https://doi.org/10.53656/math2021-1-1-pod

Educational Matters
Научно-методически статии

ПОДБОР И УЧАСТИЕ НА ОТБОРА НА БЪЛГАРИЯ В XXIV МЛАДЕЖКА БАЛКАНИАДА ПО МАТЕМАТИКА 2020

Ивайло Кортезов
Институт по математика и информатика – БАН

Резюме. Статията съдържа преглед на селекцията и тренировката на отбора на България за Младежката балканска олимпиада по математика 2020, както и на самата нея и представянето на отбора, завоювал първо място там. Включените тук материали могат да са от полза за школите за подготовка за математически състезания VII – IX клас.

Ключови думи: математически състезания; Младежка балканска олимпиада по математика; гимназиален етап

XXIV Младежка балканска Олимпиада по математика (МлБОМ) за ученици до 15,5 години беше организирана от Математическото общество на Югоизточна Европа (MASSEE). Формалните домакини от Гърция се постараха състезанието да се проведе на обичайното високо ниво въпреки обективните предизвикателства, справяйки се чудесно. Част от въведените практики, например методът за селекция и превод на състезателната тема, е разумно да станат постоянни. Олимпиадата се проведе с дистанционно наблюдение в периода 9 – 13.9.20. Отборът на България трябваше да се състезава в НПМГ „Акад. Л. Чакалов“ и администрацията на това училище прие задачата присърце, показвайки и завиден професионализъм. В олимпиадата взеха участие ученици от 18 държави: Азербайджан (гост), Албания, Босна и Херцеговина, България, Гърция, Индонезия (гост), Кипър, Молдова, Румъния, Саудитска Арабия (гост), Северна Македония, Сърбия, Таджикистан (гост), Туркменистан (гост), Турция, Филипини (гост), Франция (гост) и Хърватска (гост). Разширеният отбор на България за МлБОМ беше избран според резултатите от Есенния математически турнир (за VIII и IX клас), Зимните математически състезания (за VIII и IX клас) и Националния кръг на олимпиадата по математика (за VII и VIII клас). Съгласно решението на Националната комисия за олимпиадата по математика, ЗМС и ПМС VIII – XII клас, отборът на България за МлБОМ беше определен сред разширения отбор въз основа на баража за 4-то място в VII клас и две контролни работи.

***Бараж за VII клас за контролните за МлБОМ** (18.7.20)*

1. За всяко естествено число n, с $P(n)$ ще означаваме произведението от цифрите му. Ако n е петцифрено и $P(2n)\neq 0$, на колко най-много може да е равно частното $P(n):P(2n)$?

2. Ъглополовящият лъч на ъгъл $BAC=76°$ от триъгълник ABC пресича:

– правата през B, успоредна на AC, в точка D;

– правата през C, успоредна на AB, в точка E.

Ако $BC=DE$, намерете градусната мярка на ъгъл ABC.

3. В два съседни върха на правилен n-ъгълник са поставени пулове. Ако в даден момент пуловете се намират във върхове A_i и A_j, то на следващия ход те трябва да се поставят в два различни върха A_k и A_m, така че триъгълниците $A_iA_jA_k$ и $A_iA_jA_m$ да бъдат равнобедрени. Могат ли в даден момент двата пула да се окажат разположени през връх, ако:

а) $n=65$; б) $n=69$?

Решения

1. $\boxed{\textbf{Отг. 1875}}$ По-добре е в записа на n да липсва 0. Последната цифра на n може да намалее не повече от 3 пъти, а всяка от останалите – не повече от 5 пъти (ако има пренос към нея). Ако $2n$ има допълнителна цифра, тя може да е само 1. Пример: 55556.

2. $\boxed{\textbf{Отг. 22° или 82°}}$ Нека първо $\sphericalangle ABC \geq \sphericalangle ACB$. Да построим точка F на лъча AB след B, за която $BF=AC$. Имаме $\sphericalangle ADB=\sphericalangle DAC=\sphericalangle DAB=\sphericalangle AEC$. Тогава $AB=BD$, $BF=AC=CE$. Сега $BFEC$ е успоредник и $BC=FE$. Триъгълниците ABC и BDF са еднакви по първи признак, така че $FD=CB=DE=EF$, т.е. триъгълник DEF е равностранен. Следователно

$60°=\sphericalangle DFE=\sphericalangle BFE-\sphericalangle BFD=\sphericalangle ABC-\sphericalangle ACB$

$\sphericalangle ABC=(180°-76°+60°):2=82°$.

Ако пък $\sphericalangle ABC<\sphericalangle ACB$, аналогично $\sphericalangle ABC=(180°-76°-60°):2=22°$.

3. $\boxed{\textbf{Отг. а) да; б) не}}$ **а)** Разстояние между пуловете ще наричаме най-малкия брой отсечки по периметъра от единия до другия пул; в началния момент то е 1. Ако при първия ход A_iA_j е бедро в единия равнобедрен триъгълник и основа в другия, то разстоянието между пуловете ще стане 31. Ако при всички следващи ходове A_iA_j се оказва само бедро на равнобедрения триъгълник; то разстоянието между пуловете (по модул 65) ще се умножава по 3; така следващите разстояния са 28; 19; 57; 41; 58; 44; 2. Целта е постигната.

б) Номерираме поред върховете 0, 1, 2, 0, 1, 2, ..., 0, 1, 2. Върховете на един равнобедрен триъгълник имат еднакви остатъци при деление на 3 или три различни остатъка при деление на 3 (защо?). В резултат след всеки ход пуловете попадат във върхове с еднакви номера, т.е. целта е непостижима.

Баражът беше между десетимата ученици от VII клас, заели 4-то място на НОМ, а извън класирането (с наклонен шрифт) по желание бяха допуснати и още четирима с високи резултати на НОМ. Ето най-силните резултати:

Имена	НОМ	Училище	Град	Сбор
Демира Недева	*14,5*	*МГ „Акад. Кирил Попов“*	*Пловдив*	*17*
Кирил Марин Кандиларов	17	СМГ „Паисий Хилендарски“	София	16
Ангел Христов	*16,5*	*ППМГ „Акад. Н. Обрешков“*	*Бургас*	*16*
Петко Лазаров	*16*	*ППМГ „Акад. Н. Обрешков“*	*Бургас*	*15*
Петър Узунов	17	МГ „Акад. Кирил Попов“	Пловдив	14
Ванеса Калинкова	17	ППМГ „Акад. Н. Обрешков“	Бургас	14
Сияна Майсторова	17	ППМГ „Акад. Н. Обрешков“	Бургас	13

Контролни работи за определяне отбора на България *(3 – 4.8.20)*

1. Ако a, b, c са неотрицателни реални числа, от които поне две положителни, докажете, че

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\geq\frac{a+b+c}{3}.$$

2. Окръжността k с център O е външновписана за триъгълника ABC и се допира до продълженията на страните му AB и AC съответно в точки M и N. Точките P и Q са пресечните на отсечката MN съответно с правите BO и CO. Окръжностите k_1 и k_2, описани съответно около триъгълниците OMQ и ONP, се пресичат в точки O и D.

а) Докажете, че D лежи на k.

б) Ако точка E е пресечната на правите CP и BQ, то докажете, че отсечката DE е равна на радиуса на вътрешно вписаната в триъгълника ABC окръжност.

3. Нека $n<50$ е естествено число. На дъската са записани първите n и последните n сред числата 1, 2, 3, ..., 99. Ани и Боян играят, редувайки се; започва Ани. Който е на ход, трябва да увеличи някое от числата с 1 или да изтрие някое от числата. Не е разрешено в никакъв момент на дъската да има две равни числа, нито да се записва трицифрено число. Който не може да играе, губи, а другият печели. Кой ще победи при правилна игра?

4. Да оцветим на числовата ос в жълто точките от вида $89x+98y$ за естествени x, y, а останалите цели точки – в синьо. Има ли точка на оста, за която симетричните относно нея цели точки са разноцветни?

5. Ако a, b, c са неотрицателни реални числа, от които поне две положителни, то намерете (ако съществуват) най-малката и най-голямата стойност на израза

$$\sqrt{\frac{a(b+c)}{b^2+c^2}}+\sqrt{\frac{b(c+a)}{c^2+a^2}}+\sqrt{\frac{c(a+b)}{a^2+b^2}}.$$

6. Даден е остроъгълен $\triangle ABC$ с ортоцентър H. Ъглополовящите на ъглите CAH и CBH се пресичат в точка Q. Средите на AB и CH са съответно M и N.

а) Докажете, че точка Q лежи на правата MN.

б) Ако Q е средата на MN, намерете градусната мярка на $\sphericalangle ACB$.

7. Решете в цели числа уравнението $x^3(y+1)+y^3(x+1)=43$.

8. Даден е n-ъгълник с обиколка 2020 и целочислени страни. Във всеки връх пишем остатъка от делението на дължините на прилежащите му страни (по-дългата на по-късата; при равенство пишем 0). Намерете най-голямото n, при което сборът на всички записани числа може да е 1320.

Повечето задачи позволяват доста различни подходи в решенията; предлагаме само по един за всяка от тях:

Решения

1. При линеаризация задачата се свежда до сумиране на

$$a^3:(a^2+ab+b^2)-(2a-b):3=(a-b)^2(a+b):3(a^2+ab+b^2)\geq 0$$

с подобните му при циклична замяна.

2. а) Нека F е допирната точка на окръжността k със страната BC. Ще докажем, че точките B и F лежат на k_1.Ако $\sphericalangle BAC=\alpha$, $\sphericalangle ABC=\beta$ и $\sphericalangle ACB=\gamma$, то

$$\sphericalangle OCN=90^\circ-\frac{\gamma}{2}, \sphericalangle ANM=90^\circ-\frac{\alpha}{2}\Rightarrow \sphericalangle MQO=90^\circ-\frac{\beta}{2}.$$

От $BD=BM$ и $\sphericalangle DBM=180^\circ-\beta\Rightarrow\sphericalangle BDM=\dfrac{\beta}{2}$ и $\sphericalangle MDO=90^\circ-\dfrac{\beta}{2}=\sphericalangle MQO$, така че четириъгълникът $DMOQ$ е вписан в окръжността k_1, т.е. $F\in k_1$. Аналогично се доказва, че $F\in k_2$, следователно $F\equiv D$.

б) От а) BQ^CO, CP^BO и OD^BC, така че $E\in OD$ като ортоцентър на BOC. Ако I е центърът на вътрешновписаната окръжност, то $\sphericalangle CBQ=90^\circ-\sphericalangle BCQ=\dfrac{\gamma}{2}=\sphericalangle BCI$ и $\sphericalangle BCP=90^\circ-\sphericalangle CBP=\dfrac{\beta}{2}=\sphericalangle CBI$, така че по втори признак $\triangle BIC\cong\triangle CFB$ и височините им към BC са равни, т.е. $DE=r$.

3. Ако n е четно, то Боян печели със стратегията да оставя след хода си по равен брой четни и нечетни числа (в началото това е в сила). Това наистина е възможно, понеже, ако Ани увеличи някое число, да речем четно, то нечетните числа стават с две повече от четните, така че има поне едно от тях, което може да бъде увеличено с 1, без да стане трицифрено и без да се изравни с друго число. Понеже при всеки ход сборът от разликите на числото 100 с всяко от записаните числа намалява с естествено число и не може да стане отрицателен, играта непременно приключва. Тъй като Боян не може да загуби при избраната стратегия, той ще се окаже победител.

Ако n е нечетно, то Ани печели със стратегията да оставя след хода си по равен брой четни и нечетни числа. За целта при първия си ход Ани може да увеличи числото n с 1, а при следващите, ако Боян увеличи някое число, да речем четно, то нечетните числа стават с две повече от четните, така че има поне едно от тях, което може да бъде увеличено с 1, без да стане трицифрено и без да се изравни с друго число. Понеже с всеки ход или сборът от разликите на числото 100 с всяко от записаните числа намалява с естествено число и не може да стане отрицателен, играта непременно приключва. Тъй като Ани не може да загуби при избраната стратегия, тя ще се окаже победител.

4. $\boxed{\textbf{Отг. Да, 4454,5}}$ Да решим по-обща задача, заменяйки 89 и 98 с взаимно прости естествени a, b, по-големи от 2. Явно точката $a+b$ е жълта, а тези вляво от нея са сини. Докажете самостоятелно (например с пълна система от остатъци), че точката ab е синя, а тези вдясно от нея са жълти. Така търсената точка може да е само $(ab+a+b)$**:**2. За да се уверим, че е тя, ще покажем, че за всяко цяло c точно едно от уравненията $ax+by=c$ и $ax+by=ab+a+b–c$ има естествени решения. Уравнението $ax+by=c$ има решение $(x_0;y_0)$ с $1\leq x_0\leq b$. Тогава $(b+1–x_0;$ $1–y_0)$ е решение на $ax+by=ab+a+b–c$. Ако $y_0>0$, имаме решение на първото уравнение, а при $y_0\leq 0$ – на второто. Ако и двете уравнения имат естествени решения, то сборът им е естествено решение на уравнението $ax+by=ab+a+b$, т.е. е $(1;a+1)$ или $(b+1;1)$, докато 1 не е сбор на две естествени числа.

5. След евентуална циклична замяна можем да считаме, че $\min(a;b;c)=c$. Тогава от

$$\sqrt{\frac{a(b+c)}{b^2+c^2}} \geq \sqrt{\frac{a(b+c)}{b^2+bc}} = \sqrt{\frac{a}{b}};\ \sqrt{\frac{b(c+a)}{c^2+a^2}} \geq \sqrt{\frac{b(c+a)}{ca+a^2}} = \sqrt{\frac{b}{a}}$$

и от неравенството между средно аритметично и средно геометрично следва, че $\sqrt{\frac{a(b+c)}{b^2+c^2}}+\sqrt{\frac{b(c+a)}{c^2+a^2}}+\sqrt{\frac{c(a+b)}{a^2+b^2}} \geq \sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}+0 \geq 2$ с равенство при $a=b$, $c=0$, така че най-малката стойност на израза е 2. Ще покажем, че той няма най-голяма стойност. Наистина, ако $x>0$ е произволно голямо и положим $a=x^2$, $b=1$ и $c=0$, то стойността на израза е $\sqrt{\frac{x^2}{1}}+\sqrt{\frac{x^2}{x^4}}+\sqrt{0}>x.$

6. а) Нека AE $(E\in BC)$ и CD $(D\in AB)$ са височините на $\triangle ABC$. Ако $\sphericalangle BAC=\alpha$, $\sphericalangle ABC=\beta$ и $\sphericalangle ACB=\gamma$,
$\sphericalangle QAB+\sphericalangle QBA=90^\circ-\beta+\frac{1}{2}(90^\circ-\gamma)+90^\circ-\alpha+\frac{1}{2}(90^\circ-\gamma)=90^\circ$.
Следователно $\sphericalangle AQB=90^\circ$ и понеже QM е медиана в правоъгълния $\triangle ABQ$, $\sphericalangle QMB=90^\circ+\alpha-\beta$. От вписания четириъгълник $ADEC$ по-

лучаваме, че $\measuredangle CDE = 90° - \gamma$. Точките M, D, E и N лежат на окръжността с диаметър MN (защо?). Следователно $\sphericalangle NME = \sphericalangle CDE = 90° - \gamma$. От EM – медиана в правоъгълния $\triangle ABE \Rightarrow \sphericalangle BME = 180° - 2\beta$. Тогава $\sphericalangle NMD = \sphericalangle NME + \sphericalangle BME = 90° - \gamma + 180° - 2\beta = 90° + \alpha - \beta$. Получихме, че $\sphericalangle QMB = \sphericalangle NMB = 90° + \alpha - \beta$, откъдето следва, че точка Q лежи на правата MN.

б) Нека окръжността, на която лежат точките M, D, E и N, е с радиус R. Тогава $QM = QE = R$. Но $ME = MQ = R$ (медиани в правоъгълни триъгълници с обща хипотенуза AB). Следователно MEQ е равностранен и $\sphericalangle NME = 90° - \gamma = 60° \Rightarrow \gamma = 30°$.

7. Полагайки $s=x+y$, $p=xy$, получаваме $2p^2-(s^2-3s)p+43-s^3=0$, което е квадратно за p с дискриминанта $D=s^4+2s^3+9s^2-344$. За всяко s имаме $D<(s^2+s+5)^2$ (еквивалентно на $s^2+(s+5)^2+344>0$), докато $D>(s^2+s+3)^2$ (еквивалентно на $2s(s-3)>353$) е в сила за $s\geq 15$ и за $s\leq -12$. Има два случая:

– Ако $s\geq 15$ или $s\leq -12$, то D е точен квадрат само за $D=(s^2+s+4)^2$, т.е. $s=-45$, откъдето $p=1036$ (което не дава решение) или $p=44$, което дава решенията $(-1;-44)$ и $(-44;-1)$.

– Иначе директно проверяваме, че D е точен квадрат само при $s=-5$. Тогава $p=14$ (което не дава решение) или $p=6$, което дава решенията $(-2;-3)$ и $(-3;-2)$.

8. $\boxed{\textbf{Отг. 40}}$ Ако $a \geq b$ са дължини на съседни страни и $a = bq + r$, където r е остатъкът при делението на a с b, то $a + b = b + bq + r \geq r + 1 + (r + 1).1 + r \geq 3r + 2$. Събирайки тези неравенства за всяка двойка съседни страни, получаваме $4040 \geq 3.1320 + 2n$, откъдето $n \leq 40$. Пример: дължини 67, 34, 67, 34, …, 67, 34.

Ето резултатите на най-силните шестима, сформирали отбора, и на първата резерва:

Имена	Клас	Училище	Град	Сбор
Марин Христов	VIII	СМГ „Паисий Хилендарски“	София	70
Иван Тагарев	IX	СМГ „Паисий Хилендарски“	София	69
Ясен Пенчев	VIII	ПМГ „Акад. Иван Гюзелев“	Габрово	63
Борис Гачевски	VIII	СМГ „Паисий Хилендарски“	София	60
Антон Бресковски	VIII	СМГ „Паисий Хилендарски“	София	55
Мария Дренчева	VIII	СМГ „Паисий Хилендарски“	София	51
Енислав Николов	VIII	СМГ „Паисий Хилендарски“	София	42

За ръководител на отбора беше определен Ивайло Кортезов от ИМИ – БАН, а за заместник-ръководители – Таня Стоева от ПЧМГ (за селекцията) и Емил Карлов от СМГ (за участието).

Както личи от датите на горните състезания, в първата половина на ваканцията за учениците нямаше прекалено дълъг период, който да доведе до трайно отпускане и спад в нивото. За да се запази това и през остатъка от ваканцията, беше проведена сериозна 15-дневна подготовка: 12 дни дистанционно обучение (25.8 – 5.9.20) и 3 дни по 9 учебни ча̀са лекции в Центъра за подготовка на ученици за олимпиади на МОН (6 – 8.9.20) с лектори проф. Емил Колев от ИМИ – БАН, Мирослав Маринов от Оксфорд, доц. Станислав Харизанов от ИМИ – БАН и автора на тази статия. Поради ограничението в обема тук са включени само задачите за самостоятелна работа през първите два дни от дистанционната подготовка:

А1. Нека $x>y>z>0$ и $x+y+z=x^3+y^3+z^3$. Сравнете по големина числата $x^6+y^6+z^6$ и $x^4+y^4+z^4$.

Решение. Имаме $x^6-x^4-x^3+x=x\left(x^2-1\right)\left(x^3-1\right)\ge 0$, като равенство се достига само при $x=1$. Аналогично $y^6-y^4-y^3+y\ge 0$ и $z^6-z^4-z^3+z\ge 0$. Но тогава

$$x^6+y^6+z^6-\left(x^4+y^4+z^4\right)=x^6+y^6+z^6-\left(x^4+y^4+z^4\right)-\left(x^3+y^3+z^3\right)+\left(x+y+z\right)\ge 0$$

съгласно отбелязаното по-горе. Равенство може да се получи само ако $x=y=z=1$, но по условие числата са различни, откъдето $x^6+y^6+z^6>x^4+y^4+z^4$.

А2. Ако *a, b, c* са положителни числа със сбор 1, докажете $\frac{a-bc}{a+bc}+\frac{b-ac}{b+ac}+\frac{c-ab}{c+ab}\le\frac{3}{2}$.

Решение. Имаме $\frac{a-bc}{a+bc}+\frac{b-ac}{b+ac}+\frac{c-ab}{c+ab}\le\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{2a}{a+bc}+\frac{2b}{b+ac}+\frac{2c}{c+ab}\le\frac{3}{2}+3\Leftrightarrow$ $\frac{a}{a+bc}+\frac{b}{b+ac}+\frac{c}{c+ab}\le\frac{9}{4}$. По-нататък, $\frac{a}{a+bc}=\frac{a}{a(a+b+c)+bc}=\frac{a}{(a+b)(a+c)}=\frac{a(b+c)}{(a+b)(a+c)(b+c)}$ и аналогично за другите две дроби. Неравенството придобива вида

$$\frac{2\left(ab+bc+ac\right)}{\left(a+b\right)\left(a+c\right)\left(b+c\right)}\le\frac{9}{4}\Leftrightarrow 8\left(ab+bc+ac\right)\le 9\left(a+b\right)\left(a+c\right)\left(b+c\right).$$

Тук отново използваме, че $a+b+c=1$ и получаваме

$$8\left(a+b+c\right)\left(ab+bc+ac\right)\le 9\left(a+b\right)\left(a+c\right)\left(b+c\right)$$

$$a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b-6abc\ge 0$$

$$a\left(b-c\right)^2+b\left(c-a\right)^2+c\left(b-a\right)^2\ge 0.$$

А3. В триъгълник ABC ъглите при B и C са по 40° и BD е ъглополовяща. Докажете, че $BD+DA=BC$.

Решение. От $\sphericalangle BDC = 120^\circ$ следва $BD<BC$. Нека точка E от страната BC е такава, че $BD=BE$. Сега с ъгли доказваме, че $BD=BE$ и че $ABED$ е вписан. От равни дъги $AD=DE$. Резултатът следва.

А4. Даден е триъгълник ABC, в който $AB>AC$. Ъглополовящата на външния ъгъл при върха A пресича описаната около ΔABC окръжност в точка E. Нека $EF \perp AB, F \in AB$. Да се докаже, че $AF = \frac{1}{2}\left(AB - AC\right)$.

Решение. Нека $D \in BF$ е такава точка, че $AD=2DF$. Тогава $AE=ED$. Нека правата DE пресича за втори път окръжността в точка G, а върху правата CA да изберем точка P така, че A е между C и P. Имаме $\angle BGE = \angle BAE = \angle ADE = \angle BDG$. Оттук $BG=BD$. Освен това $\angle GEA = 180^\circ - 2\angle EAD = 180^\circ - \angle PAD = \angle BAC$. Това ни дава равенството на дъгите $\overset{\frown}{BC}$ и $\overset{\frown}{GA}$, а значи и на $\overset{\frown}{BG}$ и на $\overset{\frown}{CA}$. Оттук следва

$$AB - AC = AB - BG = AB - BD = AD = 2AF\ .$$

А5. Да се намерят всички прости числа $p, q, r,$ такива че $\frac{p}{q} - \frac{4}{r+1} = 1$.

Решение. Уравнението е равносилно с $(p-q)(r+1)=4q$. Оттук следва, че простите числа p и q са различни и ако d е общ делител на $p-q$ и q, той е делител и на p, следователно $d=1$. Така $p-q$ е равно на някое от числата 1, 2 или 4. От тези три случая получаваме за $(p;q;r)$ тройките $(3;2;7)$, $(5;3;5)$ и $(7;3;2)$.

А6. Намерете всички двойки цели числа x, y, за които

$$x^2\left(y+1\right) + y^2\left(x+1\right) = 11\ .$$

Решение. Записваме даденото уравнение във вида

$$x^2\left(y+1\right) + y^2\left(x+1\right) - 4 = 7 \Leftrightarrow xy\left(x+y\right) + \left(x+y\right)^2 - 2xy - 4 = 7 \Leftrightarrow$$
$$xy\left(x+y-2\right) + \left(x+y\right)^2 - 4 = 7 \Leftrightarrow \left(x+y-2\right)\left(xy+x+y+2\right) = 7\ .$$

Следователно са налице следните четири възможности:

1) $\left|\begin{array}{l} x+y-2=-7 \\ xy+x+y+2=-1 \end{array}\right.$. Оттук получаваме $\left|\begin{array}{l} x+y=-5 \\ xy=2 \end{array}\right.$, което е невъзможно за цели x, y.

2) $\left|\begin{array}{l} x+y-2=-1 \\ xy+x+y+2=-7 \end{array}\right.$. Оттук $\left|\begin{array}{l} x+y=1 \\ xy=-10 \end{array}\right.$, което също е невъзможно.

3) $\left|\begin{array}{l} x+y-2=1 \\ xy+x+y+2=7 \end{array}\right.$. Оттук $\left|\begin{array}{l} x+y=3 \\ xy=2 \end{array}\right.$, което дава решенията $(1;2)$ и $(2;1)$.

4) $\begin{vmatrix} x+y-2=7 \\ xy+x+y+2=1 \end{vmatrix}$. Оттук $\begin{vmatrix} x+y=9 \\ xy=-10 \end{vmatrix}$, което дава решенията $(10;-1)$ и $(-1;10)$.

Втори начин. Да означим $x+y=p$, $xy=q$, където p и q са цели числа. Можем да запишем даденото уравнение във вида $pq+p^2-2q=11$, откъдето $q(2-p)=p^2-11$. Следователно $p\neq 2$ е такова, че p^2-11 се дели на $p-2$ и понеже p^2-4 също се дели на $p-2$, то и разликата $(p^2-4)-(p^2-11)=7$ трябва да се дели на $p-2$. Ето защо числото $p-2$ е някой от делителите на числото 7, тоест $p-2=\pm 1; \pm 7$. Оттук за $(p;q)$ получаваме двойките $(-5;2)$, $(1;-10)$, $(3;2)$ и $(9;-10)$ и после продължаваме като по първия начин.

Трета идея, малко по-тромава, е да разгледаме даденото уравнение като квадратно относно една от променливите и да изследваме дискриминантата му.

А7. Дадени са 2018 точки на една права и една точка извън правата. Колко най-много могат да са равнобедрените триъгълници с върхове в тези точки?

Решение. Нека O е точката извън правата g и H е петàта на перпендикуляра от O към g. Равнобедрените триъгълници с основа върху g трябва да са симетрични относно OH, така че броят им е не повече от 1009. Равнобедрените триъгълници с основа OA извън g са с връх при сечението на OA с g, така че броят им е не повече от 2018. Така търсеният брой е не повече от 3027. За да го постигнем, по g подреждаме в този ред точки L_{2018}, L_{2017}, ..., L_2, L_1, R_1, R_2, ..., R_{2017}, R_{2018}, като триъгълник OL_1R_1 има ъгли 36°, 72°, 72°, $OL_2=L_2R_1$, $OR_2=R_2L_1$, $OL_i=L_iL_{i+1}$, $OR_i=R_iR_{i+1}$, $i=1, 2, \ldots, 2017$, така че всички OL_i, OR_i и L_iR_i са основи на равнобедрени триъгълници.

А8. Квадрат е разделен на 49 квадратчета и на всяко е поставен черен или бял шоколадов бонбон. Всяка сутрин Ники изяжда два еднакви бонбона от квадратчета, имащи обща страна или връх, ако това е възможно. Колко бонбона най-много може да си гарантира Ники, каквото и да е разположението им?

Решение. **Отг. 32** Ако черните бонбони са на нечетните места от нечетните редове, то нито един от тях не може да бъде изяден. От останалите 33 бонбона не можем да изядем повече от 32 заради четността. От квадрата можем да изрежем 8 правоъгълника 3×2, от всеки от тях по две г-тримина, а във всяко от тях винаги може да се изядат два едноцветни бонбона.

B1. За положителните числа a, b и c е известно, че

$$ab^2+c^3<bc^2+a^3<ca^2+b^3.$$

а) Кои две от числата могат да бъдат равни?

б) Ако дадените числа са различни, то кое от тях не може да е най-малкото?

Решение. а) Да проверим възможно ли е $a=c$. Тогава, след като вместо c в дадените неравенства запишем a, получаваме $ab^2+a^3<a^2b+a^3<a^3+b^3$, откъдето $ab^2<a^2b<b^3 \Rightarrow ab<a^2<b^2$, а това е невъзможно.

Сега да проверим дали е възможно $b=c$. След като заместим c с b в дадените неравенства, получаваме $ab^2+b^3<b^3+a^3<a^2b+b^3 \Rightarrow ab^2<a^3<a^2b \Rightarrow b^2<a^2<ab$, което отново е невъзможно.

Остана да проверим дали е възможно $a=b$. След замяната на b с a в дадените неравенства достигаме до $a^3+c^3<ac^2+a^3<a^2c+a^3 \Leftrightarrow c^3<ac^2<a^2c \Leftrightarrow c^2<ac<a^2$, което е вярно при $a>c$. Следователно единствената възможност някои от числата да са равни, е $a=b$.

б) Ще покажем, че не може най-малкото число да е b. Да предположим, че $b<a$ и $b<c$. Щом $bc^2+a^3<ca^2+b^3$, то $a^3-ca^2<b^3-bc^2=b\left(b^2-c^2\right)<0 \Rightarrow a^2\left(a-c\right)<0 \Rightarrow a<c$. Но тогава от $ab^2+c^3<ca^2+b^3$ получаваме, че $ab^2-b^3<a^2c-c^3$. Това неравенство обаче е невярно, понеже в лявата му страна числото е положително, а в дясната – отрицателно. Остава да се убедим, че всяко от числата а и c може да е най-малкото: това става например при $a=1$, $b=5$, $c=7$ и при $a=10$, $b=9$, $c=5$.

B2. Ако a, b, c са страни на триъгълник, докажете, че
$$\frac{a}{(b+c)(b+c-a)}+\frac{b}{(a+c)(a+c-b)}+\frac{c}{(a+b)(a+b-c)}\geq\frac{9}{2(a+b+c)}.$$
Кога се достига равенство?

Решение. След каноничното полагане $a=x+y$, $b=x+z$, $c=y+z$ за положителни x, y, z и фиксиране $x+y+z=3$ (умножавайки всяка променлива по дадено положително число) неравенството добива вида $\sum\frac{3-x}{(3+x)x}\geq\frac{3}{2}$.

При $x=y=z=1$ се достига равенство. Търсим неравенство от вида $\frac{3-x}{(3+x)x}\geq px+q$, което да е в сила за всяко $0<x<3$. То е еквивалентно на $3-x\geq(px+q)(3x+x^2)$ и оттам на $px^3+(3p+q)x^2+(3q+1)x-3\leq 0$. При $x=1$ има равенство, така че там уравнението трябва да има корен от четна кратност. Прилагаме схемата на Хорнер:

	p	$3p+q$	$3q+1$	-3
1	p	$4p+q$	$4q+4p+1$	$4q+4p-2=0$
1	p	$5p+q$	$5q+9p+1=0$	

и откриваме $p=-7/8$, $q=11/8$. Неравенството е сведено до $(x-1)^2(-7x-24)\leq 0$, което се изпълнява винаги щом $0<x<3$. Сумирайки за x, y, z, получаваме желаното.

B3. Върху страните AB и BC на триъгълника ABC, външно за триъгълника, са построени правоъгълните триъгълници $ABD(\angle ADB = 90^\circ)$ и $BCE(\angle BEC = 90^\circ)$. Да се докаже, че $AB + BC + CA \geq 2DE$.

Решение. Да построим медианите DF и EG на двата правоъгълни триъгълника. Тогава FG е средна отсечка в ΔABC. Неравенството $DF + FG + GE \geq DE$ можем тогава да запишем във вида $\frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}BC \geq DE$, откъдето следва исканото в задачата.

B4. Даден е изпъкналият четириъгълник $ABCD$, в който $\angle ABC = 90^\circ$ и $\angle BAD = \angle ADC = 80^\circ$. Върху страните BC и AD на четириъгълника са взети съответно точките N и M така, че $\angle CDN = \angle ABM = 20^\circ$. Намерете $\angle MNB$, ако е известно, че $MD = AB$.

Решение. Понеже ΔAMB е равнобедрен, то $AB=MB$. Но $AB=MD$, следователно $MB=MD$, което означава, че $\angle MBD = \angle MDB = 40^\circ$. Тогава $\angle BDN = 20^\circ$. Да построим равностранния ΔBDP така, че A и P да са в различни полуравнини относно правата BD. Понеже $\angle DBC = 30^\circ$, то правата BC е симетралата на отсечката DP, което означава, че $DN=PN$. От $\angle NDP = \angle BDP - \angle BDN = 40^\circ$ следва $\Delta BDM \cong \Delta PDN$ по втори признак. От еднаквостта имаме $ND=MD$, тоест ΔMND е равностранен. Ето защо $MN=MD=AB=MB$, а това показва, че ΔBNM е равнобедрен. Оттук $\angle MNB = 70^\circ$.

B5. Даден е ΔADC със страна $AC = 1$ и окръжности $k_1(A)$ и $k_2(C)$, които се пресичат в точка D. Произволна права през D пресича за втори път окръжностите съответно в точките M и N.

а) Докажете, че симетралите на отсечките MN имат обща точка.

б) Определете най-голямата възможна дължина на отсечката MN.

Решение. Имаме: а) Ако DA_1 и DC_1 са диаметри съответно на k_1 и k_2, то точките M, N, A_1 и C_1 са върхове на трапец (евентуално изроден) с основи MA_1 и NC_1, перпендикулярни на MN (а тя е бедро или диагонал на трапеца). Тогава симетралата MN съдържа средната основа на трапеца, така че минава през постоянната среда на A_1C_1.

б) Ако изберем правата $MN \parallel AC$, то полученият трапец е правоъгълник (евентуално изроден) и $MN = A_1C_1 = 2AC = 2$ (AC е средна отсечка). Във всички останали случаи дължината на MN е по-малка, понеже е перпендикуляр, а $A_1C_1=2$ е наклонена.

Забележка. Търсената в а) постоянна точка е като четвъртия връх на успоредник $ABCD$ с диагонал AC. Това е така, понеже $\Delta ABM \cong \Delta CNB$ по първи признак ($AB = CD = CN$; $AM = AD = CB$; $\sphericalangle BAM = \sphericalangle NCB$ поради

$\sphericalangle CMD = \sphericalangle CDM$, $\sphericalangle CND = \sphericalangle CDN$ и съответните ъгли при правите на успоредника; има няколко случая.

B6. Естествените числа x, y и k са такива, че $x(x+1)(x+2) = y^k$. Да се докаже, че $k=1$.

Решение. От равенството $(x+1)^2 - x(x+2) = 1$ следва, че числата $x+1$ и $x(x+2)$ са взаимно прости и тогава $x+1 = u^k$ и $x(x+2) = z^k$ за подходящи естествени u, z. Но тогава $u^{2k} - z^k = 1$, което е невъзможно при $k>1$, защото

$$u^2 \geq z+1 \Rightarrow u^{2k} > (z+1)z^{k-1} = z^k + z^{k-1} \geq z^k + 1.$$

B7 Да се намерят всички тройки цели числа x, y, z, за които $x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y) = 2$.

Решение. Уравнението е равносилно на $(y-z)(x-z)(x-y)=2$. Сборът на първия и третия множител е равен на втория, така че са възможни само три разлагания: $2=1.2.1=(-2).(-1).1=1.(-1).(-2)$. Съответно получаваме отговорите $(k+1;k;k-1)$, $(k-1;k+1;k)$ и $(k;k-1;k+1)$ за всяко цяло k.

B8. На състезание по математика с 4 задачи се явили 7 деца. За всяка двойка задачи има дете, решило само тях. По колко различни начина може да се случи това?

Решение. Двойките задачи са $4.3:2=6$, а децата са 7. Има два случая:

– Ако някое дете е решило 0, 1, 3 или 4 задачи, то има 7 варианта кое да е това дете и 1+4+4+1=10 варианта какво да е решило. За останалите 6 деца има 6! начина за разпределяне кой коя двойка задачи да реши.

– Ако всяко дете е решило по 2 задачи, то има 6 варианта коя двойка задачи да е решена от две деца и $7.6:2=21$ начина кои две деца да са я решили. За останалите 5 деца има 5! начина за разпределяне кой коя друга двойка задачи да реши.

Общо начините са 70.6! + 21.6! = 91.720 = 65520.

B9. В квадратна таблица 5×5 отначало всички полета са празни, като едно от тях е оцветено. Двама играчи, X и O, правят ходове, редувайки се. Който е на ход, поставя името си в незаето поле на таблицата, съседно (по страна или връх) на последното заето поле. Пръв е X, като при първия си ход може да играе в произволно неоцветено поле. Ако някой не може да играе, играта приключва с победа на другия. Ако някой постави знака си в оцветеното поле, той печели и играта приключва. Кой ще спечели при правилна игра? (Отговорът може да зависи от позицията на оцветеното поле.)

Решение. Полетата, съседни на оцветеното, както и самото него, ще наричаме опасни. Ако някой играе в опасно неоцветено поле, той ще загуби играта при следващия си ход.

Ако оцветеното поле има обща точка с контура на таблицата, то опасните полета са 4 или 6. Останалите полета могат да се разбият на двойки съседни полета и едно отделно поле (покажете как!). Тогава X ще победи, ако с първия си ход играе в отделното поле, и после следва тактиката: ако O играе в неопасно поле то X играе в другото поле от двойката му (така X винаги има възможен ход); ако O играе в опасно поле (то задължително е неоцветено), то X играе в оцветеното поле и побеждава.

Ако оцветеното поле няма обща точка с контура на таблицата, то опасните полета са 9. Останалите 16 полета могат да се разбият на двойки съседни (евентуално по диагонал – покажете как!). Тогава O ще победи, ако следва тактиката: ако X играе в неопасно поле, то O играе в другото поле от двойката му (така O винаги има възможен ход); ако X играе в опасно поле (то задължително е неоцветено), то O играе в оцветеното поле и побеждава.

B0. Какъв е най-големият възможен брой остри ъгли в n-ъгълник (не непременно изпъкнал)?

Решение. Нека k е броят на острите ъгли. Тогава сборът от ъглите на многоъгълника е $(n-2)180^\circ > k.90^\circ+(n-k)360^\circ$, откъдето $2n-4<k+4n-4k$ и $3k\leq 2n+3$. Окончателно $k\leq\left\lfloor\frac{2n}{3}\right\rfloor+1$. Остава да се построят примери, показващи, че дадената оценка е точна. Направете това самостоятелно: може да разгледате три вида конструкции в зависимост от остатъка на n при деление с 3.

Състезателната тема: МлБОМ, 11.09.2020

Задача 1. Намерете всички тройки (a,b,c) от реални числа, изпълняващи системата от уравнения $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ и $a^2+b^2+c^2=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\cdot$

Задача 2. Нека $\triangle ABC$ е правоъгълен триъгълник с $\angle BAC=90^\circ$ и E е петата на перпендикуляра от A към BC. Нека $Z\neq A$ е точка на правата AB, за която $AB=BZ$. Нека (c) е описаната окръжност за $\triangle AEZ$. Нека D е втората пресечна точка на (c) с ZC и нека F е диаметрално противоположната на D точка относно (c). Нека P е пресечната точка на правите FE и CZ. Ако допирателната към (c) в Z пресича PA в T, докажете, че точките T,E,B,Z лежат на една окръжност.

Задача 3. Алиса и Боби играят следната игра: Алиса избира множество $A=\{1,2,\dots,n\}$ за някое естествено $n\geqslant 2$. След това, започвайки с Боби, двамата се редуват да избират число от A по следните правила: първоначално Боби избира някое от числата, а всяко следващо избрано число трябва да е различно от всички вече избрани и да се различава с 1 от някое от тях. Играта приключва, когато всички числа от A са избрани. Алиса печели, ако сборът от избраните от нея числа е съставно число. Иначе печели Боби. Определете кой играч има печеливша стратегия.

Задача 4. Намерете всички прости числа p и q, за които $1+\dfrac{p^q-q^p}{p+q}$ е просто число.

Решения

Задача 1. Ако $(a;b;c)$ е решение на системата, то такова е и $(-a;-b;-c)$, така че без ограничение на общността $abc>0$. От първото условие имаме

$$abc(a+b+c)=ab+bc+ca \qquad (1)$$

От двете условия получаваме

$$(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2-\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right),$$

$$abc(ab+bc+ca)=a+b+c. \qquad (2)$$

Ще се уверим, че $a+b+c$ и $ab+bc+ca$ са различни от 0. Наистина, иначе от (1) или (2) би следвало $a+b+c=ab+bc+ca=0$, а от тях – и абсурдът $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=0$.

Сега от (1) и (2) следва $(abc)^2=1$ и по силата на $abc>0$ получаваме $abc=1$, което с (1) води до $a+b+c=ab+bc+ca$; да означим тази стойност с s. Според Формулите на Виет за полинома x^3-sx^2+sx-1, някое от a, b, c трябва да е равно на 1. Ако например $a=1$, то от (1) следва $bc=1$ и директно се уверяваме, че тройката $(a;b;c)=(1;t;t^{-1})$ е решение за всяко реално $t\neq 0$. Отчитайки направените допускания, окончателно множеството от решения се състои от тройките $(1;t;t^{-1})$, $(-1;t;t^{-1})$ и всички техни пермутации за всяко реално $t\neq 0$.

Задача 2. Първо ще докажем, че PA е допирателна на **(**c**)**. Тъй като E, D, Z, A лежат на една окръжност, имаме $\angle EDC=\angle EAZ=\angle EAB$. Също така $\angle EAB=\angle BCA$, откъдето $\angle EDC=\angle BCA$.

От $\angle FED=90°$ следва $\angle PED=90°$ и $\angle EPD=90°-\angle EDC=90°-\angle BCA=\angle EAC$.

Следователно точките E, A, C, P са на една окръжност и $\angle CPA=90°$. В правоъгълния триъгълник AZP имаме $PB=AB=BZ$ и $\angle ZPB=\angle PZB$. Освен това $\angle EPD=\angle EAC=\angle CBA=\angle EBA$, така че и точките P, E, B, Z са на една окръжност.

Сега $\angle PAE=\angle PCE=\angle ZPB-\angle PBE=\angle PZB-\angle PZE=\angle EZB$, т.е. PA е допирателна на **(**c**)**.

Сега $TA=TZ$, така че $\angle PTZ= \;=180°-2\angle TAB=180°-2(\angle PAE+\angle EAB)$ $=180°-2(\angle ECP+\angle ACB)=180°-2(90°-\angle PZB)=2\angle PZB=\angle PBA$.

Така *T, P, B, Z* лежат на една окръжност и *P, E, B, Z* лежат на една окръжност, така че и *T, E, B, Z* лежат на една окръжност.

Задача 3. Алиса ще спечели например при следната стратегия: отначало избира $n=8$ и отговаря на ходовете на Боби според долния списък (в осемцифрените кодове изборите на Боби и Алиса се редуват, започвайки с ход на Боби): 12345678, 23145678, 23415678, 32145678, 32451678, 32456178, 45362178, 45367821, 45673218, 45673281, 45678321, 54321678, 54326718, 54326781, 54632178, 54637821, 67543821, 67548321, 67854321, 76854321, 76584321, 87654321. Във всички случаи сборът на Алиса е 15, 21 или четно число, по-голямо от 2, така че тя печели.

Задача 4. Явно $p\neq q$. Полагаме $1+(p^q-q^p):(p+q)=r$. Имаме

$$p^q-q^p=(r-1)(p+q). \qquad (3)$$

От малката теорема на Ферма $p^q-q^p\equiv -q \pmod p$.

От $(r-1)(p+q)\equiv -rq-q \pmod p$ и (3) следва $rq\equiv 0 \pmod p \Rightarrow p\,|\,qr \Rightarrow p\,|\,r \Rightarrow p=r$. Така (3) добива вида

$$p^q-q^p=(p-1)(p+q). \qquad (4)$$

Ако $p=2$, то (4) води до $2^q=q^2+q+2$. По индукция за $n\geq 6$ лесно следва, че $2^n>n^2+n+2$. Следователно $q\leq 5$ и директната проверка дава само $q=5$. Получаваме решение $(p;q)=(2;5)$. Ако p е нечетно, от МТФ $p^q-q^p\equiv p \pmod q$. От $(p-1)(p+q)\equiv p(p-1) \pmod q \Rightarrow p(p-2)\equiv 0 \pmod q \Rightarrow q\,|\,p(p-2) \Rightarrow q\,|\,p-2 \Rightarrow q\leq p-2<p$. От (4) имаме $p^q-q^p\equiv 0 \pmod{p-1} \Rightarrow q^p\equiv 1 \pmod{p-1}$. Явно

НОД $(q;p-1)=1$ и ако k е показателят на q по модул $p-1$, то $k\,|\,p$ и $k<p$, така че $k=1$. Сега $q\equiv 1 \pmod{p-1} \Rightarrow p-1\,|\,q-1 \Rightarrow p-1\leq q-1 \Rightarrow p\leq q$: абсурд.

Темата беше добре балансирана. Първите две задачи съответстваха на първите две места в темата (без да се ангажираме с мнение дали в този ред) и същевременно състезателите имаше какво да помислят по тях. Задачата по комбинаторика беше леко необичайна и наистина резултатите на повечето отбори показаха, че е била неочаквана за доста от учениците. Това обаче едва ли е изненада, като се знае, че като цяло, МлБОМ често страда от недостиг на предложения по комбинаторика, но нашият отбор имаше опит от задачи със стратегии и от подготовката, и от селекционните контролни. Четвъртата задача е наистина сериозна трудност за учениците от тази възраст, предвид факта, че преди заключителната част на решението дори за ученици със състезателен опит е трудно да видят светлината в края на тунела. Тя става доста по-лека за преодоляване (остава само половината тунел и светлината се вижда лесно) за ученици, запознати с факта, че функцията $y = x^{\frac{1}{x}}$ е намаляваща за $x \geq e$. Доста от другите отбори, които може би са имали дълъг летен период без сериозни предизвикателства, явно бяха силно затруднени от предложената тема, но при нашия може би започналата отдалеч подготовка се противопостави на обичайния спад на нивото по време на лятната ваканция и спомогна за по-увереното му представяне. Всички наши участници спечелиха медали: два златни (най-силните две индивидуални постижения сред всичките 108 участници в МлБОМ, едното от които с максималния възможен резултат), три сребърни и един бронзов. Резултатите на българския отбор са следните:

Задача →	1	2	3	4	Сбор	Медал
Борис Цветанов Гачевски	10	10	10	10	**40**	златен
Марин Христов Христов	10	10	10	6	**36**	златен
Ясен Пламенов Пенчев	10	10	1	5	**26**	сребърен
Мария Николаева Дренчева	9	6	2	5	**22**	сребърен
Иван Тодоров Тагарев	4	10	1	5	**20**	сребърен
Антон Георгиев Бресковски	6	10	0	1	**17**	бронзов
БЪЛГАРИЯ	**49**	**56**	**24**	**32**	**161**	

В отборното класиране България зае първо място със 161 т., следвана от отбора на Румъния. Състезателите се справиха отлично и показаха, че идват сериозни попълнения за отборите ни при по-големите.

SELECTION AND PARTICIPATION OF THE TEAM OF BULGARIA IN THE XXIV JBMO 2020

Abstract. The article contained an overview of the selection and preparation of the team of Bulgaria in the Junior Balkan Mathematical Olympiad 2020, the contest itself and the presentation of the team. The included materials can be useful in the preparation for math competitions in the junior high school.

Keywords: math contests; JBMO; junior high school

✉ **Dr. Ivaylo Kortezov, Assoc. Prof.**
Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of Sciences
Acad. G. Bonchev St., Block 8
1113 Sofia, Bulgaria
E-mail: kortezov@math.bas.bg