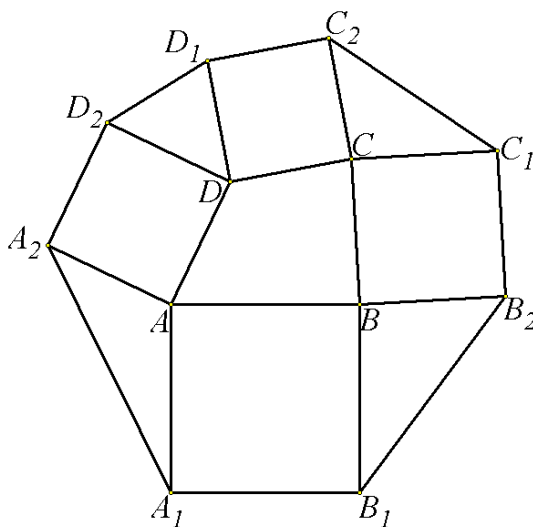


РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 3, 2019

Задача 1. Върху страните AB , BC , CD и DA на изпъкнал четириъгълник $ABCD$, външно за четириъгълника, са построени съответно квадратите ABB_1A_1 , BCC_1B_2 , CDD_1C_2 и DAA_2D_2 . Ако лицата на четириъгълника $ABCD$ и осмоъгълника $A_1B_1B_2C_1C_2D_1D_2A_2$ са съответно S и S_1 , да се намери най-малката стойност на $\frac{S_1}{S}$.

Христо Лесов, Казанлък



Решение: лицето S_1 на осмоъгълника $A_1B_1B_2C_1C_2D_1D_2A_2$ е сума от лицето S на четириъгълника $ABCD$, лицата на квадратите ABB_1A_1 , BCC_1B_2 , CDD_1C_2 и DAA_2D_2 и лицата на триъгълниците AA_1A_2 , BB_1B_2 , CC_1C_2 и DD_1D_2 . Ако дължините на AB , BC , CD и DA са съответно a , b , c и d , лицата на квадратите ABB_1A_1 , BCC_1B_2 , CDD_1C_2 и DAA_2D_2 са равни съответно на a^2 , b^2 , c^2 и d^2 . Ако $\angle DAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BCD = \gamma$ и $\angle CDA = \delta$, за лицата на триъгълниците AA_1A_2 , BB_1B_2 , CC_1C_2 и DD_1D_2 са изпълнени равенствата $S_{AA_1A_2} = S_{ABD} = -da \sin$,

става равносилно с $\frac{DO}{CO} = \frac{DA}{CB}$. Последното равенство е изпълнено, защото $\triangle AOD \sim \triangle BOC$. С това задачата е решена.

Задача 3. Да се пресметне интегралът $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{2(n+1)}} \arcsin \frac{1}{x} dx$, където n е цяло неотрицателно число.

Виктория Събева, Стара Загора

Решение: след полагането $\frac{1}{x} = \sin t$, $x = \frac{1}{\sin t}$, $dx = -\frac{\cos t}{\sin^2 t} dt$,

x	1	∞
$t = \arcsin \frac{1}{x}$	$\frac{\pi}{2}$	0

се получава

$$\begin{aligned}
 \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{2(n+1)}} \arcsin \frac{1}{x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n+2} t \left(-\frac{\cos t}{\sin^2 t} \right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin^{2n} t d(\sin t) = \frac{1}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t d(\sin^{2n+1} t) = \\
 &= \frac{1}{2n+1} \left(t \sin^{2n+1} t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t dt \right) = \frac{1}{2n+1} \left(\frac{\pi}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t)^n d \cos t \right) = \\
 &= \frac{1}{2n+1} \left(\frac{\pi}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 t)^n d \cos t \right) = \frac{1}{2n+1} \left(\frac{\pi}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k (\cos^2 t)^k d \cos t \right) = \\
 &= \frac{1}{2n+1} \left(\frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \frac{(\cos t)^{2k+1}}{2k+1} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{1}{2n+1} \left(\frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2k+1} (-1) \right) = \\
 &= \frac{1}{2n+1} \left(\frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2k+1} \right)
 \end{aligned}$$