

НЕЕДНОЗНАЧНИ ГЕОМЕТРИЧНИ ЗАДАЧИ

Добринка Бойкина

Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“

Резюме. Разгледана е система от геометрични задачи, за които е характерно, че дадените в тях елементи определят съответната фигура нееднозначно – съществуват две фигури, които се определят от зададените в задачата елементи. Това се установява в резултат на анализиране условието на конкретната разглеждана задача и провеждане на изследователска дейност за откриване на нейни решения. Предложени са авторски обучаващи решения, които са съпроводени от рефлексивни разсъждения, касаещи тяхната рационалност, пълнота на решенията и проведеното изследване. Направени са съответни изводи, които имат обучаващ характер. Анализирани са типични логически грешки, допускани от ученици или учители. Това се прави с цел задълбоченото им осъзнаване от обучаваните и обучаващите субекти. Разработката е предназначена за действащите учители и студенти, които се подготвят за учители по математика, както и за ученици, проявяващи интерес към математиката.

Ключови думи: задача; нееднозначна геометрична задача; решение; пълнота на решение; изследване

Решаването на задачи при обучението по математика е най-резултатното средство за развитие на самостоятелното творческо мислене. Когато ученикът работи с учебника, той е в пасивна позиция, усвоява чужди мисли, а когато решава задачи, той е активен – чрез собствена мисловна познавателна дейност търси решение на възникнала или зададена задача. Чрез решаването на задачи се подбужда, повишава и развива интересът на учениците към математиката. Решаването на математически задачи се явява основен способ за развиването на уменията за правилно разсъждаване, анализиране, изследване, както и за стимулиране на творческата дейност. Затова основна цел на учителя по математика, както и на преподавателя във ВУЗ, е да управлява ефективно тези процеси. За постигане на тази цел особено силно допринася предлагането на задачи, чиито формулировки и условия (дадено, търсено, изисквания) предполагат извършване и на изследователска дейност.

В качеството на илюстриращи примери в настоящата статия ще разгледаме няколко конкретни задачи, на които ще представим т.нар. „обучаващи реше-

ния“ (Kuchinov, 2002), придружени със съответни рефлексивни разсъждения относно тяхната рационалност, пълнота на решенията, на изследването и пр.

Задача 1. Даден е $\triangle ABC$, в който $AC = 4\sqrt{3} \text{ m}$, $BC = 4 \text{ m}$ и $\angle BAC = 30^\circ$. Да се намерят дължината на страната AB , големините на $\angle ABC$ и да се определи видът на триъгълника според ъглите.

Решение. За успешното реализиране на етапа E_1 „усвояване на условието на задачата“ е естествено да се проведат следните разсъждения. Тъй като за дадения триъгълник са известни двете му страни и ъгълът срещу едната от тях, то се очаква, че с дадените три елемента той е определен до еднаквост (Portev, 2001).

Нека въведем традиционните означения за $\triangle ABC$, а именно:

$$BC = a, AC = b, \angle BAC = \alpha, AB = c, \angle ABC = \beta, \angle ACB = \gamma.$$

По-наблюдателният читател обаче ще забележи, че даденият ъгъл е срещу по-малката от двете дадени страни. Този факт би трябвало да предизвика съмнение у него дали наистина с дадените елементи този триъгълник е определен еднозначно. Това ще се потвърди или отхвърли, когато се намери третата му страна, която, междупрочем, е посочена от автора на задачата като първи търсен елемент (Lozanov, Vitanov & Nedevski, 2006). За целта може да се използва идеята за прилагане на косинусовата теорема $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$ за страната срещу дадения ъгъл. Тази идея води до получаване на квадратно уравнение за страната c , а именно: $c^2 - 12c + 32 = 0$. Получените два положителни корена $c_1 = 8 \text{ m}$ и $c_2 = 4 \text{ m}$ навеждат на мисълта да се изследва и установи дали те са решения на геометричната задача. Затова първо трябва да се провери дали всяко от тях и дадените стойности на другите две страни удовлетворяват необходимото и достатъчно условие за съществуване на триъгълник, а именно: дължината на най-голямата страна да е по-малка от сумата от дължините на другите две страни. Проверката показва, че и $8 < 4 + 4\sqrt{3}$, и $4\sqrt{3} < 4 + 4$. Това означава, че и двата корена на горното квадратно уравнение са решения на дадената задача. Следователно се потвърждава повдигнатото по-горе съмнение, че с дадените си елементи триъгълникът в разглежданата задача, наистина, не е определен еднозначно – съществуват два различни триъгълника, чиито елементи са дадените числа.

Във връзка с реализацията на етап E_4 „поглед назад“ по Д. Пойа (Polya, 1972) при тази задача ще отбележим следното.

Първо, учебната практика показва, че когато за един триъгълник са дадени две страни и ъгъл срещу едната от тях, обикновено учещите използват друга идея – прилагат съответната основна задача за решаване на триъгълник, при

която се намира синусът на ъгъла, който е срещу другата дадена страна – в случая това е ъгълът β . В резултат на прилагане на синусовата теорема за $\triangle ABC$ се получава уравнението $\sin \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, което в интервала $(0^\circ; 180^\circ)$ има две решения $\beta_1 = 60^\circ$ и $\beta_2 = 120^\circ$. Тези стойности, разбира се, могат да се получат и чрез прилагане на косинусовата теорема за двата различни триъгълника – съответно със страни a, b, c_1 и a, b, c_2 , което води до:

$$\cos \beta_1 = \frac{a^2 + c_1^2 - b^2}{2ac_1} \text{ и } \cos \beta_2 = \frac{a^2 + c_2^2 - b^2}{2ac_2}.$$

След заместване в тях със съответните стойности за a, b, c_1 и c_2 намираме съответно $\cos \beta_1 = \frac{1}{2}$ и $\cos \beta_2 = -\frac{1}{2}$.

Второ, рефлексията от нашия опит показва, че един съобразителен ученик би предпочел друга идея, друга стратегия на разсъждение.

1) Когато $c_1 = 8\text{ m}$, $a = 4\text{ m}$ и $b = 4\sqrt{3}\text{ m}$, то очевидно е изпълнено равенството $c_1^2 = a^2 + b^2$, което е достатъчно условие триъгълникът с посочените страни да е правоъгълен с прав ъгъл срещу страната $c_1 = 8\text{ m}$. Тогава е ясно, че $\beta_1 = 60^\circ$, защото по условие $\alpha = 30^\circ$.

2) Когато $c_2 = 4\text{ m}$, понеже по условие и $a = 4\text{ m}$, то в този случай триъгълникът е равнобедрен и значи $\gamma = \alpha = 30^\circ$. Тогава $\beta_2 = 120^\circ$.

Трето, очевидно последните разсъждения са най-рационални, а освен това от тях директно се определя и видът на триъгълниците във всеки от двата разгледани случая.

Задача 2. Даден е $\triangle ABC$, в който $AC = 4\sqrt{2}$, $BC = 5$ и $\angle BAC = 45^\circ$. Да се намерят дължината на страната AB и $\cos \angle ABC$ и да се определи видът на триъгълника според ъглите.

Решение. Тъй като задачата е аналогична на предишната, то реализацията на етап E_1 от методиката за решаване не затруднява особено учениците. Разбира се, и тук може да възникне у някои от тях проблемният въпрос: „Определят ли еднозначно разглеждания триъгълник трите дадени елемента?“. Отговорът ще се получи след намирането на третата страна на триъгълника. За целта и тук се въвеждат означенията:

$BC = a$, $AC = b$, $\angle BAC = \alpha$, $AB = c$, $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$ и отново може да се използва косинусовата теорема $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$, приложена за страната срещу дадения ъгъл $\alpha = 45^\circ$. Така се стига до следното квадратно уравнение $c^2 - 8c + 7 = 0$, чиито корени са: $c_1 = 7$ и $c_2 = 1$.

И при тази задача трябва да се провери дали всяка от тройките положителни числа $a = 5$, $b = 4\sqrt{2}$, $c = 7$ и $a = 5$, $b = 4\sqrt{2}$, $c = 1$ удовлетворяват необходимото и достатъчно условие за съществуване на триъгълник. Проверката показва, че за най-голямото число и от двете тройки разглеждани положителни числа е изпълнено: $7 < 5 + 4\sqrt{2}$ и $4\sqrt{2} < 5 + 1$, което означава, че и двата корена на квадратното уравнение са решения на геометричната задача. С това се дава отговор на възникналия по-горе въпрос и се прави извод, че и в тази задача разглежданият триъгълникът не е определен еднозначно с дадените си елементи, т.е. съществуват два различни триъгълника, чиито елементи са дадените положителни числа $a = 5$, $b = 4\sqrt{2}$ и $\alpha = 45^\circ$.

По-нататък е естествено разсъжденията да продължат върху търсенето на $\cos\beta$. За целта се прилага косинусовата теорема за двата триъгълника:

$\cos\beta_1 = \frac{a^2 + c_1^2 - b^2}{2ac_1}$ и $\cos\beta_2 = \frac{a^2 + c_2^2 - b^2}{2ac_2}$. Като се замести със съответните числови стойности, се получават резултатите: $\cos\beta_1 = 0,6$ и $\cos\beta_2 = -0,6$.

Остава да се изследва видът на разглежданите триъгълници в двата случая. От последния резултат ($\cos\beta_2 = -0,6$) веднага става ясно, че триъгълникът със страни $a = 5$, $b = 4\sqrt{2}$ и $c = 1$ е тъпоъгълен. За другия триъгълник обаче не е налице подходяща специфична информация, както бе в предишната задача (равнобедреност на триъгълника или изпълнимост на равенството на Питагор). За определяне на неговия вид според ъглите му може да се използват различни знания. Например от получения резултат $\cos\beta_1 = 0,6$ и факта, че функцията $\cos x$ е намаляваща в първи квадрант, а пък очевидно $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,71 > 0,6 > 0,5 = \cos 60^\circ$, може да се направи извод, че е изпълнено следното неравенство $45^\circ < \beta_1 < 60^\circ$, откъдето следва, че $\alpha + \beta > 90^\circ$, т.е. $\gamma < 90^\circ$. Значи триъгълникът със страни $a = 5$, $b = 4\sqrt{2}$, $c = 7$ е остроъгълен.

Относно етапа E_4 : друг начин, който е по-вероятно да изберат учениците, е да пресметнат по формулата $\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$, откъдето се получава $\cos\gamma = \frac{8}{70} > 0$, което означава, че $\gamma < 90^\circ$.

Възможно е още да сравнят квадрата на най-голямата страна ($c = 7$) със сумата от квадратите на другите две страни ($a = 5$ и $b = 4\sqrt{2}$) на триъгълника, а именно $c^2 < a^2 + b^2$, откъдето директно следва изводът, че този триъгълник е остроъгълен.

Преди да преминем към следващата задача, ще припомним видовете правила за извод.

а) Правило на отделянето (modus ponens) $\frac{p \rightarrow q, p}{q}$

б) Правило на отрицанието (modus tollens) $\frac{p \rightarrow q, \bar{q}}{\bar{p}}$

в) Правило на силогизъм $\frac{p \rightarrow q, q \rightarrow r}{p \rightarrow r}$

г) Правило на контрапозицията $\frac{p \rightarrow q}{\bar{q} \rightarrow \bar{p}}$

Освен това ще обърнем внимание, че не са правила за извод следните схеми: $\frac{p \rightarrow q, q}{p}$ и $\frac{p \rightarrow q, \bar{p}}{\bar{q}}$.

Учебната практика показва, че не са редки случаите, когато доста ученици (а понякога даже и учители) при решаване на задачи, може би неволно, но независимо от това погрешно прилагат в своите разсъждения някоя от последните две схеми. Така например на конкурсна задача, предназначена за придобиване на II клас квалификация през 1993 г., учители (дори с по 15 – 20-годишен педагогически стаж), след като са получили в хода на решаването, че основата на триъгълна пирамида е равнобедрен триъгълник ABC , за който

$AC = BC = b$, а за лицето му – следния резултат: $S = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$, са направили грешен извод, че основата ABC е равнобедрен триъгълник. Те по същество са използвали обратното твърдение на теоремата: „Ако b е страната на рав-

ностранен триъгълник, то лицето му е $S = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$ “, което обаче не е вярно,

т.е. не е теорема. Иначе казано, тези учители са приложили схемата $\frac{p \rightarrow q, q}{p}$, която не е правило за извод, в резултат на което не само са допуснали логическа грешка в своите разсъждения, но и са изпуснали да разгледат един от възможните случаи, а от там са нарушили изискването за пълнота на решението на задачата (тя има по два отговора за всяко от трите зададени изисквания).

За любознателния читател ще разгледаме и цялостното условие на въпросната конкурсна задача и разсъжденията по откриване на решение.

Задача 3. Дадена е триъгълна пирамида $ABCM$, на която околният ръб MC е перпендикулярен на равнината на основата (ABC), а другите два околни ръба MA и MB сключват с нея ъгъл 60° . Ако дължината на основния ръб $AC = b$ и обемът на пирамидата е равен на $\frac{b^3}{4}$, да се намерят:

а) лицето на околната ѝ повърхнина;

б) $tg \varphi$, където φ е големината на двустенния ъгъл между околната стена ABM и основата ABC ;

в) радиусът на описаната сфера около пирамидата.

Решение. Характерно при решаването на тази задача е, че в процеса на усвояването на нейното условие се извлича значително количество съществена информация, която спомага както да се направи верен чертеж, така и да се проведат правилни разсъждения по откриването на търсените елементи. Така, понеже околният ръб MC е перпендикулярен на равнината на основата (ABC) , то точка C се явява ортогонална проекция на върха M в равнината на основата. Тогава наклонените ръбове MA и MB , заключващи с равнината на основата равни ъгли ($\angle MAC = \angle MBC = 60^\circ$), се явяват хипотенузи в еднакви правоъгълни триъгълници MCA и MCB , защото последните имат общ катет MC и равни остри ъгли (60°). Затова $MA = MB$. Обаче равните наклонени имат равни проекции, откъдето следва, че $AC = BC = b$ и значи основата ABC е равнобедрен триъгълник с бедро b . Тези отсечки, от своя страна, се явяват катети срещу ъгъл 30° , разглеждани в еднакви правоъгълни триъгълници MCA и MCB , поради което $MA = MB = 2b$. А от който и да е от тези триъгълници, по теоремата на Питагор или чрез използване на тригонометрични функции се намира, че $MC = b\sqrt{3}$.

Тогава, щом е даден по условие обемът на пирамидата, използвайки формулата

$V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot MC$, се намира, че $S_{ABC} = \frac{b^2 \sqrt{3}}{4}$ (1). И ето, именно оттук **не бива**

да се прави извод, че $\triangle ABC$ е равнобедрен, за което стана въпрос в предварителните бележки по-горе. А трябва да се използва общата формула за лице на произволен триъгълник $S = \frac{1}{2} ab \cdot \sin \gamma$, която в случая за равнобедрен триъгълник

с бедро b има вида $S_{ABC} = \frac{1}{2} b^2 \cdot \sin \gamma$ (2) Понеже левите страни на равенства

(1) и (2) са еднакви, то са равни и десните им страни, т.е. $\frac{1}{2} b^2 \cdot \sin \gamma = \frac{b^2 \sqrt{3}}{4}$, от-

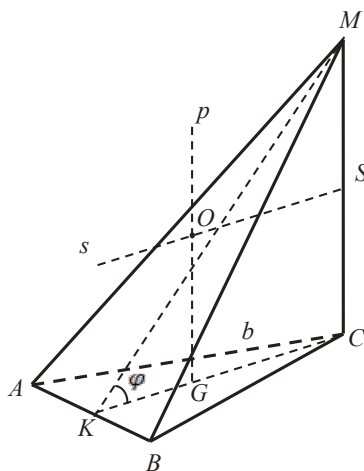
където се получава основното тригонометрично уравнение $\sin \gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Тъй като то има две решения в интервала $(0^\circ; 180^\circ)$, а именно $\gamma = 60^\circ$ и $\gamma = 120^\circ$, то основата ABC на пирамидата е или равнобедрен триъгълник със страна b , или тъпоъгълен триъгълник с бедра b и ъгъл между тях 120° . Иначе казано, съ-

ществуват две пирамиди с дадените в условието на задачата елементи, т.е. и тази задача е неоднозначна. Затова пълното решение на задачата изисква разглеждане на два случая, т.е. намиране на търсените елементи поотделно за всяка от посочените две пирамиди.

Случай 1. При $\gamma = 60^\circ$ основният ръб AB на пирамидата $ABCM$ има дължина b , затова лицето на стената ABM може да се намери на пример по Хероновата формула, защото са известни и трите ѝ страни, а именно $S_{ABM} = \frac{\sqrt{15}}{4} b^2$. Лицето на всяка от другите две еднакви стени (правоъгълни триъгълници) е $S_{ACM} = S_{BCM} = \frac{\sqrt{3}}{2} b^2$.

Тогава в подусловие а) се получава $S_{\text{ок.п.}} = \frac{\sqrt{3}}{4} (\sqrt{5} + 4) b^2$.

б) За намирането на $\text{tg } \varphi$, където φ е големината на двустенния ъгъл между околната стена ABM и основата ABC , първо трябва да се определи (построй) подходящ негов линеен ъгъл. Тъй като в разглеждания случай ($\gamma = 60^\circ$) $\triangle ABC$ е равностранен, то медианата му CK се явява и височина, т.е. $CK \perp AB$. Но CK е ортогоналната проекция на MK върху равнината на основата, следователно по теоремата за трите перпендикуляра е изпълнено $MK \perp AB$. И така, $\angle CKM$ е линейният ъгъл на търсения двустенен ъгъл (фиг. 1). Затова $\text{tg } \varphi = \frac{MC}{CK}$. Понеже $MC = b\sqrt{3}$ и $CK = \frac{\sqrt{3}}{2} b$, то $\text{tg } \varphi = 2$.



Фигура 1

в) За да се намери радиусът R на описаната сфера около пирамидата, е необходимо и достатъчно да се определи положението на нейния център O . Той по принцип е пресечната точка на симетралните равнини на ръбовете на пирамидата. Но в разглеждания случай ($\gamma = 60^\circ$) симетралните равнини на основните ръбове се пресичат в една права p – перпендикулярна на основата ABC и минаваща през нейния център, който същевременно е и медицентър, и център на описаната около $\triangle ABC$ окръжност (последното е съществено, защото ще се използва и при разглеждането на случая, когато основата е тъпоъгълен равнобедрен триъгълник). От проведените дотук разсъждения следва, че $O \in p$. За да се определи местоположението на O върху правата p , е достатъчно да се намери пресечната точка на p със симетралната равнина на един околен ръб. Кой е най-подходящият от тях? Тъй като $p \parallel MC$, то подходяща е симетралната равнина на околния ръб MC . Разбира се, не е нужно да се построява тази симетрална равнина, а е достатъчно в спомагателната равнина, определена от успоредните прави p и MC , да се разгледа симетралата s на отсечката MC , защото s лежи във въпросната симетрална равнина. Освен това, понеже $MC \perp CK$ и $s \perp MC$, то $s \parallel CK$. И така, центърът O на описаната сфера около пирамидата се явява пресечната точка на правите s и p . Тогава $R = OC$ и може да се пресметне от $\triangle OGC$, чиито катети са известни, а именно $OG = \frac{1}{2}MC = \frac{\sqrt{3}}{2}b$ и $GC = \frac{2}{3}CK = \frac{\sqrt{3}}{3}b$. От тях по теоремата на Питагор се намира $R = \frac{\sqrt{39}}{6}b$.

Случай 2. При $\gamma = 120^\circ$ основният ръб AB на пирамидата $ABCM$ има дължина $\sqrt{3}b$, затова за намирането на лицето на стената ABM не е подходящо да се използва Хероновата формула. По-уместно е да се намери първо MK (височина и медиана в $\triangle ABM$), която същевременно се явява хипотенуза в правоъгълния $\triangle MCK$. За нея имаме $MK = \frac{\sqrt{15}}{2}b$. Тогава $S_{ABM} = \frac{3\sqrt{5}}{4}b^2$. Разбира се, и в този случай лицата на вертикалните околни стени са $S_{ACM} = S_{BCM} = \frac{\sqrt{3}}{2}b^2$. Тогава при този случай в подусловие а) се получава резултатът $S_{\text{ок.п.}} = \frac{3\sqrt{5}+4\sqrt{3}}{4}b^2$.

Иначе казано, точката O_1 е ортогоналната проекция на центъра O на описаната сфера върху равнината на основата ѝ. Понеже CK е симетрала на AB , то O_1 лежи на продължението на CK . И така, правата p ще минава през точка O_1 и $p \parallel MC$. За определянето на положението на O върху p отново важат разсъжденията от първия случай – $O = p \cap s$, където s е симетрата на околния ръб MC в спомагателната равнина, определена от успоредните прави p и MC . И тук отново е уместно да търсим именно радиуса $R = OC$, чиято дължина може да се пресметне от $\triangle OO_1C$, на който единият катет е вече известен $OO_1 = \frac{1}{2}MC = \frac{\sqrt{3}}{2}b$, а другият е $O_1C = R_1$ (радиус на описаната окръжност около $\triangle ABC$). За неговото намиране може да се приложи синусовата теорема, тъй като са известни $AB = \sqrt{3}b$ и ъгъла $\gamma = 120^\circ$. Така се получава $R_1 = b$. Тогава пак по теоремата на Питагор се намира $R = \frac{\sqrt{7}}{2}b$.

Представеното решение на задачата в основни линии удовлетворява изискването за пълнота. Разбира се, в някои моменти разсъжденията и съответният им запис могат да бъдат изложени и по-подробно, което зависи от състава на класа и възприемателните способности на учениците.

Както се вижда от горното изложение, усвояването на правилата за извод съставлява съществен елемент в логическото обучение на учениците. От това значително зависи развитието на тяхната логическа култура. Затова е уместно в съвременните учебници да се отделя специално внимание на този въпрос и да се води целенасочена подготовка в училище.

ЛИТЕРАТУРА

- Кучинов, Й. (2002). *Конкурсни задачи по математика за постъпване във ВУЗ през 2001 г. Свитък 8*. София: Модул.
- Лозанов, Ч., Витанов, Т. & Недевски, П. (2006). *Математика за Х кл. (задължителна подготовка)*. София: Анубис. ISBN 954-426-351-9.
- Пойа, Д. (1972). *Как да се решава задача*, София: Народна просвета.
- Портев, Л. (2001). Определеност (параметризация) на геометричните фигури и приложения (с. 177 – 193). В.: Милушев, В. (ред.). *Методи за решаване на задачи (от училищния курс по математика). Част I*. Пловдив: Макрос. ISBN 954-702-079-X.

REFERENCES

- Kuchinov, Y. (2002). *Competitive Tasks in Mathematics for Entering the University in 2001. Volume 8*. Sofia: Modul.
- Lozanov, Ch., Vitanov, T. & Nedevski, P. (2006). *Mathematics for X class. (Compulsory Education)*. Sofia: Anubis. ISBN 954-426-351-9.
- Polya, G. (1972). *How to Solve a Problem*, Sofia: Narodna Prosveta.
- Portev, L. (2001). Definiteness (Parametrization) of Geometric Figures and Applications (pp. 177 – 193). In.: Milushev, V. (Ed.). *Methods for Solving Problems (from the School Course of Mathematics). Part I*. Plovdiv: Makros. ISBN 954-702-079-X.

AMBIGUOUS GEOMETRY PROBLEMS

Abstract. The article presents a system of geometry problems characterized by that the data defines the respective figure ambiguously – there are two figures, which are determined by the elements given in the problem. This fact is established as a result of analyzing the condition of the specific problem and conducting a research activity to find its solutions. We suggest author's training solutions which are accompanied by reflexive reasoning which is about their rationality, completeness of the solutions and the conducted research in finding them. Relevant conclusions with training character have been made. Typical logical mistakes made by students or teachers are analyzed. This is done in order to deep the awareness of these mistakes both from the trainees and trainers.

The paper is intended for current teachers and university students, preparing for math teachers, as well as for students interested in mathematics.

Keywords: problem; ambiguous geometry problem; solution; completeness of a solution; research

✉ **Dr. Dobrinka Milusheva-Boykina, Assoc. Prof.**

<https://orcid.org/0000-0002-4920-3736>

Faculty of Mathematics and Informatics
University of Plovdiv "Paisii Hilendarski"

236, Bulgaria Blvd.

Plovdiv, Bulgaria

E-mail: boikina@uni-plovdiv.bg