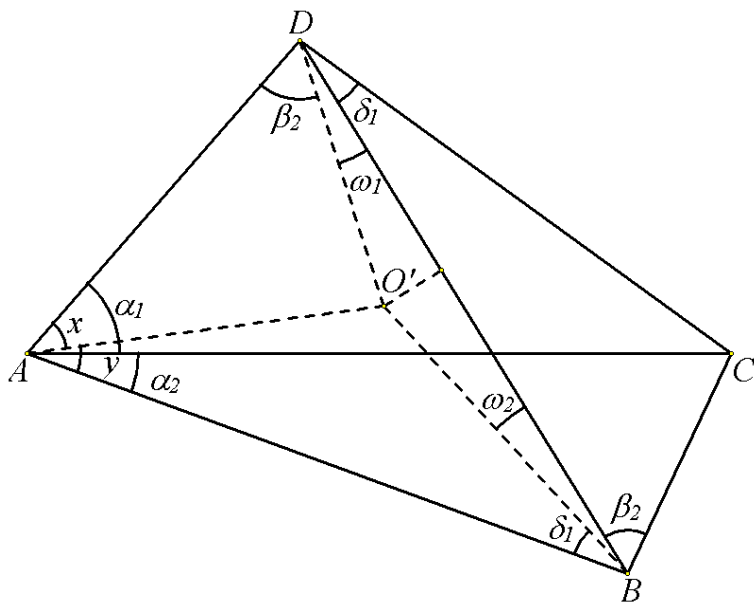
Тъй като по условие $\sphericalangle ADC = \sphericalangle ABC$, то $\beta_2 + \omega_1 + \delta_1 = \delta_1 + \omega_2 + \beta_2$. Оттук имаме $\omega_1 = \omega_2$. Следователно $BO' = DO'$, което означава, че точката O' лежи върху симетралата на диагонала BD . Остава да докажем, че O' лежи

върху AC . От синусовата теорема за $\triangle AO'D$ и $\triangle AO'B$ имаме съответно

$$\frac{\sin x}{\sin \beta_2} = \frac{DO'}{AO'} \quad \text{и} \quad \frac{\sin y}{\sin \delta_1} = \frac{BO'}{AO'}. \quad \text{От тези равенства и } BO' = DO' \text{ следва}$$

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin \beta_2}{\sin \delta_1}. \quad \text{Освен това от синусовата теорема за } \triangle ACD \text{ имаме}$$

$$\frac{\sin \beta_2}{\sin \delta_1} = \frac{CD}{BC}. \quad \text{Оттук и предишното равенство получаваме } \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{CD}{BC}.$$



Сега от синусовата теорема за триъгълниците ACD и ABC имаме съответно $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \angle ADC} = \frac{CD}{AC}$ и $\frac{\sin \alpha_2}{\sin \angle ABC} = \frac{BC}{AC}$. След разделяне на тези равенства получаваме $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{\sin \angle ABC}{\sin \angle ADC} = \frac{CD}{BC}$. Тъй като по условие $\angle ADC = \angle ABC$, то оттук имаме $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{CD}{BC}$. Това равенство заедно с $\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{CD}{BC}$ води до $\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2}$. Освен това $x + y = \alpha_1 + \alpha_2$. Затова $180^\circ - (x + y) = 180^\circ - (\alpha_1 + \alpha_2)$. Затова третите ъгли на триъгълниците Δ_1 и Δ_2 , които имат съответно ъгли x , y и α_1 , α_2 , са равни. От пропорцията $\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2}$ и синусовата теорема следва, че страните, сключващи тези ъгли, са пропорционални. Следователно $\Delta_1 \sim \Delta_2$. Оттук следва, че $x = \alpha_1$ и $y = \alpha_2$. Следователно O' е точка от правата AC . С това задачата е решена.

Задача 3. Да се намерят най-малката и най-голямата стойност на линейната функция $u = 3x - y + 4z + 15$, ако $x^2 + y^2 + z^2 - 16x - 14y - 12z + 123 = 0$.
Сава Гроздев, София, и Веселин Ненков, Бели Осъм

Решение: разглежданото уравнение може да се запише по следния начин $(x-8)^2 + (y-7)^2 + (z-6)^2 = 26$, което е уравнение на сфера s център $\Omega(8, 7, 6)$ и радиус $R = \sqrt{26}$. Нека $\vec{n}(3, -1, 4)$ е вектор, определен от коефициентите пред променливите x , y и z във функцията u . Най-малката и най-голямата стойност на u се получават в допирните точки съответно на допирателните равнини α_1 и α_2 към s , които са перпендикулярни на $\vec{n}(3, -1, 4)$. Следователно търсените екстремални стойности са пресечните точки на правата l , минаваща през Ω и успоредна на $\vec{n}(3, -1, 4)$. Правата l , определена от точката $\Omega(8, 7, 6)$ и колинеарния ѝ вектор $\vec{n}(3, -1, 4)$, има следните па-

раметрични уравнения $l: \begin{cases} x = 8 + 3t, \\ y = 7 - t, \\ z = 6 + 4t. \end{cases}$ Заместваме x , y и z от последните

равенства в уравнението на s и получаваме $9t^2 + t^2 + 16t^2 = 26$, т.е. $t^2 = 1$. Следователно пресечните точки на l и s са $M_1(5, 8, 2)$ и $M_2(11, 6, 10)$, които се получават съответно при $t_1 = -1$ и $t_2 = 1$. Заместваме координатите на M_1 и M_2 във функцията u и получаваме $u_1(M_1) = 30$ и $u_2(M_2) = 82$. Следователно $u_{\min}(5, 8, 2) = 30$ и $u_{\max}(11, 6, 10) = 82$.