Конкурсни задачи
Contest Problems
Рубриката се води от доц. д-р Веселин Ненков

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 2, 2019

Задача 1. Да се намерят всички тройки естествени числа, които са дължини в сантиметри на ръбовете на правоъгълен паралелепипед с телесен диагонал $\sqrt{2019}\ cm$.

Христо Лесов, Казанлък

Решение. Нека $a \geq b \geq c \geq 1$ са дължините в сантиметри на ръбовете на правоъгълен паралелепипед с диагонал $\sqrt{2019}\ cm$. Изпълнено е равенството $a^2 + b^2 + c^2 = 2019$. Оттук имаме $3a^2 \geq a^2 + b^2 + c^2 = 2019$. Следователно $a^2 \geq 673 > 625 = 25^2$. Затова $a > 25$, т.е. $a \geq 26$. От друга страна, $a^2 + 1^2 + 1^2 \leq a^2 + b^2 + c^2 = 2019$, което означава, че $a^2 < 2017 < 2025 = 45^2$. Затова $a < 45$, т.е. $a \leq 44$. По този начин получихме, че $26 \leq a \leq 44$. Като направим необходимите проверки при съответните стойности на a, ще намерим решенията на задачата.

1) При $a = 44$ имаме $b^2 + c^2 = 83$. Оттук $2b^2 \geq b^2 + c^2 = 83$ и $b^2 > 41 > 36 = 6^2$. Следователно $b \geq 7$. Освен това $b^2 + 1^2 \leq b^2 + c^2 = 83$, откъдето $b^2 \leq 82 < 100 = 10^2$. Следователно $b \leq 9$. Така получихме $7 \leq b \leq 9$. При $b = 7$, $b = 8$ и $b = 9$ получаваме съответно $c^2 = 34$, $c^2 = 14$ и $c^2 = 2$. И трите случая не водят до решение на задачата.

2) При $a = 43$ имаме $b^2 + c^2 = 170$. Оттук намираме $10 \leq b \leq 13$. При $b = 10$ и $b = 12$ последното равенство не води до целочислени стойности за c. При $b = 11$ и $b = 13$ получаваме съответно $c = 7$ и $c = 1$. Така получихме следните две тройки решения на задачата $a = 43$, $b = 11$, $c = 7$ и $a = 43$, $b = 13$, $c = 1$.

3) При $a = 42$ имаме $b^2 + c^2 = 255$. Оттук намираме $12 \leq b \leq 15$. С непосредствена проверка се забелязва, че при тези цели стойности за b не се получават цели решения на последното уравнение. Така установяваме, че в този случай не се получават решения на задачата за c.

4) При $a = 41$ имаме $b^2 + c^2 = 338$. Оттук намираме $13 \leq b \leq 18$. При $b = 14$, $b = 15$, $b = 16$ и $b = 18$ последното равенство не води до целочислени стойности за c. При $b = 13$ и $b = 17$ получаваме съответно $c = 13$ и $c = 7$.

Така получихме следните две тройки решения на задачата $a = 41$, $b = 13$, $c = 13$ и $a = 41$, $b = 17$, $c = 7$.

5) При $a = 40$ имаме $b^2 + c^2 = 419$. Оттук намираме $15 \le b \le 20$. С непосредствена проверка се забелязва, че при тези цели стойности за b не се получават цели решения на последното уравнение за c. Така установяваме, че в този случай не се получават решения на задачата.

6) При $a = 39$ имаме $b^2 + c^2 = 498$. Оттук намираме $16 \le b \le 22$. С непосредствена проверка се забелязва, че при тези цели стойности за b не се получават цели решения на последното уравнение за c. Така установяваме, че в този случай не се получават решения на задачата.

7) При $a = 38$ имаме $b^2 + c^2 = 575$. Оттук намираме $17 \le b \le 23$. С непосредствена проверка се забелязва, че при тези цели стойности за b не се получават цели решения на последното уравнение за c. Така установяваме, че в този случай не се получават решения на задачата.

8) При $a = 37$ имаме $b^2 + c^2 = 650$. Оттук намираме $19 \le b \le 25$. При $b = 20$, $b = 21$, $b = 22$ и $b = 24$ последното равенство не води до целочислени стойности за c. При $b = 19$, $b = 23$ и $b = 25$ получаваме съответно $c = 17$, $c = 11$ и $c = 5$. Така получихме следните две тройки решения на задачата $a = 37$, $b = 19$, $c = 17$; $a = 37$, $b = 23$, $c = 11$ и $a = 37$, $b = 25$, $c = 5$.

9) При $a = 36$ имаме $b^2 + c^2 = 723$. Оттук намираме $20 \le b \le 26$. С непосредствена проверка се забелязва, че при тези цели стойности за b не се получават цели решения на последното уравнение за c. Така установяваме, че в този случай не се получават решения на задачата.

10) При $a = 35$ имаме $b^2 + c^2 = 794$. Оттук намираме $20 \le b \le 28$. При $b = 20$, $b = 21$, $b = 22$, $b = 23$, $b = 24$, $b = 26$, $b = 27$ и $b = 28$ последното равенство не води до целочислени стойности за c. При $b = 25$ получаваме $c = 13$. Така получихме следната тройка $a = 35$, $b = 25$, $c = 13$, която е решение на задачата.

11) При $a = 34$ имаме $b^2 + c^2 = 863$. Оттук намираме $21 \le b \le 29$. С непосредствена проверка се забелязва, че при тези цели стойности за b не се получават цели решения на последното уравнение за c. Така установяваме, че в този случай не се получават решения на задачата.

12) При $a = 33$ имаме $b^2 + c^2 = 930$. Оттук намираме $22 \le b \le 30$. С непосредствена проверка се забелязва, че при тези цели стойности за b не се получават цели решения на последното уравнение за c. Така установяваме, че в този случай не се получават решения на задачата.

13) При $a = 32$ имаме $b^2 + c^2 = 995$. Оттук намираме $23 \le b \le 31$. С непосредствена проверка се забелязва, че при тези цели стойности за b не се получават цели решения на последното уравнение за c. Така установяваме, че в този случай не се получават решения на задачата.

14) При $a = 31$ имаме $b^2 + c^2 = 1058$. Оттук намираме $23 \le b \le 31$. При $b = 24$, $b = 25$, $b = 26$, $b = 27$, $b = 28$, $b = 29$, $b = 30$ и $b = 31$ последното равенство не води до целочислени стойности за c. При $b = 23$ получаваме $c = 23$. Така получихме следната тройка $a = 31$, $b = 23$, $c = 23$, която е решение на задачата.

15) При $a = 30$ имаме $b^2 + c^2 = 1119$. Оттук намираме $24 \le b \le 30$. С непосредствена проверка се забелязва, че при тези цели стойности за b не се получават цели решения на последното уравнение за c. Така установяваме, че в този случай не се получават решения на задачата.

16) При $a = 29$ имаме $b^2 + c^2 = 1178$. Оттук намираме $24 \le b \le 29$. С непосредствена проверка се забелязва, че при тези цели стойности за b не се получават цели решения на последното уравнение за c. Така установяваме, че в този случай не се получават решения на задачата.

17) При $a = 28$ имаме $b^2 + c^2 = 1235$. Оттук намираме $25 \le b \le 28$. С непосредствена проверка се забелязва, че при тези цели стойности за b не се получават цели решения на последното уравнение за c. Така установяваме, че в този случай не се получават решения на задачата.

18) При $a = 27$ имаме $b^2 + c^2 = 1290$. Оттук намираме $24 \le b \le 27$. С непосредствена проверка се забелязва, че при тези цели стойности за b не се получават цели решения на последното уравнение за c. Така установяваме, че в този случай не се получават решения на задачата.

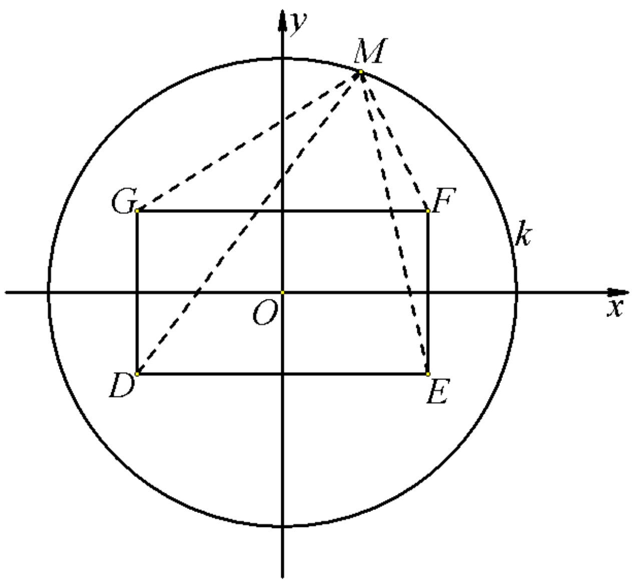
19) При $a = 26$ имаме $b^2 + c^2 = 1343$. Оттук намираме $24 \le b \le 26$. С непосредствена проверка се забелязва, че при тези цели стойности за b не се получават цели решения на последното уравнение за c. Така установяваме, че в този случай не се получават решения на задачата.

Заключаваме, че целочислените тройки (a,b,c), които са решения на задачата, се изчерпват със следните девет: $(43,13,1)$, $(43,11,7)$, $(41,17,7)$, $(41,13,13)$, $(37,25,5)$, $(37,23,11)$, $(37,19,17)$, $(35,25,13)$, $(31,23,23)$.

Задача 2. Окръжност k с диаметър d_1 и правоъгълник $DEFG$ с диагонал d_2 имат общ център. Да се докаже, че за произволна точка M от k е изпълнено равенството $MD^2+ME^2+MF^2+MG^2=d_1^2+d_2^2$.

Милен Найденов, Варна

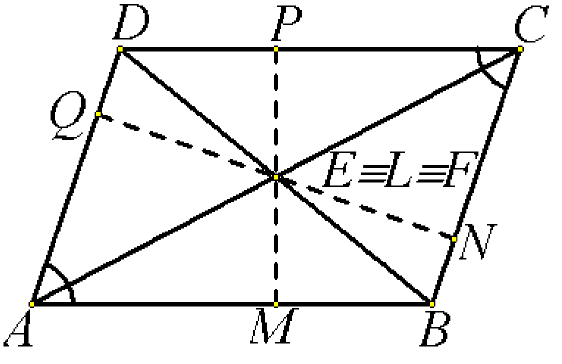
Решение. Нека O е общият център на k и $DEFG$. Разглеждаме Декартова координатна система Oxy, така че $Ox\perp EF$. Ако $F(n,m)$, то $G(n,-m)$, $E(-n,m)$ и $D(-n,-m)$. Сега, ако $M(x,y)$, то $MD^2=(x+n)^2+(y+m)^2$, $ME^2=(x+n)^2+(y-m)^2$, $MF^2=(x-n)^2+(y-m)^2$ и $MG^2=(x-n)^2+(y+m)^2$. От последните равенства следва $MD^2+ME^2+MF^2+MG^2=4(x^2+y^2)+4(n^2+m^2)$. Тъй като $x^2+y^2=\dfrac{d_1^2}{4}$ и $n^2+m^2=\dfrac{d_2^2}{4}$, то $MD^2+ME^2+MF^2+MG^2=d_1^2+d_2^2$.



Задача 3. В изпъкналия четириъгълник $ABCD$ са изпълнени равенствата $AD.CD=AB.BC$ и $\sphericalangle DAB=\sphericalangle DCB$. Точката L е средата на диагонала BD, а M, N, P и Q са ортогоналните проекции на L съответно върху правите AB, BC, CD и DA. Ако E и F са средите съответно на отсечките MP и NQ, да се докаже, че точките E, L и F лежат на една права.

Хаим Хаимов, Варна

Решение. От равенството $AD.CD = AB.BC$ следва, че $\dfrac{AD}{BC} = \dfrac{AB}{CD}$. От това равенство и $\sphericalangle DAB = \sphericalangle DCB$ следва $\Delta ABD \sim \Delta CDB$. Оттук получаваме, че $\sphericalangle ABD = \sphericalangle CBD$. Затова $ABCD$ е успоредник. Следователно $L \equiv E \equiv F$. Това означава, че всяка права през L има желаното свойство.



Конкурсни задачи
Contest Problems
Рубриката се води от доц. д-р Веселин Ненков

КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ НА БРОЯ

Задача 1. Дадени са системите линейни уравнения

$$\text{A:}\left|\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & ax_2 & & & = & 1 \\ x_1 & - & ax_2 & - & x_3 & = & -4 \\ -2x_1 & & & + & x_3 & = & b \end{array}\right. \text{ и B:}\left|\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & x_2 & - & ax_3 & = & -2 \\ & & 2x_2 & + & ax_3 & = & 5 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & (1-b)x_3 & = & -7 \end{array}\right.$$

За кои реални стойности на a и b двете системи са еквивалентни?

Росен Николаев, Варна

Задача 2. Точката M от $\sphericalangle ACB$ на ΔABC е такава, че $\sphericalangle MAC = \sphericalangle MCB$ и $\sphericalangle MBC = \sphericalangle MCA$. Точката N лежи върху описаната за ΔAMC окръжност k, така че да лежи в $\sphericalangle ACB$. Окръжност c, минаваща през точките A и N, пресича описаната около ΔBNC окръжност π в точка P, а описаната около ΔBMN окръжност ε – в точка Q. Да се докаже, че $\sphericalangle QPB = \sphericalangle QAC$ и $\sphericalangle QPA = \sphericalangle QBC$.

Хаим Хаимов, Варна

Задача 3. Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност Γ с център O. Ако I_A, I_B, I_C и I_D са центровете на вписаните окръжности съответно за триъгълниците BCD, CDA, DAB и ABC, да се докаже, че $OI_A^2 + OI_C^2 = OI_B^2 + OI_D^2$.

Сава Гроздев, София и Веселин Ненков, Бели Осъм

Краен срок за изпращане на решения 31 юли 2020 г.

С годишни абонаменти за 2020 г. се награждават: преподавателите ***Хаим Хаимов*** (ул. „Братя Шкорпил“ № 16, 9000 Варна) и ***Милен Найденов*** (ул. „Сан Стефано“ № 2, вход B, 9000 Варна) за активното им участие в предлагането на нови авторски задачи за рубриката „Конкурсни задачи на броя“, както и ***проф. Павел Азълов*** (Пенсилвански държавен университет, САЩ) за статиите „Архивите говорят – национални състезания по информатика“ от брой 1/2019 и „Архивите говорят – международни състезания по информатика“ от брой 2/2019.

Конкурсът продължава и през настоящата година. В края на 2020 г. ще бъдат определени читателите с най-интересни решения на конкурсните задачи, а така също най-активните композитори на нови задачи, както и авторите на най-интересните статии. Първенците ще получат безплатни годишни абонаменти за 2021 г.

Решенията трябва да бъдат представени ясно, като е задължително всяка задача да е на отделен лист. Моля, изпращайте решенията на адреса на редакцията или в електронен вид на mathinfo@azbuki.bg и vnenkov@mail.bg