

ЗА ВЕКТОРНОТО ПРОСТРАНСТВО НА МАГИЧЕСКИТЕ КВАДРАТИ ОТ ТРЕТИ РЕД (В ЗАНИМАТЕЛНАТА МАТЕМАТИКА)

¹Здравко Лалчев,² **Маргарита Върбанова,**

²Мирослав Стоимиров,¹Ирина Вутова

¹Софийски университет „Св. Климент Охридски“

²Великотърновски университет „Св. св. Кирил и Методий“

Резюме. Предмет на настоящата разработка са магическите квадрати и по-конкретно векторното пространство на магическите квадрати от трети ред. Целта е да се отговори на въпроси, като: коя редица от девет числа може да бъде „форматирана“ в магически квадрат и как това може да се направи; дали наличието на аритметична прогресия от девет числа е необходимо и достатъчно условие за построяване на магически квадрат; дали всяко число може да бъде характеристично число на магически квадрат; съществува ли „формула“ за намиране на подходящите числа за построяване на магически квадрат и други. За да отговорим на повдигнатите въпроси, ние използваме елементарен инструментариум на линейната алгебра за решаване на системи линейни уравнения.

Ключови думи: магически квадрати; векторно пространство; занимателна математика

Предварителни бележки

В днешно време магическите квадрати са често срещан занимателен елемент в обучението по математика. Но интересът към тази материя датира от дълбока древност и в области, които не са пряко свързани с математическото образование. До наши дни са достигнали образци, „написани“ върху коруба на костенурка в Китай още от времето преди новата ера. През Средните векове магическите квадрати в Европа освен занимателно са придобили и сакрално значение. Известни автори са „заключвали“ своите произведения (книги, картини) с магически квадрати, за да ги предпазят от „зли сили“. Широко известен е магическият квадрат (от четвърти ред) върху гравюрата „Меланхолия“ на Алберт Дюрер. Нещо повече, имаме основание да твърдим, че през XIII век е имало хора (математици), които се специализирали в „производство“ на магически квадрати. Един от тях е византийският монах математик Емануил Мосхополус. Неговият диагонален метод за построяване на магически

квадрати от нечетен ред по елегантност и простота е ненадминат и досега.

Днес, ако отворим и разлистим който и да е от учебниците по математика от първи до четвърти клас, е много вероятно да попаднем на магически квадрат. И това не е случайно. Магическите квадрати намират място в урока по математика най-малко по две причини. От една страна, проверката за „магичност“ е удобно средство за непринудено упражнение върху пресмятането и постигане на добра изчислителна „техника“. От друга страна, неочакваното и любопитно свойство на числовия квадрат (един и същ сбор по редове, стълбове и диагонали) „пробужда“ интереса на много ученици към математиката. Според нас това са достатъчни основания учителят да разполага с повече информация по темата и да има „под ръка“ знания и умения за построяване на магически квадрати, които да използва в подходящия педагогически момент. Ако учителят има достатъчно добри компетенции по темата, то той може да разнообрази своята учебна работа и да направи урока по математика занимателен и интересен за повечето ученици.

1. Няколко общи бележки за числовите и магическите квадрати

Бележка 1. Още в началото ще уточним, че в следващите разсъждения ще става дума за числови квадрати от трети ред.

Бележка 2. В популярната литература по занимателна математика обикновено се разглеждат квадрати, чиито елементи са последователни естествени числа или образуват аритметична прогресия с членове естествени числа. За целите на изследването ще разширим дефиницията на магическите квадрати. С други думи, елементите на числовите квадрати, които разглеждаме, са реални числа и още нещо. И така:

Нека числата $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$ са реални и

$$\Delta = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ е числов квадрат, за който сборът на числата по редове,}$$

сборът на числата по колони и сборът на числата по диагонали е винаги едно и също число (S), т.е.

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} = a_{21} + a_{22} + a_{23} = S$$

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} = a_{31} + a_{32} + a_{33} = S$$

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} = a_{11} + a_{21} + a_{31} = S$$

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} = a_{12} + a_{22} + a_{32} = S$$

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} = a_{13} + a_{23} + a_{33} = S$$

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{12} + a_{13} &= a_{11} + a_{22} + a_{33} = S \\ a_{11} + a_{12} + a_{13} &= a_{13} + a_{22} + a_{31} = S. \end{aligned}$$

В този случай се казва, че Δ е **магически квадрат**. Който и да е от неговите сборове (числото S) се нарича **характеристично число** на квадрата, а числото a_{22} (числото в центъра) се нарича **централно число** на квадрата. Числата от двойките (a_{11}, a_{33}) , (a_{13}, a_{31}) , (a_{21}, a_{23}) , (a_{12}, a_{32}) се наричат съответно **централно симетрични** числа. Първия и третия ред ще наричаме **външни редове**; първата и третата колона ще наричаме **външни колони**.

Да разгледаме няколко примера на магически квадрати:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{-5}{2} & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}.$$

Характеристичните числа на квадратите A , B и C са съответно 3, 15 и $\frac{3}{2}$, а централните числа – съответно 1, 5, $\frac{1}{2}$.

Ако обърнем внимание на централните числа на магическите квадрати, ще видим, че първо: централното число е равно на една трета от съответното характеристично число ($1 = \frac{1}{3} \cdot 3$, $5 = \frac{1}{3} \cdot 15$, $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}$) и второ: централното число е средно аритметично на своите съседни съответно в реда, в колоната и в диагонала (например за централното число 1 на квадрат A са изпълнени равенствата:

$$1 = \frac{1}{2}(-2 + 4), 1 = \frac{1}{2}(2 + 0), 1 = \frac{1}{2}(2 + 0), 1 = \frac{1}{2}(-1 + 3)).$$

Изниква въпросът: дали посочените свойства важат за всеки магически квадрат? Ще покажем, че отговорът е положителен, т.е. в сила е следната

Теорема 1. Нека $\Delta = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ е магически квадрат с характеристично число S . Тогава:

1) $a_{22} = \frac{1}{3}S$ (централното число е равно на една трета от характеристичното число);

$$2) a_{22} = \frac{1}{2}(a_{21} + a_{23}), \quad a_{22} = \frac{1}{2}(a_{12} + a_{32}), \quad a_{22} = \frac{1}{2}(a_{11} + a_{33}),$$

$$a_{22} = \frac{1}{2}(a_{13} + a_{31})$$

(централното число е средно аритметично на числата от всяка двойка централно симетрични числа.)

Доказателство

Тъй като Δ е магически квадрат с характеристично число S , то сборът на числата от втората колона, сборът на числата от главния диагонал и сборът на числата от второстепенния диагонал са равни съответно на числото S . Последното означава, че са верни равенствата:

$$a_{12} + a_{22} + a_{32} = S$$

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} = S$$

$$a_{13} + a_{22} + a_{31} = S$$

След почленно събиране на равенствата и групиране по подходящ начин достигаем до равенството:

$$(a_{11} + a_{12} + a_{13}) + (a_{31} + a_{32} + a_{33}) + 3a_{22} = 3S, \text{ т.е. } S + S + 3a_{22} = 3S.$$

$$\text{Следователно } a_{22} = \frac{1}{3}S.$$

Също така:

$$a_{21} + a_{22} + a_{23} = S \Leftrightarrow a_{21} + \frac{1}{3}S + a_{23} = S \Leftrightarrow \frac{2}{3}S = a_{21} + a_{23} \Leftrightarrow 2a_{22} = a_{21} + a_{23}.$$

$$\text{Следователно } a_{22} = \frac{1}{2}(a_{21} + a_{23}).$$

Аналогично се доказват и останалите три равенства.

Нека наредим числата на всеки от квадратите A , B и C по големина, т.е.

$$A = (-2, -1, 0, 0, 2, 2, 3, 4); \quad B = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9);$$

$$C = \left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

Забелязваме, че числата на един от квадратите (B) са последователни членове на аритметична прогресия, а на другите два не са. Възниква въпросът дали наличието на аритметична прогресия е случайно.

Ще докажем, че аритметичната прогресия е достатъчно условие числата да образуват магически квадрат. С други думи, ще докажем следната:

Теорема 2. Ако числата: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9$ са последователни членове (в този ред) на аритметична прогресия, то съществува магически квадрат, на който същите числа са елементи.

Доказателство

Да разгледаме числовия квадрат $K = \begin{bmatrix} a_4 & a_9 & a_2 \\ a_3 & a_5 & a_7 \\ a_8 & a_1 & a_6 \end{bmatrix}.$

Нека разликата на прогресията е числото d .

Тогава за сбора на числата от първия ред на квадрата получаваме:

$$a_4 + a_9 + a_2 = a_1 + 3d + a_1 + 8d + a_1 + d = 3a_1 + 12d = 3a_5$$

По аналогичен начин се проверява, че сборът от числата от всеки от останалите редове, от всяка от колоните и от всеки от диагоналите е равен на $3a_5$.

Следователно квадратът K е магически.

2. За векторното пространство на магическите квадрати от трети ред

Нека $\Delta_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ и $\Delta_2 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$ са числови квадрати.

Числовият квадрат $\Delta_3 = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} \end{bmatrix}$ се нарича

алгебричен сбор на квадратите Δ_1 и Δ_2 . (Записва се: $\Delta_1 + \Delta_2 = \Delta_3$.)

Нека $\Delta = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ е числов квадрат и λ е число.

Числовият квадрат $\Gamma = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{bmatrix}$ се нарича произведение на

числото λ и квадрата Δ . (Записва се: $\lambda \cdot \Delta = \Gamma$.)

Тъй като числовите квадрати са матрици, то множеството на числовите квадрати е линейно (векторно) пространство. Но всеки числов квадрат е наредена деветорка от числа $(a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33})$. Тогава размерността на това пространство е числото 9. От друга страна, лесно се проверява, че нулевата матрица е магически квадрат, сборът на два магически квадрата е магически квадрат и произведението на число и магически квадрат е магически квадрат. Това означава, че множеството на магическите квадрати е векторно пространство – подпространство на векторното пространство на числовите квадрати.

Изниква въпрос за размерността на векторното пространство на магическите квадрати. Този въпрос е свързан с въпроса колко от деветте числа, които участват в магическия квадрат, могат бъдат избирани произволно и как се определят останалите. Отговорите на тези въпроси се съдържат в следната:

Теорема 3. Векторното пространство на магическите квадрати (от трети ред) е тримерно. При построяване на магически квадрат три от числата може

да бъдат избрани произволно (например a_{31}, a_{32}, a_{33}), а останалите се определят еднозначно от тях.

Доказателство

Нека разгледаме системата от магическите квадрати $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, където:

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \Delta_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \Delta_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ще докажем, че тази система е линейно независима.

Действително:

Нека x_1, x_2, x_3 са числа, за които линейната комбинация от магическите квадрати $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ е равна на нулевия квадрат Ω , т.е.

$$x_1\Delta_1 + x_2\Delta_2 + x_3\Delta_3 = \Omega, \text{ където } \Omega = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Това означава, че

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 1x_3 = 0 \\ 2x_1 - 1x_2 + 2x_3 = 0 \\ -1x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} -2x_1 + 1x_2 + 4x_3 = 0 \\ 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 0 \\ 4x_1 + 1x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 3x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \\ 0x_1 + 3x_2 + 0x_3 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Непосредствено се проверява, че наредената тройка числа $(0,0,0)$ е решение на системата. От третата тройка уравнения следва, че тройката $(0,0,0)$ е единственото решение на системата.

Следователно тройката магически квадрати $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$ е линейно независима система.

Нека числата $a, b, c, d, e, f, p, q, r$ са такива, че $\Delta = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 3p & 3q & 3r \end{bmatrix}$ е магически квадрат с характеристично число S . Това означава, че:

$$\begin{cases} a + b + c = S \\ d + e + f = S \\ 3p + 3q + 3r = S \end{cases} \text{ и } \begin{cases} a + d + 3p = S \\ b + e + 3q = S \\ c + f + 3r = S \end{cases} \text{ и } \begin{cases} a + e + 3r = S \\ c + e + 3p = S \end{cases}$$

Ще докажем, че числата a, b, c, d, e, f са линейни комбинации на числата p, q, r , а именно:

$$\begin{cases} a = 2p + 2q - r \\ b = 2p - q + 2r \\ c = -p + 2q + 2r \end{cases} \text{ и } \begin{cases} d = -2p + q + 4r \\ e = p + q + r \\ f = 4p + q - 2r \end{cases}$$

$$\left| \begin{array}{l} a + b + c = 2p + 2q - r + 2p - q + 2r + -p + 2q + 2r = 3p + 3q + 3r = S \\ d + e + f = -2p + q + 4r + p + q + r + 4p + q - 2r = 3p + 3q + 3r = S \\ a + d + 3p = 2p + 2q - r - 2p + q + 4r + 3p = 3p + 3q + 3r = S \\ b + e + 3q = 2p - q + 2r + p + q + r + 3q = 3p + 3q + 3r = S \\ c + f + 3r = -p + 2q + 2r + 4p + q - 2r + 3r = 3p + 3q + 3r = S \\ a + e + 3r = 2p + 2q - r + p + q + r + 3r = 3p + 3q + 3r = S \\ c + e + 3p = -p + 2q + 2r + p + q + r + 3p = 3p + 3q + 3r = S \end{array} \right.$$

Да изберем числата x_1, x_2, x_3 , така че $x_1=p, x_2=q, x_3=r$ и да образуваме линейната комбинация:

$$x_1\Delta_1 + x_2\Delta_2 + x_3\Delta_3 = p \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} + q \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Тогава} \left| \begin{array}{l} 2x_1 + 2x_2 - 1x_3 = 2p + 2q - r = a \\ 2x_1 - 1x_2 + 2x_3 = 2p - q + 2r = b \\ -1x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -p + 2q + 2r = c \\ -2x_1 + 1x_2 + 4x_3 = -2p + q + 4r = d \\ 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = p + r + r = e \\ 4x_1 + 1x_2 + -2x_3 = 4p + q - 2r = f \\ 3x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 3p \\ 0x_1 + 3x_2 + 0x_3 = 3q \\ 0x_1 + 0x_2 + 3x_3 = 3r \end{array} \right.$$

$$\text{Следователно: } x_1\Delta_1 + x_2\Delta_2 + x_3\Delta_3 = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 3p & 3q & 3r \end{bmatrix} = \Delta.$$

С други думи, всеки магически квадрат Δ е линейна комбинация на квадратите $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$. Това означава, че наредената тройка $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$ от магически квадрати е база на векторното пространство на магическите квадрати.

Следствие. Квадратът $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ е магически тогава и само тогава, когато

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{3}(2a_{31} + 2a_{32} - a_{33}) & a_{12} &= \frac{1}{3}(2a_{31} - a_{32} + 2a_{33}) \\ a_{13} &= \frac{1}{3}(-a_{31} + 2a_{32} + 2a_{33}) \end{aligned}$$

$$a_{21} = \frac{1}{3}(-2a_{31} + a_{32} + 4a_{33}) \quad a_{22} = \frac{1}{3}(a_{31} + a_{32} + a_{33})$$

$$a_{23} = \frac{1}{3}(4a_{31} + a_{32} - 2a_{33}).$$

3. Магически квадрат от последователни членове на аритметична прогресия. Метод на Мосхопулос

В тази точка ще покажем един магически квадрат (от трети ред), чиито елементи са последователни членове на аритметична прогресия. От историята на математиката е известно, че през XIII век византийският монах математик Емануил Мосхопулос открива „диагоналния“ начин за построяване на магически квадрати от n -ти ред, където n е нечетно число, чиито елементи са първите n^2 естествени числа. (Оказва се, че по същия начин могат да бъдат построявани магически квадрати от нечетен ред, чиито елементи са последователни числа на произволна аритметична прогресия.) На следващите редове е показан един квадрат от трети ред, чиито елементи са последователи членове на аритметична прогресия, построен по метода на Мосхопулос.

Нека числата $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9$ са последователни членове на аритметична прогресия. Един от магическите квадрати с елементи посочените числа е следният:

$$\begin{bmatrix} x_4 & x_9 & x_2 \\ x_3 & x_5 & x_7 \\ x_8 & x_1 & x_6 \end{bmatrix}.$$

4. Задачи за построяване на магически квадрати по дадени три числа

За по-добра прегледност задачите за построяване на магически квадрати са разделени на две големи групи в зависимост от това дали централното число a_{22} е измежду дадените, или не е.

Първа група

В тази група са включени задачи, при които **централното число a_{22} не е измежду дадените** в условието.

Групата е разделена на две подгрупи – А и Б.

А) Дадените числа са на един външен ред (една външна колона) или две от трите числа са централно симетрични

Задача 1. Да се построи магически квадрат по дадени трите числа от първия ред, а именно $a_{11} = 6, a_{12} = 9, a_{13} = 30$.

Решение

В началото търсеният квадрат изглежда така: $\Delta = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 30 \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$.

Намираме характеристичното число S на квадрата ($S = a_{11} + a_{12} + a_{13}$):

$$S = 6 + 9 + 30 = 45.$$

Намираме централното число a_{22} ($a_{22} = \frac{11}{33}S$):

$$a_{22} = \frac{11}{33} \cdot 45 = 15. \text{ Квадратът добива вида } \Delta = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 30 \\ & 15 & \\ & & \end{bmatrix}.$$

Намираме числата a_{33} , a_{31} и a_{32} (трети събираеми, съответно в двата диагонала и в средната колона):

$$\begin{aligned} a_{33} + 15 + 6 &= 45, \text{ т.е. } a_{33} = 45 - (15 + 6) = 24; \\ a_{31} + 15 + 30 &= 45, \text{ т.е. } a_{31} = 45 - (15 + 30) = 0; \\ a_{32} + 15 + 9 &= 45, \text{ т.е. } a_{32} = 45 - (15 + 9) = 21. \end{aligned}$$

$$\text{Квадратът добива вида } \Delta = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 30 \\ & 15 & \\ 0 & 21 & 24 \end{bmatrix}.$$

Намираме числата a_{21} и a_{23} (трети събираеми, съответно в първа и трета колона):

$$\begin{aligned} 6 + a_{21} + 0 &= 45, \text{ т.е. } a_{21} = 45 - (6 + 0) = 39; \\ 30 + a_{23} + 24 &= 45, \text{ т.е. } a_{23} = 45 - (30 + 24) = -9. \end{aligned}$$

$$\text{Търсеният квадрат е } \Delta = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 30 \\ 39 & 15 & -9 \\ 0 & 21 & 24 \end{bmatrix}.$$

Задача 2. Да се построи магически квадрат по дадени първите две числа на първия ред и средното число на третия ред, а именно $a_{11}=10$, $a_{12}=18$, $a_{23}=32$.

Решение

$$\text{В началото търсеният квадрат изглежда така: } \Delta = \begin{bmatrix} 10 & 18 & \\ & & \\ & & 32 \end{bmatrix}.$$

Намираме централното число a_{22} ($a_{22} = \frac{1}{2}(a_{12} + a_{32})$):

$$a_{22} = \frac{1}{2}(18 + 32) = 25. \text{ Квадратът добива вида}$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} 10 & 18 & \\ & 25 & \\ & & \end{bmatrix}.$$

Намираме характеристичното число S ($S = 3 \cdot a_{22}$):

$$S = 3 \cdot 25 = 75.$$

Намираме числата a_{33} и a_{32} (трети събираеми, съответно в диагонала и в средната колона):

$$a_{33} + 25 + 10 = 75, \text{ т.е. } a_{33} = 75 - (25 + 10) = 40;$$

$$a_{32} + 25 + 18 = 75, \text{ т.е. } a_{32} = 75 - (25 + 18) = 32.$$

Квадратът добива вида $\Delta = \begin{bmatrix} 10 & 18 & \\ & 25 & \\ & 32 & 40 \end{bmatrix}$.

Намираме числото a_{31} (трето събираемо в третия ред) и числото a_{13} (трето събираемо в първи ред)

$$a_{31} + 10 + 18 = 75, \text{ т.е. } a_{31} = 47;$$

$$a_{13} + 32 + 40 = 75, \text{ т.е. } a_{13} = 3$$

Квадратът добива вида $\Delta = \begin{bmatrix} 10 & 18 & 47 \\ & 25 & \\ 3 & 32 & 40 \end{bmatrix}$.

Намираме числото a_{21} (трето събираемо в първа колона) и числото a_{23} (трето събираемо в трета колона)

$$a_{21} + 10 + 3 = 75, \text{ т.е. } a_{21} = 62;$$

$$a_{23} + 40 + 47 = 75, \text{ т.е. } a_{23} = 12;$$

Търсеният квадрат е $\Delta = \begin{bmatrix} 10 & 18 & 47 \\ 62 & 25 & -12 \\ 3 & 32 & 40 \end{bmatrix}$.

Б) Дадените числа не са от един външен ред (една външна колона) и из-
между тях няма двойка централно симетрични числа

Задача 1. Да се построи магически квадрат по първите две числа на пър-
вия ред и първото число на втория ред, а именно $a_{11} = 48$, $a_{12} = 12$, $a_{23} = 96$.

Решение

В началото търсеният магически квадрат изглежда така: $\Delta = \begin{bmatrix} 48 & 12 & \\ 96 & & \end{bmatrix}$

1) Означаваме централното число на квадрата с x . Можем да напра-
вим извод, че характеристикното число е $3x$. Квадратът добива вида

$$\Delta = \begin{bmatrix} 48 & 12 & \\ 96 & x & \end{bmatrix}.$$

Изразяваме елементите a_{13} , a_{23} , a_{31} , a_{32} и a_{33} чрез x , като използва-
ваме, че сборът на числата по редове, колони и диагонали (в случая главния
диагонал) е равен на характеристикното число $3x$:

$$+ 12 + a_{13} = 3x, \text{ т.е. } a_{13} = 3x - 48 - 12 = 3x - 60;$$

$$96 + x + a_{23} = 3x, \text{ т.е. } a_{23} = 3x - x - 96 = 2x - 96;$$

$$48 + 96 + a_{31} = 3x, \text{ т.е. } a_{31} = 3x - 48 - 96 = 3x - 144;$$

$$12 + x + a_{32} = 3x, \text{ т.е. } a_{32} = 3x - x - 12 = 2x - 12;$$

$$48 + x + a_{33} = 3x, \text{ т.е. } a_{33} = 3x - x - 48 = 2x - 48.$$

$$\text{Квадратът добива вида } \Delta = \begin{bmatrix} 48 & 12 & 3x - 60 \\ 96 & x & 2x - 96 \\ 3x - 144 & 2x - 12 & 2x - 48 \end{bmatrix}.$$

Намираме числото x от условието, че сборът на числата по второстепенния диагонал е равен на характеристичното число $3x$:

$$3x - 60 + x + 3x - 144 = 3x, \text{ т.е. } x = 51.$$

$$\text{Търсеният квадрат е } \Delta = \begin{bmatrix} 48 & 12 & 93 \\ 96 & 51 & 6 \\ 9 & 90 & 54 \end{bmatrix}.$$

Задача 2. Да се построи магически квадрат по дадени първите две числа от първи ред и третото число от трети ред, а именно $a_{11} = 21$, $a_{12} = 15$ и $a_{33} = 11$.

Решение

$$\text{В началото търсеният магически квадрат изглежда така: } \Delta = \begin{bmatrix} 21 & 15 & \\ & & \\ & & 11 \end{bmatrix}.$$

Намираме централното число a_{22} ($a_{22} = \frac{1}{2}(a_{13} + a_{31})$):

$$a_{22} = \frac{1}{2}(21 + 11 + 11), \text{ т.е. } a_{22} = 16. \text{ Квадратът добива вида } \Delta = \begin{bmatrix} 21 & 15 & \\ & 16 & \\ & & 11 \end{bmatrix}.$$

Намираме характеристичното число S на квадрата:

$$S = 3 \cdot 16 = 48.$$

Намираме числата a_{13} и a_{32} (трети събираеми, съответно в диагонала и в средната колона):

$$a_{13} + 21 + 15 = 48, \text{ т.е. } a_{13} = 48 - (21 + 15) = 12;$$

$$a_{32} + 15 + 16 = 48, \text{ т.е. } a_{32} = 48 - (15 + 16) = 17.$$

$$\text{Квадратът добива вида } \Delta = \begin{bmatrix} 21 & 15 & 12 \\ & 16 & \\ & 17 & 11 \end{bmatrix}.$$

Намираме числата a_{31} , a_{23} и a_{21} :

$$a_{31} = 48 - (12 + 16) = 20;$$

$$a_{23} = 48 - (12 + 11) = 25;$$

$$a_{21} = 48 - (21 + 20) = 7.$$

Търсеният квадрат е $\Delta = \begin{bmatrix} 21 & 15 & 12 \\ 7 & 16 & 25 \\ 20 & 17 & 11 \end{bmatrix}$.

Втора група

В тази група са включени задачи, при които **централното число a_{22}** е **измежду дадените** в условието.

Групата е разделена на две подгрупи А и Б.

А) Измежду дадените числа няма две, които са централно симетрични.

Задача 1. Да се построи магически квадрат по дадени следните числа: първото число на първи ред, второто число на втори ред и второто число на трети ред, а именно $a_{11} = 11$, $a_{22} = 16$ и $a_{32} = 8$.

Решение

В началото търсеният магически квадрат изглежда така: $\Delta = \begin{bmatrix} 11 & & \\ & 16 & \\ & & 8 \end{bmatrix}$.

Намираме характеристичното число S ($S = 3 \cdot a_{22}$):

$$S = 3 \cdot 16 = 48.$$

Намираме числата a_{33} и a_{12} ($a_{11} + a_{22} + a_{33} = S$ и $a_{12} + a_{22} + a_{32} = S$):

$$11 + 16 + a_{33} = 48, \text{ т.е. } a_{33} = 21;$$

$$8 + 16 + a_{12} = 48, \text{ т.е. } a_{12} = 24.$$

Квадратът добива вида $\Delta = \begin{bmatrix} 11 & 24 & \\ & 16 & \\ & & 8 \quad 21 \end{bmatrix}$.

Намираме числата a_{13} и a_{31} ($a_{11} + a_{12} + a_{13} = S$ и $a_{31} + a_{32} + a_{33} = S$):

$$11 + 24 + a_{13} = 48, \text{ т.е. } a_{13} = 13;$$

$$21 + 8 + a_{31} = 48, \text{ т.е. } a_{31} = 19.$$

Квадратът добива вида $\Delta = \begin{bmatrix} 11 & 24 & 13 \\ & 16 & \\ 19 & 8 & 21 \end{bmatrix}$.

4) Намираме числата a_{21} и a_{23} ($a_{11} + a_{21} + a_{31} = S$ и $a_{31} + a_{32} + a_{33} = S$):

$$11 + 19 + a_{21} = 48, \text{ т.е. } a_{21} = 18;$$

$$13 + 21 + a_{23} = 48, \text{ т.е. } a_{23} = 14.$$

Търсеният квадрат е $\Delta = \begin{bmatrix} 11 & 24 & 13 \\ 18 & 16 & 14 \\ 19 & 8 & 21 \end{bmatrix}$.

Б) Две от дадените числа са централно симетрични.

Задача 1. Да се построи магически квадрат по дадени вторите числа на първи, втори и трети ред, а именно $a_{12} = 21$, $a_{22} = 17$ и $a_{32} = 14$.

Решение

В началото търсеният квадрат изглежда така: $\Delta = \begin{bmatrix} 21 & & \\ & 17 & \\ & & 14 \end{bmatrix}$.

Известно е, че за всеки магически квадрат е вярно равенството

$$a_{22} = \frac{1}{2}(a_{12} + a_{32}).$$

В нашия случай $17 \neq \frac{1}{2}(21 + 14)$.

Следователно задачата няма решение, т.е. не съществува магически квадрат с така зададените елементи.

Задача 2. Да се построи магически квадрат по дадени вторите числа на първи, втори и трети ред, а именно $a_{12} = 21$, $a_{22} = 17$ и $a_{32} = 13$.

Решение

В началото търсеният квадрат изглежда така: $\Delta = \begin{bmatrix} 21 & & \\ & 17 & \\ & & 13 \end{bmatrix}$.

Тъй като $17 = \frac{1}{2}(21 + 13)$, т.е. $a_{22} = \frac{1}{2}(a_{12} + a_{32})$, то задачата има решение.

Нещо повече, ще докажем, че задачата има безбройно много решения, зависещи от един параметър.

Нека $a_{11} = p$, където p е произволно число.

Квадратът добива вида $\Delta = \begin{bmatrix} p & 21 & \\ & 17 & \\ & & 13 \end{bmatrix}$.

Като вземем предвид, че характеристичното число S на квадрата е 51, намираме последователно:

$$a_{33} = 51 - 17 - p = 34 - p,$$

$$a_{13} = 51 - 21 - p = 30 - p,$$

$$a_{31} = 51 - 13 - (34 - p) = 4 + p,$$

$$a_{21} = 51 - p - (4 + p) = 47 - 2p,$$

$$a_{23} = 51 - 17 - (47 - 2p) = -13 + 2p.$$

Търсеният квадрат е $\Delta = \begin{bmatrix} p & 21 & 30 - p \\ 47 - 2p & 17 & -13 + 2p \\ 4 + p & 13 & 34 - p \end{bmatrix}$.

Вместо заключение

Освен занимателна магическите квадрати имат и практико-приложна страна. Като пример ще посочим следната задача: „Фериботът, който обслужва две пристанища (от единия до другия бряг на река), има товароподемност 39 тона и на един курс може да превозва до три камиона. На едното пристанище (на единия бряг) чакат за транспортиране (до другото пристанище) девет камиона с общо (бруто) тегло на всеки от тях съответно: 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21 тона. Може ли деветте камиона да бъдат превозени на три курса, и ако може, как да стане това?“.

Лесно може да се провери, че магическият квадрат

$$\begin{bmatrix} 11 & 21 & 7 \\ 9 & 13 & 17 \\ 19 & 5 & 15 \end{bmatrix}$$

(построен по метода на Мосхопулос) предлага 2 решения на задачата: едно – то се съдържа в редовете, а другото – в колоните. Като вземем предвид, че всяка пермутация на редовете е решение и всяка пермутация на колоните също е решение, то само посредством този магически квадрат получаваме общо 12 решения на задачата. С други думи, построяването на магически квадрат е начин (в случая) за решаване на практическата задача.

С тази разработка не приключват изследванията върху магическите квадрати от трети ред. Например възникват още въпроси, като: „При какви условия квадратът е съставен само от положителни числа?“ или „При какви условия квадратът е съставен само от цели числа?“, или „Могат ли да се намерят и други практически задачи, решими по метода на магическите квадрати?“, и т.н.

„In memoriam.

По волята на неумолими трагични обстоятелства, настоящата статия се оказва последната за един от най-добрите преподаватели, изследователи и творци в областта на математическото образование на студенти – бъдещи учители. На 30 януари 2020 година след тежко и мъчително боледуване, на 66 годишна възраст ни напусна нашата скъпа колежка, прекрасен другар и незаменим съавтор професор доктор Маргарита Генова Върбанова. Поклон пред светлата и памет.“

ЛИТЕРАТУРА

- Дочев, К. & Димитров, Д. (1973). *Линейна алгебра*. София: Наука и изкуство.
- Еленски, Ш. (1967). *ЛИЛАВАТИ*. София: Техника.
- Лалчев, З. (2009). *Математика в задачи и методи. Книга 2 за учителя в началните класове*. София: Св. Климент Охридски.

REFERENCES

- Dochev, K. & Dmitrov, D. (1973). *Linear algebra*. Sofia: Nauka i izkustvo (in Bulgarian)
- Jelenski, S. (1964). *Rozrywi matematyczne LILAVATI*. Warsaw: Allegro
- Lalchev, Z. (2009). *Mathematics in problems and methods. Book for the primary school teacher*. Sofia: St. Climent Ohridski

ABOUT THE VECTOR SPACE OF THIRD ORDER MAGIC SQUARES (IN RECREATIONAL MATHEMATICS)

Abstract. The present paper is about magic squares and in particular about the vector space of third order magic squares. The aim is to answer some questions as: which sequence of nine numbers could be “formatted” into a magic square and how this could be done; whether the fact that the number sequence is a nine numbers arithmetic sequence is a necessary and sufficient condition for constructing a magic square; could any number be a magic square characteristic number; is there a “formula” for finding the proper numbers for constructing a magic square and so on. To answer these questions we use linear algebra elementary means for solving systems of linear equations.

Keywords: magic squares; vector space; recreational mathematics

✉ **Prof. Dr. Zdravko Lalchev**
University of Sofia
69A, Shipchenski prohod Blvd.
1754 Sofia, Bulgaria
E-mail: zdravkol@abv.bg

✉ **Mr. Miroslav Stoimirov, PhD student**
University of VelikoTarnovo
3A, Arh. G. Kozarev Blvd.
5000 VelikoTarnovo, Bulgaria
E-mail: mstoimirov@mail.bg

✉ **Assist. Prof. Irina Voutova, PhD**
ResearcherID: AAD-495-2020
Department of Education in Mathematics and Informatics
Faculty of Mathematics and Informatics
University of Sofia
Sofia, Bulgaria
E-mail: irinazv@abv.bg