

КОНФИГУРАЦИИ ОТ ПЕДАЛНИ ОКРЪЖНОСТИ НА ПРОИЗВОЛНА ТОЧКА В РАВНИНАТА НА МНОГОЪГЪЛНИК

¹⁾Веселин Ненков, ²⁾Станислав Стефанов, Хаим Хаимов

¹⁾ ВВМУ „Никола Вапцаров“ – Варна

²⁾ Технически университет – София

Резюме. В тази статия се описва взаимното разположение на педалните окръжности на произволна точка в равнината на произволен четириъгълник и петоъгълник спрямо триъгълниците, определени от страните и диагоналите им. В резултат на това се дефинира Симсънова окръжност за точка в равнината на произволен петоъгълник. Намират се Симсъновите окръжности за точки от определени прави в равнината на петоъгълника.

Ключови думи: четириъгълник; петоъгълник; педални окръжности; Симсънова окръжност

Въведение. Педална окръжност на точка, нележаща на описаната окръжност на даден триъгълник, се нарича окръжността, определена от ортогоналните проекции на точката върху правите, съдържащи страните му. Нека X е точка в равнината на произволен многоъгълник. Занапред ще предполагаме, че тя не лежи на една окръжност с никои три от върховете му. Тогава за точката X са определени педалните ѝ окръжности спрямо всички триъгълници, имащи за върхове по три от върховете на многоъгълника. Оказва се, че в многоъгълници с различен брой страни тези окръжности или част от тях образуват интересни конфигурации.

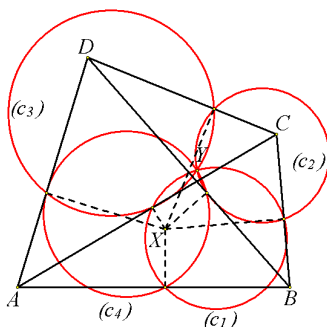
Определение 1. Многоъгълник, върховете на който са част от върховете на даден многоъгълник, ще наричаме негов *пиков многоъгълник*. Многоъгълник, върховете на който са последователни върхове на даден многоъгълник, ще наричаме негов *периферен многоъгълник*.

Ще изследваме разположението на педалните окръжности на произволна точка в равнината на многоъгълник, отговаряща на поставеното по-горе условие, спрямо пиковите му триъгълници.

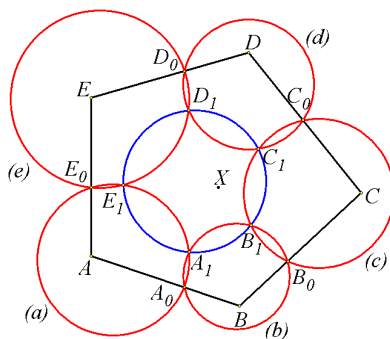
1. Конфигурации от педални окръжности на произволна точка в равнината на четириъгълник и петоъгълник. Когато многоъгълникът е произволен четириъгълник $ABCD$ (фиг. 1), както е показано в (Haimov, 2019),

разположението на педалните окръжности на произволна точка X спрямо неговите пикови триъгълници се характеризира със следното свойство: *педалните окръжности (c_1) , (c_2) , (c_3) и (c_4) на точката X спрямо четирите пикови триъгълника ABC , BCD , CDA и DAB минават през една точка Y . Тази точка Y се нарича педален образ на точката X спрямо четириъгълника $ABCD$ (фиг.1).*

В тази част от публикацията ще видим, че в случая, когато многоъгълникът е произволен петоъгълник, педалните окръжности на точката X спрямо периферните му триъгълници също образуват интересна конфигурация. Ще докажем следното твърдение. *Петте педални окръжности (a) , (b) , (c) , (d) и (e) на точката X спрямо последователните периферни триъгълници EAB , ABC , BCD , CDE и DEA на петоъгълника $ABCDE$ са разположени така, че вторите общи точки A_1 , B_1 , C_1 , D_1 и E_1 на двойките последователни окръжности (a) и (b) ; (b) и (c) ; (c) и (d) ; (d) и (e) ; (e) и (a) лежат на една окръжност (фиг. 2).*



Фигура 1



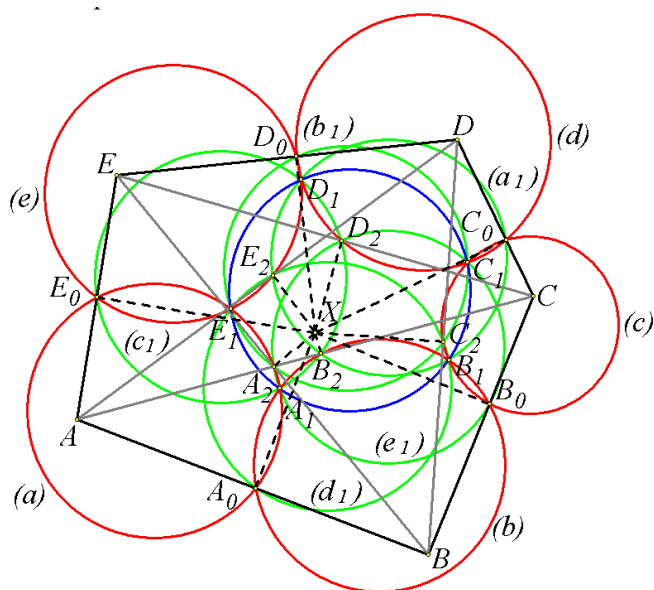
Фигура 2

Да вземем предвид, че втората обща точка A_1 на педалните окръжности (a) и (b) на точката X спрямо периферните триъгълници EAB и ABC на петоъгълника $EABC$, съгласно цитираното свойство на четириъгълника, лежи и на педалните окръжности на X спрямо другите два пикови триъгълника AEC и EBC на четириъгълника $EABC$ и се явява педален образ на точката X спрямо този четириъгълник. Аналогично свойство имат и вторите общи точки B_1 , C_1 , D_1 и E_1 на другите двойки педални окръжности (b) и (c) , (c) и (d) , (d) и (e) , (b) и (a) . Затова току-що формулираното твърдение може да се изкаже по следния по-удобен начин: *Педалните образи A_1 , B_1 , C_1 , D_1 и E_1 на точката X спрямо петте периферни четириъгълника $EABC$, $ABCD$, $BCDE$, $CDEA$ и $DEAB$ на произволен петоъгълник $ABCDE$ лежат на една окръжност.* Преди да дадем доказателството на това твърдение, ще въведем някои означения и ще докажем една лема.

Нека $ABCDE$ е изпъкнал петоъгълник (фиг. 3). Ортогоналните проекции на точката X върху правите, съдържащи страните му AB , BC , CD , DE и EA , ще бележим с A_0 , B_0 , C_0 , D_0 и E_0 , а тези върху правите, съдържащи диагоналите му EB , AC , BD , CE и DA – съответно с A_2 , B_2 , C_2 , D_2 и E_2 . Педалните окръжности на X спрямо периферните триъгълници EAB , ABC , BCD , CDE и DEA ще означаваме съответно с (a) , (b) , (c) , (d) и (e) , а тези спрямо триъгълниците ACD , BDE , CEA , DAB и EBC – съответно с (a_1) , (b_1) , (c_1) , (d_1) и (e_1) . Ще докажем първо следната

Лема 1. *Ако A_1 , B_1 , C_1 , D_1 и E_1 са педалните образи на точката X съответно спрямо периферните четириъгълници съответно $EABC$, $ABCD$, $BCDE$, $CDEA$ и $DEAB$ на петоъгълника $ABCDE$, то са изпълнени релациите $A_1 = (a) \cap (b) \cap (c_1) \cap (e_1)$, $B_1 = (b) \cap (c) \cap (a_1) \cap (d_1)$, $D_1 = (d) \cap (e) \cap (c_1) \cap (a_1)$, $E_1 = (e) \cap (a) \cap (d_1) \cap (b_1)$.*

Доказателство. По условие точката A_1 е педалният образ на X спрямо четириъгълника $EABC$ (фиг. 3). Това ще рече, че A_1 е общата точка на педалните окръжности (a) , (b) , (c_1) и (e_1) на точката X спрямо пиковите триъгълници на $EABC$. Последното се записва именно с първата от горните релации. Аналогично се проверяват и останалите релации.

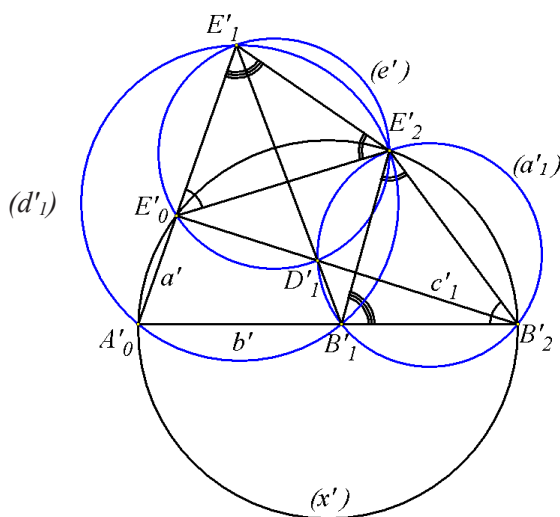


Фигура 3

Теорема 1. Нека $ABCDE$ е изпъкнал петъгълник. Педалните образи A_1, B_1, C_1, D_1 и E_1 на точката X спрямо периферните му четириъгълници $EABC, ABCD, BCDE, CDEA$ и $DEAB$ лежат на една окръжност (фиг. 3).

Доказателство. Нека I е инверсия с полюс A_1 (фиг.3). Образът на произволна точка P при тази инверсия ще означаваме с P' . Ще докажем първо, че конфигурацията от точки $\{A'_0, B'_0, C'_0, D'_0, E'_0, B'_1, C'_1, D'_1, E'_1, A'_2, B'_2, C'_2, D'_2, E'_2\}$ се характеризира със следващите седем свойства (фиг.4):

- (1) точките A'_0, E'_0 и E'_1 лежат на една права a' (фиг.4);
- (2) точките A'_0, B'_1 и B'_2 лежат на една права b' ;
- (3) точките E'_0, D'_1 и B'_2 лежат на една права c'_1 ;
- (4) точките E'_0, D'_1, E'_2 и E'_1 лежат на една окръжност (e') ;
- (5) точките B'_1, B'_2, E'_2 и D'_1 лежат на една окръжност (a'_1) ;
- (6) точките A'_0, B'_1, E'_2 и E'_1 лежат на една окръжност (d'_1) ;
- (7) точките A'_0, B'_2, E'_2 и E'_0 лежат на една окръжност (x') .



Фигура 4

(1) Педалната окръжност (a) на точката X спрямо $\triangle EAB$ е определена от ортогоналните проекции E_0 , A_2 и A_0 на X върху правите, съдържащи страните на $\triangle EAB$, и съдържа точките A_1 и E_1 (по лема 1) (фиг. 3). Изказано по друг начин, точките A_0 , E_0 и E_1 лежат на окръжност (a) , минаваща през полюса A_1 на инверсията I . Следователно техните образи A'_0 , E'_0 и E'_1 при инверсията I лежат на една права a' (фиг. 4).

(2) Педалната окръжност (b) на точката X спрямо $\triangle ABC$ е определена от ортогоналните проекции A_0 , B_2 и B_0 на X върху правите, съдържащи страните на $\triangle ABC$, и минава през точките A_1 и B_1 (по лема 1) (фиг. 3). Тогава точките A_0 , B_1 и B_2 лежат на окръжност (b) , която минава през полюса A_1 на инверсията I . Затова техните образи A'_0 , B'_1 и B'_2 при инверсията I лежат на една права b' (фиг. 4).

(3) Педалната окръжност (c_1) на точката X спрямо $\triangle CEA$ е определена от ортогоналните проекции E_0 , B_2 и D_2 на X върху правите, съдържащи страните на $\triangle CEA$, и минава през точките A_1 и D_1 (по лема 1) (фиг. 3). Тогава точките E_0 , B_2 и D_1 лежат на окръжност (c_1) , минаваща през полюса A_1 на инверсията I . Следователно техните образи E'_0 , B'_2 и D'_1 при инверсията I лежат на една права c'_1 (фиг. 4).

(4) Педалната окръжност (e) на точката X спрямо $\triangle DEA$ е определена от ортогоналните проекции E_0 , E_2 и D_0 на точката X върху правите, съдържащи

страните на $\triangle DEA$, и съдържа точките E_1 и D_1 (по лема 1) (фиг. 3). Тогава точките E_0, E_1, E_2 , и D_1 лежат на една окръжност (e). Следователно техните образи E'_0, E'_1, E'_2 , и D'_1 при инверсията I с полюс $A_1 \notin (e)$ също лежат на една окръжност (e') (фиг. 4).

(5) Педалната окръжност (a_1) на точката X спрямо $\triangle ACD$ е определена от ортогоналните проекции B_2, C_0 и E_2 на X върху правите, съдържащи страните на $\triangle ACD$, и минава през точките D_1 и B_1 (по лема 1) (фиг. 3). Тогава точките B_2, E_2, D_1 и B_1 лежат на една окръжност (a_1). Затова техните образи B'_2, E'_2, D'_1 и B'_1 при инверсията I с полюс $A_1 \notin (a_1)$ също лежат на една окръжност (a'_1) (фиг. 4).

(6) Педалната окръжност (d_1) на точката X спрямо $\triangle DAB$ е определена от ортогоналните проекции A_0, C_2 и E_2 на X върху правите, съдържащи страните на $\triangle DAB$, и минава през точките B_1 и E_1 (по лема 1) (фиг. 3). Тогава точките A_0, B_1, E_2 и E_1 лежат на една окръжност (d_1). Затова техните образи A'_0, B'_1, E'_2 и E'_1 при инверсията I с полюс $A_1 \notin (d_1)$ също лежат на една окръжност (d'_1).

(7) Точките A_0, E_0, E_2 и B_2 лежат на окръжността (x) с диаметър AX (фиг. 3). Следователно техните образи A'_0, E'_0, E'_2 и B'_2 при инверсията I с полюс $A_1 \notin (x)$ също лежат на една окръжност (x').

За да докажем, че точките A_1, B_1, C_1, D_1 и E_1 лежат на една окръжност, ще докажем първоначално, че точките A_1, B_1, D_1 и E_1 лежат на една окръжност. От свойства (7) и (1) на разглежданата конфигурация от точки получаваме, че четириъгълникът $A'_0B'_2E'_2E'_0$ е вписан в окръжността (x') и че точките A'_0, E'_0 и E'_1 лежат на една права a' (фиг. 4). Оттук получаваме $\sphericalangle E'_1E'_0E'_2 = \sphericalangle A'_0B'_2E'_2$. От свойства (6) и (2) следва, че четириъгълникът $A'_0B'_1E'_2E'_1$ е вписан в окръжност и че точките A'_0, B'_1 и B'_2 лежат на една права b' . Оттук получаваме: $\sphericalangle E'_0E'_1E'_2 = \sphericalangle E'_2B'_1B'_2$. Получихме, че триъгълниците $E'_0E'_1E'_2$ и $E'_2B'_1B'_2$ имат по два съответно равни ъгъла. Следователно и третите ъгли в тях са равни, т.е.

$$(*) \quad \sphericalangle E'_0E'_2E'_1 = \sphericalangle B'_1E'_2B'_2.$$

От друга страна са изпълнени равенствата

$$(**) \quad \sphericalangle E'_0E'_2E'_1 = \sphericalangle E'_0D'_1E'_1,$$

$$(***) \quad \sphericalangle B'_1E'_2B'_2 = \sphericalangle B'_1D'_1B'_2,$$

които следват съответно от окръжностите (e') и (a'_1).

Равенствата $(**)$ и $(***)$ заместваме в $(*)$ и получаваме равенството $\sphericalangle E'_0D'_1E'_1 = \sphericalangle B'_1D'_1B'_2$. Освен това точките E'_0, D'_1 и B'_2 лежат на една права c'_1 (от свойство (3)), затова имаме:

$$\sphericalangle E_0'D_1'B_1' + \sphericalangle B_1'D_1'B_2' = 180^\circ.$$

От предходното равенство заместваме в последното и получаваме:

$$\sphericalangle E_0'D_1'B_1' + \sphericalangle E_0'D_1'E_1' = 180^\circ.$$

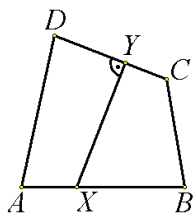
От последното равенство следва, че точките B_1' , D_1' и E_1' лежат на една права. Тъй като тя не минава през полюса A_1 на инверсията I , образите на тези точки при инверсията I – точките B_1 , D_1 и E_1 лежат на окръжност, минаваща през точката A_1 . Така доказахме, че точките A_1 , B_1 , D_1 и E_1 лежат на една окръжност (фиг. 3). Аналогично се доказва, че и точките B_1 , C_1 , E_1 и A_1 лежат на една окръжност. Тъй като двете окръжности имат три общи точки, те съвпадат. С това доказахме, че и петте точки A_1 , B_1 , C_1 , D_1 и E_1 лежат на една окръжност.

Определение 2. Окръжността, определена от педалните образи A_1 , B_1 , C_1 , D_1 и E_1 на произволна точка X спрямо периферните четириъгълници на произволен петоъгълник $ABCDE$ (фиг. 3) ще наричаме *окръжност на Симсън за точката X спрямо петоъгълника $ABCDE$* , а петоъгълника $A_1B_1C_1D_1E_1$ – *петоъгълник на Симсън за точката X* .

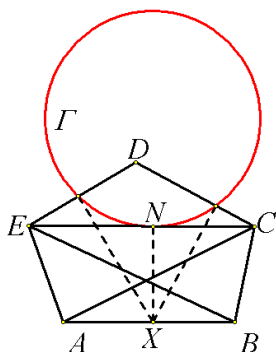
2. Окръжности на Симсън за произволни точки от правите в равнината на произволен петоъгълник, минаващи през двойките му върхове. Сега ще определим окръжностите на Симсън за точки, лежащи на правите в равнината на произволен петоъгълник, минаващи през двойките му върхове. Това ще ни даде възможност в третата част от публикацията да изясним взаимното разположение на педалните окръжности на определени точки в равнината на произволен шестоъгълник и седмоъгълник спрямо пиковите им триъгълници. Ще използваме следното твърдение от (Наймов, 2019):

Лема 2. Педалният образ Y на точка X , лежаща на права, съдържаща произволна страна на четириъгълник, спрямо него съвпада с проекцията на X върху правата, съдържаща срещуположната страна (фиг. 4а).

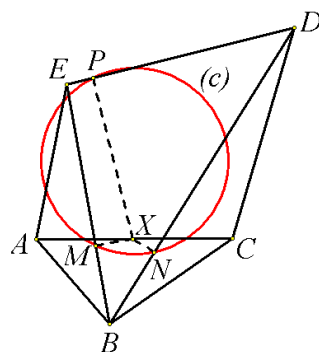
Теорема 2. Нека X е произволна точка от права, определена от два върха на произволен петоъгълник $ABCDE$, различна от тези върхове (например точка от правата AB) (фиг. 4б). Окръжността на Симсън за точката X спрямо петоъгълника $ABCDE$ съвпада с педалната окръжност Γ на X спрямо триъгълника, определен от останалите три върха на петоъгълника (в случая спрямо $\triangle CED$).



Фигура 4а



Фигура 4б



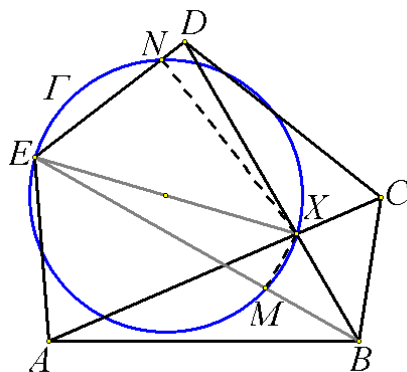
Фигура 5

Доказателство. а) Нека първо точката X лежи на правата, определена от два съседни върха на петогълника $ABCDE$, например от върховете A и B и е различна от A и от B (фиг. 4б). Ще докажем, че окръжността на Симсън за точката X спрямо петогълника $ABCDE$ съвпада с педалната окръжност Γ на X спрямо триъгълника ECD от останалите три върха E , C и D . Достатъчно е да докажем, че педалните образи на точката X спрямо три периферни четириъгълника на $ABCDE$ лежат на Γ , защото тези три педални образа напълно определят окръжността на Симсън за точката Γ спрямо петогълника, а две окръжности, имащи три общи точки, съвпадат помежду си. Понеже X е точка от правата, съдържаща страната AB на периферния четириъгълник $ABCE$, то педалният ѝ образ спрямо него съвпада с проекцията N на точката X върху правата, определена от срещуположната страна EC (по лема 2). Тази проекция N ще лежи на педалната окръжност Γ на точката X спрямо $\triangle ECD$, понеже е проекция към страна на $\triangle ECD$. Получихме, че педалният образ N на X спрямо четириъгълника $EABC$ лежи на педалната окръжност Γ на точката X спрямо $\triangle ECD$. Педалният образ на X спрямо периферния четириъгълник $BCDE$ също лежи на педалната окръжност Γ на X спрямо $\triangle ECD$, понеже последният е пиков триъгълник на $BCDE$ (по определението на педален образ на точка спрямо четириъгълник). По същия начин се доказва, че педалният образ на точката X спрямо периферния четириъгълник $CDEA$ лежи на Γ . Доказахме, че педалните образи на точката X спрямо три периферни четириъгълника на петогълника $ABCDE$ лежат на Γ , откъдето, както видяхме по-горе следва, че окръжността на Симсън за точката X спрямо $ABCDE$ съвпада с Γ .

б) Нека сега точката X лежи на правата, определена от два върха на петогълника $ABCDE$, взети през един, например от върховете A и C и е раз-

лична от A и от C (фиг. 5). Ще докажем, че окръжността на Симсън за точката X спрямо петоъгълника $ABCDE$ съвпада с педалната окръжност (c) на X спрямо триъгълника BDE , определен от останалите три върха на $ABCDE$. Също като в а) е достатъчно да докажем, че педалните образи на X спрямо три периферни четириъгълника на петоъгълника $ABCDE$ лежат на окръжността (c) . Педалният образ на точката X спрямо четириъгълника $ACDE$ съвпада с проекцията P на X върху правата ED (по лема 2). Тази проекция P лежи на педалната окръжност (c) на точката X спрямо $\triangle BDE$, понеже е проекция към страна на този триъгълник. Следователно педалният образ P на точката X спрямо четириъгълника $ACDE$ лежи на окръжността (c) . Педалният образ на точката X спрямо периферния четириъгълник $BDEA$ на петоъгълника $ABCDE$ също лежи на педалната окръжност (c) на X спрямо $\triangle BDE$, понеже този триъгълник е пиков за четириъгълника $BDEA$. По същия начин се доказва, че и педалният образ на точката X спрямо периферния четириъгълник $BCDE$ на петоъгълника лежи на окръжността (c) . С това доказахме, че педалните образи на X спрямо три периферни четириъгълника на $ABCDE$ лежат на (c) , откъдето, както видяхме, следва, че окръжността на Симсън за точката X спрямо $ABCDE$ съвпада с (c) .

Следствие. Нека X е общата точка на два пресичащи се диагонала на петоъгълника $ABCDE$, например на диагоналите AC и BD (фиг. 6). Окръжността на Симсън за точката X спрямо $ABCDE$ има за диаметър отсечката XE , свързваща точката X с върха на петоъгълника, различен от краищата на диагоналите AC и BD .



Фигура 6

Доказателство. Понеже точката X лежи на правата AC , определена от два върха A и C на петоъгълника, окръжността на Симсън за X спрямо петоъгъл-

ника $ABCDE$ съвпада с педалната окръжност Γ на X спрямо триъгълника BDE от останалите три върха (по доказаната теорема). Означаваме проекциите на точката X върху правите BE и DE съответно с M и N . Педалната окръжност Γ на X спрямо $\triangle BDE$ е определена от точките M , X и N . Последните лежат на окръжността с диаметър EX . Следователно окръжността Γ съвпада с окръжността с диаметър EX . Тогава и окръжността на Симсън за X спрямо петъгълника $ABCDE$ (която, както видяхме, съвпада с педалната окръжност Γ на X спрямо $\triangle BDE$) има за диаметър отсечката XE . С това следствието е доказано.

ЛИТЕРАТУРА

- Хаимов, Х. (2019). Едно твърдение за конкурентност на педални окръжности на точка в равнина на четириъгълник, *Математика и информатика*, 1, 77 – 97.
- Гроздев, С. & В. Ненков (2017). Ветрила от окръжности във вписани многоъгълници, *Математика и информатика*, 2, 181 – 201.
- Георгиева, М., С. Гроздев (2016). *Морфодинамиката за развитието на ноосферния интелект*. (4-то изд.). София: Изток-Запад, 987-619-152-869-1, 327 стр.
- Ненков, В. (2020). *Повишаване на математически компетенции с динамична геометрия*. София: Архимед 2000, ISBN 978-954-779-291-3.
- Ненков, В. & С. Стефанов (2018). Връзки между забележителни точки в четириъгълника, *Математика и информатика*, 1, 73 – 82.
- Ненков, В., Ст. Стефанов & Х. Хаимов (2017). Геометрия на четириъгълника, точка на Микел, инверсна изогоналност, *Математика и информатика*, 1, 81 – 93.
- Сергеева, Т., М. Шабанова & С. Гроздев (2014). *Основы динамической геометрии*. Москва: АСОУ.

REFERENCES

- Haimov, H. (2019). A statement for concurrence of pedal circles of a point in the plane of a quadrilateral, *Mathematics and Informatics*, 1, 77 – 97.
- Grozdev, S. & V. Nenkov (2017). Fans of circles in inscribed polygons, *Mathematics and Informatics*, 2, 181 – 201.
- Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics: The Bulgaria Experience (Theory and Practice)*. Sofia: ADE (ISBN 978-954-92139-1-1).
- Georgieva, M. & S. Grozdev (2016). *Morfodinamikata za razvitiето na noosfernia intelekt*. (4th ed.). Sofia: Publ. Iztok-Zapad, ISBN 987-619-152-869-1, 327 pages.

- Nenkov, V. (2020). *Mathematical competence increase through dynamic geometry*. Sofia: Archimedes 2000, ISBN 978-954-779-291-3.
- Nenkov, V. & S. Stefanov (2018). Connections among notable points in the quadrilateral, *Mathematics and Informatics, 1*, 73 – 82.
- Nenkov, V., S. Stefanov & H. Haimov (2017). Geometry of the quadrilateral, Miquel point, Inverse isogonality, *Mathematics and Informatics, 1*, 81 – 93.
- Sergeeva, T., M. Shabanova & S. Grozdev (2014). *Foundation of dynamic geometry*. Moscow: ASOU.

CONFIGURATIONS OF PEDAL CIRCLES OF AN ARBITRARY POINT IN THE PLANE OF A POLYGON

Abstract. In this paper it is described the mutual location of the pedal circles of an arbitrary point in the plane of an arbitrary quadrilateral and pentagon with respect to the triangles determined by their sides and diagonals. As a result it is defined Simson circle of a point in the plane of an arbitrary pentagon. Simson lines are found for points on determined lines in the plane of the pentagon.

Keywords: quadrilateral; pentagon; pedal circles; Simson line

✉ **Prof. Dr. Veselin Nenkov**

Researcher ID: AAB-5776-2019
Department of Mathematics and Physics
Faculty of Engineering
“Nikola Vaptsarov” Naval Academy
73, Vasil Drumev St.
Varna, Bulgaria
E-mail: v.nenkov@nvna.eu

✉ **Mr. Stanislav Stefanov, PhD student**

<https://orcid.org/0000-0002-8254-1075>
Department of Mathematical modeling and numerical methods
Faculty of Applied mathematics and informatics
Technical University Sofia
Sofia, Bulgaria
E-mail: stanislav_stefanov@tu-sofia.bg

✉ **Mr. Haim Haimov, Researcher**

16, Bratya Shkorpil St.
9000 Varna, Bulgaria