*Математика и информатика* | Volume 64, Number 1, 2021 | *Mathematics and Informatics*

https://doi.org/10.53656/math2021-1-7-did

*Educational Issues*
*Въпроси на преподаването*

# ДИДАКТИЧЕСКИ МОДЕЛ ЗА СЪСТАВЯНЕ НА СИСТЕМА ОТ ЗАДАЧИ НА БАЗАТА НА ТЕХНОЛОГИЧНИЯ ПОДХОД

**[1)]Слави Кадиев, [2)]Юлия Нинова**
*[1)]Национална гимназия за древни езици и култури „Св. Константин Кирил Философ“*
*[2)]Софийски университет „Св. Климент Охридски“*

**Резюме.** В статията се разглежда модел на дидактическа технология за генериране на система от задачи. При конкретизиране на технологията са съблюдавани етапите на усвояване на знанията, етапите на проектиране на системата, описани в литературата, които частично са допълнени. Описани са структурата и компонентите на конкретна технология за съставяне на система от задачи за формиране на умения у учениците да решават ирационални уравнения с един радикал. Предложена е конкретна система от задачи.

*Ключови думи*: дидактическа система от задачи; дидактическа технология; ирационални уравнения с един радикал

## Същност на понятието система

В различните области на знанието в зависимост от обекта и целите на изследването изследователите използват различни описания на понятието **система**. Инвариантното в тези описания е, че **системата** се разглежда като множество от обекти и връзките между тях и взети заедно, те представляват едно цяло. Всеки елемент на системата действа като неразделим неин компонент. Една връзка може да се осъществи между два или повече обекта. Съвкупността от връзките в системата определя нейната структура. Освен структурно, обектите на системата са свързани и функционално. И двата вида връзки подчертават обособяването на подсистеми на различни нива.

От малкото написано за системите дотук ясно се открояват нейните най-важни характеристики, а именно:

– наличие на елементи, които съставляват системата;
– наличие на структура, която се определя от връзките между елементите;
– наличие на интегративни качества, т.е. качества, които дават основание да се разглеждат избраните елементи и отношения между тях като едно цяло;
– наличие на функционални характеристики на системата и нейните компоненти;

– наличие на комуникативните свойства на системата, проявени под формата на вътрешносистемни и междусистемни взаимодействия.

**Същност на понятието дидактическа система от задачи**

Възприемаме с някои изменения и допълнения описанието и характеристиките на понятието **дидактическа система от задачи**, поместено в сайта за понятия и термини[1)]. То е предложено от руския учен, доктор на педагогическите науки, В. В. Гузеев.

**Система от задачи** се нарича набор от задачи към група от уроци по определена тема от учебното съдържание, които отговарят на следните изисквания (критерии).

1. **Пълнота** – наличие на задачи за изучавани понятия (нови и някои стари).
2. **Наличие на „ключови задачи“**, т.е. на задачи, които са „ключове“ за решаването на други. Някои от тях могат да са *задачи-компоненти*.
3. **Последователност** – задачите да са подредени в определен ред, като системата започва с въвеждащи задачи и завършва с обобщаващи или с приложни задачи.
4. **Повишаване на трудността (сложността на решение на задачата** − б.а.) Задачите в системата се подреждат по принципа от просто към сложно.
5. **Целева ориентация** За всяка задача се определят място и цел в системата от задачи и нейните функции.
6. **Достатъчност** – броят на задачите трябва да бъде достатъчен (съобразен с известни психологически норми, емпирично установени) за постигане на целта, като има както задачи за работата в клас, така и за самостоятелната работа в клас или у дома.
7. **Психологически комфорт** – да се отчитат темпераментът, типът мислене, видът памет и възрастовите особености на учениците.

Когато системата от задачи е **дидактическа**, към посочените характеристики на системата трябва да се добавят още и следните изисквания.

– Системата трябва да бъде цялостна, т.е. тя трябва да съдържа предметно-съдържателни и дидактически връзки.
– Системата трябва да бъде дидактически завършена (да има функционална достатъчност), което означава, че системата трябва да дава възможност за изпълнение на стимулиращите, преподавателските, развиващите, възпитателните, оценяващите, прогностичните и комуникационните функции на задачите.
– Системата трябва да има предметна и съдържателна завършеност във връзка с изискванията за нивата на усвояване на знанията, изразена в наличие на задачи с различна степен на сложност на решението им.

**Конструиране на система от задачи**

Относно конструирането на системи от задачи възприемаме с малки изменения нивата на усвояване на математическите знания от учениците и начини на действие, описани от Н. А. Амосова и Г. Г. Краснова (Ammosova & Krasnova, 2015)[2)]. Те са следните.

**Начално (базово) ниво.** То е предназначено за формиране на основите на училищния курс по математика – за въвеждане на ново учебно съдържание, като се разкрива неговата същност; за въвеждане на понятия и разкриване на характеристичните им свойства; за запознаване с нова концепция, основаваща се на изучен материал и за проучване на неговите свойства, както и за уточняване на последователност от стъпки за бъдещо действие в теоретичен и операционален план.

**Основно (фундаментално) ниво.** Това ниво е предназначено за разкриване на видово-родовата (тя е двустранна) връзка на понятията, както и за изучаването и систематизирането на техни признаци и свойства. Освен това то е предназначено за разбирането на изучавания материал, като се извършват стандартни операции, които осигуряват осъзнатост и трайност на въведените знания, използват се познати методи за решаване на нови задачи и се запознават с нови методи.

**Творческото ниво** е последното ниво и е предназначено за прилагане на придобитите знания по математика в живота и в нестандартни ситуации, както и за използване на вътрешнопредметни и междупредметни връзки.

**Етапи на проектирането**

Относно проектирането на системата от задачи възприемаме с известни допълнения етапите, през които се преминава при създаване на система от задачи, описани от П. Асенова и М. Маринов (Asenova & Marinov, 2019)[3)]. Те са:

- – определяне на целта на системата от задачи;
- – определяне на резултатите, които се очаква да се постигнат чрез решаване на задачите от системата;
- – подсигуряване на условията за ползване на системата от задачи за постигането на очакваните резултатите;
- – осъществяване на подбор от задачи, отговарящи на нивата, през които преминава усвояването на математическите знания, описани от Н. Амосова и Г. Краснова (Ammosova & Krasnova, 2015)[2)].
- – осмисляне и описване на методическите похвати за използване на системата от задачи – организация, използвани методи, дидактически материали и средства за обучение.

**Частнопредметни технологии**

В научната литература се използват различни синоними на понятието **педагогическа технология**: *педагогическа техника*, *технология на обучението*, *технология на образованието*, *образователна технология*, *технология на учебния процес*, *технология на учебно-възпитателния процес*, *дидактическа технология, методическа технология*, *технология на възпитанието*, *възпитателна технология*, *технология за управление на образованието* и други. Някои от авторите предпочитат да говорят само за технологичен подход в обучението.

Възприемаме описанието на понятието **педагогическа технология**, предложено от М. Стефанова (Stefanova, 1999). Определя я като „*съвкупност от последователно и динамично редуване на конкретни цели, съдържание, процедури* (*методи*)*, средства* (*техники*)*, организационни форми, контролно-оценъчни механизми и критерии за сравнимост на цели и резултати*.".

Според класификацията на Г. К. Селевко (Selevko, 1998)[4)] **частнопредметните** технологии са един от видовете педагогически технологии, получени според критерия **характер на съдържанието и структурата**.

**Технология за генериране на ирационални уравнения от вида $\sqrt{ax+b}=cx+d$, $a\neq 0$, $c\neq 0$ с целочислени коефициенти и целочислени корени**

**Същност на технологията**

Теоретичните основи на разглежданата технология се опират на резултатите на П. В. Семенов, описани в статията му „Как составлять уравнения $\sqrt{ax+b}=cx+d$", публикувана в списанието „Математика в школе" (Semenov, 2000).

Нека е дадено ирационалното уравнение $\sqrt{ax+b}=cx+d$, $a\neq 0$, $c\neq 0$. (1) След еквивалентни преобразования се достига до квадратното уравнение-следствие $c^2x^2+\left(2cd-a\right)x+d^2-b=0$ .(2)

Авторът обосновава верността на следните две твърдения.

**Теорема 1.** Квадратното уравнение (2), до което се свежда уравнение (1), няма решение тогава и само тогава, когато $b<\frac{ad}{c}-\left(\frac{a}{2c}\right)^2$.

**Теорема 2.** За всеки четири цели числа *c, d,* $x_1$ и $x_2$ определяме целите числа $a$ и $b$ по следните формули: $a=2cd+c^2\left(x_1+x_2\right)$ и $b=d^2-c^2x_1x_2$. Тогава:

а) решенията на уравнение (1) са от множеството $\left\{x_1;x_2\right\}$ ;

б) числата $x_1$ и $x_2$ са от дефиниционното множество на уравнение (1);

в) числото $x_i$ $\left(i=1;2\right)$ е решение на уравнение (1), ако числото $cx_i+d$ е неотрицателно.

*Забележка*. Ако коефициентът $b$ се замени с $d^2$ или с $-d^2$, то разглежданото уравнение добива вида $\sqrt{ax+d^2}=cx+d$ или вида $\sqrt{ax-d^2}=cx+d$ .

Това са двата случая, при които един от предварително избраните корени е 0. Освен това за първото уравнение числото 0 е решение, а за второто – не е решение.

С помощта на тези теореми може да се съставят уравнения от вида (1) с целочислени коефициенти, за които уравнение (2) има предварително определени два различни цели корени или двукратен корен, или няма реални корени и освен това уравнение (1) има съответно същите две решения или точно едно решение, или изобщо да няма решение.

За генерирането на задачите се използва разглежданата теоретична основа, защото тя дава възможност предварително да фиксираме част от коефициентите и корените на ирационалното уравнение, предварително да определим броя на решенията на даденото ирационално уравнение, предварително за определим и фиксираме кои знания и умения ще се поддържат с решаване на съответните уравнения и не на последно място, целочислените коефициенти и корени на ирационалните уравнения улесняват пресмятанията.

**Компоненти на технологията**

При определяне на компоненти на технологията са съблюдавани видът на уравнение (2), броят на корените на уравнение (2) и броят на корените на уравнение (1) .

Различните комбинации от посочените условия определят значителен брой компоненти в технологията, за да могат да се постигнат целите − формиране на умения за решаване на уравнения от посочения вид и поддържане на стари знания и умения, свързани с решаване на пълни и непълни квадратни уравнения и прилагане на формули за съкратено умножение.

**1. − 3.** Избираме целите числа $c, d, x_1$ и $x_2$, така че уравнението (2) да е пълно квадратно уравнение, да има два реални корена и те да са корени на уравнението (1), или точно един от тях да е корен на уравнението (1), или нито един от тях да не е корен на даденото уравнение.

**4. − 5.** Избираме целите числа $c, d, x_1$ и $x_2$, така че уравнението (2) да е пълно квадратно уравнение, да има двукратен реален корен и той да е корен и на уравнението (1) или да не е корен на даденото уравнение.

**6.** Избираме целите числа $c, d, x_1$ и $x_2$, така че уравнението (2) да е пълно квадратно уравнение и да няма реални корени.

**7. − 9.** Избираме целите числа $c, d, x_1$ и $x_2$, така че уравнението (2) да е непълно квадратно уравнение от вида $px^2+qx=0$ $\left(p\in\mathbb{Z}\setminus\{0\};\ q\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\right)$, да има два реални корена и те да са корени на уравнението (1), или точно един от тях да е корен на уравнението (1), или нито един от тях да не е корен на даденото уравнение.

**10. − 12.** Избираме целите числа $c$, $d$, $x_1$ и $x_2$, така че уравнението (2) да е непълно квадратно уравнение от вида $px^2 + r = 0$ $\left(p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\};\ r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right)$, да има два реални корена и те да са корени на уравнението (1), или точно един от тях да е корен на уравнението (1) или нито един от тях да не е корен на даденото уравнение.

**13.** Избираме целите числа $c$, $d$, $x_1$ и $x_2$, така че уравнението (2) да е непълно квадратно уравнение от вида $px^2 + r = 0$ $\left(p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\};\ r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right)$ и да няма реални корени.

**14. − 15.** Избираме целите числа $c$, $d$, $x_1$ и $x_2$, така че уравнението (2) да е непълно квадратно уравнение от вида $px^2 = 0$ $\left(p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right)$, да има двукратен реален корен и той да е корен и на уравнението (1) или да не е корен на даденото уравнение.

**Дидактическа система от задачи за формиране на умения за решаване на ирационални уравнения от вида $\sqrt{ax+b} = cx+d$, $a \neq 0$, $c \neq 0$**

1. Да се реши уравнението $\sqrt{-8x+1} = -x+2$.

На базата на решението на това уравнение пред учениците се разкрива алгоритъмът за решаване на посочения тип уравнения по метода на нееквивалентните преобразувания.

След това за упражнение се предлага набор от задачи. От генерираните 36 задачи за работа в клас са избрани задачите 1., 5., 8., 10., 12., 13., 15., 20., 21., 23., 26., 27., 29., 31., 33. и 35. Останалите задачи са допълнителни и учителят може да ги използва по своя преценка, но целта им е същата – формиране на умения за решаване на ирационални уравнения с един радикал от вида $\sqrt{ax+b} = cx+d$, $a \neq 0$, $c \neq 0$ по метода на нееквивалентните преобразувания.

Да се решат ирационалните уравнения:

| | | |
|---|---|---|
| 2. $\sqrt{6x+12} = x+2$ | 13. $\sqrt{3x-2} = x+1$ | 24. $\sqrt{2x+2} = x+1$ |
| 3. $\sqrt{24x+1} = 2x+3$ | 14. $\sqrt{3x+1} = x+2$ | 25. $\sqrt{4x+13} = -x-2$ |
| 4. $\sqrt{-3x+19} = -x+3$ | 15. $\sqrt{-8x+1} = -2x+1$ | 26. $\sqrt{-2x+10} = x-1$ |
| 5. $\sqrt{-x+10} = x+2$ | 16. $\sqrt{8x+9} = x+3$ | 27. $\sqrt{4x+5} = -x-2$ |
| 6. $\sqrt{5x+14} = -x-4$ | 17. $\sqrt{-4x+1} = -2x-1$ | 28. $\sqrt{6x+13} = -x-3$ |

7. $\sqrt{-5x+6}=x-2$
8. $\sqrt{3x-5}=-x+1$
9. $\sqrt{-6x+3}=-x+2$
10. $\sqrt{2x-3}=x-1$
11. $\sqrt{-12x-15}=2x+1$
12. $\sqrt{2x-5}=-x+2$
18. $\sqrt{-8x+1}=2x+1$
19. $\sqrt{-2x+9}=-x+3$
20. $\sqrt{3x+1}=x-1$
21. $\sqrt{-6x+1}=x-1$
22. $\sqrt{7x+1}=-x-1$
23. $\sqrt{4x+8}=x+2$
29. $\sqrt{4x+1}=x+2$
30. $\sqrt{6x+1}=x+3$
31. $\sqrt{2x+1}=x+1$
32. $\sqrt{4x+1}=2x+1$
33. $\sqrt{-2x+1}=x-1$
34. $\sqrt{-6x+1}=3x-1$
35. Намислих число, умножих го по $(-2)$ и полученото произведение събрах с $3$. Новото число коренувах и получих противоположното число на намисленото число. Кое е намисленото число?
36. Лицето на квадрат е равно на $(3x+10)$ cm$^2$. Намерете дължината на страната на квадрата в сантиметри, ако тя е равна на стойността на израза $(x+2)$.

**Методически бележки към дидактическата система от задачи**

Системата от задачи е генерирана на базата на общия метод за решаване на ирационални уравнения и на базата на общия метод за съставяне на ирационални уравнения от вида $\sqrt{ax+b}=cx+d$, $a\neq 0$, $c\neq 0$ с целочислени коефициенти и целочислени корени, описани **в технологията за генериране на ирационални уравнения от разглеждания вид.**

При проектирането на тази система от задачи се преминава през трите нива на усвояване на знанията от учениците и адекватните им дейности, описани от Н. Амосова и Г. Краснова (Ammosova & Krasnova, 2015)[2)].

**Начално (базово) ниво.** На това ниво учителят определя новото знание за учениците. В случая това е методът на нееквивалентните преобразувания за решаване на ирационални уравнения с един радикал.

**Основно (фундаментално) ниво.** На това ниво учениците трябва да извършват стандартни операции, които осигуряват съзнателно и трайно усвояване на новото знание. В случая на това ниво у учениците трябва да се формират умения да решават този вид уравнения по посочения метод, а също така да се осигури управляемо и целенасочено поддържане на стари знания.

За целта учителят трябва да състави система от съзнателно и целенасочено подбрани примери на ирационални уравнения с един радикал, така че да може да осигури постигането на очакваните резултати.

**Творческо ниво.** То е предназначено за прилагане на знанията за ирационални уравнения в нестандартни ситуации. За целта като последни примери от системата се предлагат две задачи, които се решават чрез моделиране с ирационални уравнения с един радикал.

При проектирането на системата от задачи са спазени изискванията, описани в **Етапи на проектирането.**.

**Целта** е създаване на дидактическа система от ирационалните уравнения с един радикал от вида $\sqrt{ax+b}=cx+d$ , $a\neq 0$ , $c\neq 0$ с целочислени коефициенти и целочислени корени.

**Очакваният резултат** е формирането на уравнения за решаване на ирационални умения от вида $\sqrt{ax+b}=cx+d$ , $a\neq 0$ , $c\neq 0$ с целочислени коефициенти и целочислени корени по метода на нееквивалентните преобразувания и поддържане на стари знания (решаване на пълни и непълни квадратни уравнения, прилагане на формули за съкратено умножение).

**Условията за ползване на системата** се осигуряват чрез извеждане на алгоритъма за решаване на ирационални уравнения с един радикал, а **условията за постигането на очаквания резултат се осигуряват с** прилагането на този алгоритъм при решаване на целенасочено генерираните задачи от системата.

В системата от задачи са включени **различни типове задачи**. *Таблица* 1, поместена в *Приложение* 1, е част от цялостна таблица, която разкрива тяхната сравнителна характеристика. В *Таблица* 1 е посочено кои от тези уравнения са подбрани в системата от задачи за упражнение с учениците. В *Приложение* 2 е поместена част от цялостната *Таблица* 2, която илюстрира технологията за генериране на примерите от системата. Генерирани са 34 ирационални уравнения от посочения вид, като са изчерпани всички възможности за зависимостта на вида и броя на корените на даденото ирационално уравнение (1) и тези на уравнението-следствие (2). Големият брой задачи дава възможност на учителя да генерира оптимални подсистеми от задачи съобразно целите и условията, в които ги използва. Тези подсистеми са „еквивалентни“, от една страна, от теоретическа гледна точка, а от друга – осигуряват еднакви по сложност и структура на решение задачи. От тези 34 задачи 15 са включени в системата от задачи за ученика. Сравнителната характеристика на последните две задачи от системата е поместена в *Таблица* 3.

Задачите в системата са подредени в **определен ред**. Започва се с решаване на ирационални уравнения от посочения вид, при които уравнението следствие е пълно квадратно уравнение. След това се решават ирационални уравнения от посочения вид, при които уравнението следствие е непълно квадратно уравнение. Освен това при съставяне на системата от задачи целенасочено е проследена зависимостта за вида и броя на корените на даденото ирационално уравнение и тези на уравнението-следствие. Накрая се решават задачи за моделиране.

Като **средство** за автоматично пресмятане на коефициентите $a$ и $b$ на уравнението $\sqrt{ax+b}=cx+d$ и проверката на корените му е създадена електронна таблица чрез *Microsoft Excel* (виж *Приложение* 4). Тя е изключително полезна за учителя, който ще съставя система от задачи чрез тази технология.

**Методи/дейности**, които могат да се използват/извършват при реализиране на системата, са следните.

– Върху първата задача от дадената система задачи *учителят запознава учениците с метода* на нееквивалентните преобразувания за решаване на ирационални уравнения с един радикал. В този случай функцията на тази задача е общо обучаваща.

– *Извършване на упражнения* за прилагане и усвояване на алгоритъма за решаване на ирационални уравнения по метода на нееквивалентните преобразувания. За целта се използват следващите задачи от системата, като в този случай доминиращата им функция е специфична или конкретно обучаваща. Останалите задачи от системата могат да се използват за контрол на знанията на учениците, т.е. да се реализират контролните им функции. Това трябва да стане в аналогична среда на средата, в която учениците са обучавани. Затова идейно и структурно тези задачи не се различават от задачите, които са определени за работа в клас. Това се осигурява от самата технология.

– *Управляемо* осъществяване на *поддържане* на стари знания или умения.

*Коментар към задачи* 35. *и* 36. Дейностите, които се извършват при решаване на последните две задача от системата, имат творчески характер. При решаването на тези задачи се изисква моделиране с ирационални уравнения с един радикал. Задачите са подбрани така, че ирационалните уравненията, с които се моделират ситуациите, отговарят на теоретичните основи на описаната технология. В *Таблица* 3 (виж *Приложение* 3) е описан начинът за генерирането на тези уравнения.

Ако ученик среща трудност при решаването на ирационалните уравнения с един радикал, то учителят трябва да диагностицира причината за затрудненията. Ако това е някакво междинно знание/умение (например неправилно прилагане на формула за съкратено умножение или друго знание/умение, необходимо за реализирането на този алгоритъм), то това знание трябва да се актуализира или съответното умение да се упражни с един или повече примери. Ако затруднението е в запомняне на алгоритъма, то той трябва да се припомни отново. Това може да стане чисто формално или като материална опора отново да се използва решения пример 1.

*Легенда към таблица* 1

Уравнението (1) е от вида $\sqrt{ax+b}=cx+d$, а уравнението (2) е неговото уравнение-следствие $c^2x^2+\left(2cd-a\right)x+d^2-b=0$.

Видът на уравнение (2) може да бъде:

I. пълно квадратно уравнение;

II. непълно квадратно уравнение от вида $px^2+qx=0$, $\left(p\in\mathbb{Z}\setminus\{0\};\ q\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\right)$;

III. непълно квадратно уравнение от вида $px^2 + r = 0$, $\left(p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\};\ r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right)$;

IV. непълно квадратно уравнение от вида $px^2 = 0$, $\left(p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right)$.

Задачите, които са включени в системата от задачи за ученика, са означени със символа $(*)$. Останалите примери са допълнителни и са предназначени за ползване от учителя целесъобразно нуждите на неговите ученици. Тези задачи са означени със символа $(**)$.

Компонентите на технологията в *Таблица* 2 са записани във вида #.), където # е съответният номер на компонента от технологията, описана в теоретичната част в **Компоненти на технологията**. Това се налага за разграничаване на номера на компонентите на технологията от номера на задачите в *Таблица* 2.

**Заключение**

Според Г. К. Селевко (Selevko, 1998)[4)] анализът на *педагогическа технология* предполага разглеждането ѝ в три аспекта.

**Научен.** Този аспект се отнася до описание на теоретичните и/или психологически основи на съответната дидактическа технология. Доказаните две твърдения от П. В. Семенов (Semenov, 2000) в случая са теоретичните основи на разглежданата дидактическа технология.

**Процесуално-описателен.** Този аспект се отнася до описание на процеса, целите, съдържанието, методите, средствата и дидактическите материали за постигане на очакваните резултати. Те са формулирани и конкретизирани. Системата от задачи е конструирана върху технология, за която са описани структурата и компоненти ѝ. За съставяне на дидактическите материали са посочени и използвани възможности на електронните таблици *Microsoft Excel*.

**Процесуално-действен.** Отнася се до осъществяване на технологическия процес, функционирането на всички личностни, инструментални, методологически и педагогически средства. Този аспект е реализиран чрез изработването на конкретна дидактическа система от задачи за ученика и за учителя и на методическото ръководство за учителя. В методическите бележки са дадените и препоръки за работа на учителя в случаи на затруднения на учениците на съответен етап.

С цел създаване на адекватен дидактически модел за съставяне на системи от задачи на базата на технологичния подход е необходимо систематизиране на описани в литературата дидактически технологии, анализирането им от гледна точка на набор от критерии или създаване на нови технологии и тяхното конкретизиране върху конкретно учебно съдържание.

**Благодарности**

Изследването е частично финансирано от проект № 80-10-199/28.04.2020 по Фонд „Научни изследвания“ към СУ „Св. Климент Охридски“.

**Приложения**

*Приложение* 1 – част от Таблица 1

| № по ред | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Компонент от технологията | 1.) | 1.) | 1.) | 2.) | 2.) |
| Вид на уравнение $(2)$ | I | I | I | I | I |
| Корени на уравнение $(2)$ | $x_1 < 0$ | $x_1 < 0$ | $x_1 > 0$ | $x_1 < 0$ | $x_1 < 0$ |
| | $x_2 < 0$ | $x_2 > 0$ | $x_2 > 0$ | $x_2 > 0$ | $x_2 > 0$ |
| | $x_1 \neq x_2$ | $x_1 < x_2$ | $x_1 \neq x_2$ | $x_1 < x_2$ | $x_1 < x_2$ |
| Корени на уравнение $(\ )$ | $x_1$ е корен | $x_1$ е корен | $x_1$ е корен | $x_1$ е корен | $x_1$ е „чужд“ корен |
| | $x_2$ е корен | $x_2$ е корен | $x_2$ е корен | $x_2$ е „чужд“ корен | $x_2$ е корен |
| Задача № в таблица 2 | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. |
| Задача за ученика или за учителя | $(*)$ | $(**)$ | $(**)$ | $(**)$ | $(*)$ |

*Приложение* 2 – част от Таблица 2

| Задача № | 1 | 2 |
|---|---|---|
| $c \in \mathbb{Z}$ ; $d \in \mathbb{Z}$ | $c = -1$ ; $d = 2$ | $c = 1$ ; $d = 2$ |
| $x_1 \in \mathbb{Z}$ ; $x_2 \in \mathbb{Z}$ | $x_1 = -3$ ; $x_2 = -1$ | $x_1 = -2$ ; $x_2 = 4$ |
| Знак на $cx_1 + d$ | $-1.(-3) + 2 = 5$<br>$5 > 0$ | $1.(-2) + 2 = 0$<br>$0 \quad 0$ |
| Знак на $cx_2 + d$ | $-1.(-1) + 2 = 3$<br>$3 > 0$ | $1.4 + 2 = 6$<br>$6 > 0$ |
| $a = 2cd + c^2\left(x_1 + x_2\right)$ | $a = 2.(-1).2 + (-1)^2.(-3 + (-1))$<br>$a = -4 + 1.(-4) = -8$ | $a = 2.1.2 + 1^2.(-2 + 4)$<br>$a = 4 + 1.2 = 6$ |
| $b = d^2 - c^2 x_1 x_2$ | $b = 2^2 - (-1)^2.(-3).(-1)$<br>$b = 4 - 1.3 = 1$ | $b = 2^2 - 1^2.(-2).4$<br>$b = 4 - 1.(-8) = 12$ |
| Уравнение, което съставяме | $\sqrt{-8x + 1} = -x + 2$ | $\sqrt{6x + 12} = x + 2$ |
| Уравнение, до което се свежда съставеното | $x^2 + 4x + 3 = 0$ | $x^2 - 2x - 8 = 0$ |
| Корени на съставеното уравнение | $x_1 = -3$ е корен<br>$x_2 = -1$ е корен | $x_1 = -2$ е корен<br>$x_2 = 4$ е корен |

*Приложение* 3 – Таблица 3

| Задача № | 35 | 36 |
|---|---|---|
| $c \in \mathbb{Z}$ ; $d \in \mathbb{Z}$ | $c = -1$ ; $d = 0$ | $c = 1$ ; $d = 2$ |
| $x_1 \in \mathbb{Z}$ ; $x_2 \in \mathbb{Z}$ | $x_1 = -3$ ; $x_2 = 1$ | $x_1 = -3$ ; $x_2 = 2$ |
| Знак на $cx_1 + d$ | $-1.(-3) + 0 = 3$ <br> $3 > 0$ | $1.(-3) + 2 = -1$ <br> $-1 < 0$ |
| Знак на $cx_2 + d$ | $-1.1 + 0 = -1$ <br> $-1 < 0$ | $1.2 + 2 = 4$ <br> $4 > 0$ |
| $a = 2cd + c^2 \left(x_1 + x_2\right)$ | $a = 2.(-1).0 + (-1)^2.(-3+1)$ <br> $a = 0 + 1.(-2) = -2$ | $a = 2.1.2 + 1^2.(-3+2)$ <br> $a = 4 + 1.(-1) = 3$ |
| $b = d^2 - c^2 x_1 x_2$ | $b = 0^2 - (-1)^2.(-3).1$ <br> $b = 0 + 1.3 = 3$ | $b = 2^2 - 1^2.(-3).2$ <br> $b = 4 - 1.(-6) = 10$ |
| Уравнение, <br> което съставяме | $\sqrt{-2x+3} = -x$ | $\sqrt{3x+10} = x + 2$ |
| Уравнение, <br> до което се свежда <br> съставеното | $x^2 + 2x - 3 = 0$ | $x^2 + x - 6 = 0$ |
| Корени <br> на съставеното <br> уравнение | $x_1 = -3$ е корен <br> $x_2 = 1$ е „чужд“ корен | $x_1 = -3$ е „чужд“ корен <br> $x_2 = 2$ е корен |

*Приложение 4* – Средство за създаване на уравнения от посочения вид с помощта на двете теореми: IrrationalEquetion.xlsx.

**БЕЛЕЖКИ**

1. Сайт за понятия и термини: https://bit.ly/30KnHmt.
2. https://research-journal.org/pedagogy/konstruirovanie-sistemy-zadach-po-algebre-i-nachalam-matematicheskogo-analiza-v-sootvetstvii-s-etapami-usvoeniya-uchashhimisya-znanij.
3. https://azbuki.bg/wpcontent/uploads/2019/03/azbuki.bg_dmdocuments_Math_Info_1_19_Asenova_Marinov.pdf.
4. https://may.alleng.org/d/ped/ped021.htm.

**ЛИТЕРАТУРА**

Аммосова, Н. А., & Краснова, Г. Г. (2015). Конструирование системы задач по алгебре и началам математического анализа в соответствии с этапами усвоения учащимися знаний. *Международный научно-исследовательский журнал* (№ 3, част 4), стр. 25 – 27.

Асенова, П., & Маринов, М. (2019). Система от задачи в обучението по математика. *Математика и информатика*, стр. 53 – 71.

Селевко, Г. К. (1998). *Современные образовательные технологии*. М.: Народное образование.

Семенов, П. В. (2000). Как составлять уравнения $\sqrt{ax+b}=cx+d$, *Математика в школе* (№ 10), стр. 18 – 19.

Стефанова, М. (1999). *Дидактическо общуване.* София: Булвест 2000.

**REFERENCES**

Ammosova, N. A., & Krasnova, G. G. (2015) Konstruirovanie sistemi zadach po *algebre i nachalam matematicheskova analiza v sootvetstvii s etapami usvoeniya uchashtimisa znaniy*, *Mezdunarodniy nauchno-issledovatelskiy zurnal* (№ 3, chast 4), 25 – 27.

Asenova, P., & Marinov, M. (2019). *Sistema ot zadachi v obuchenieto po matematika*. Matematika i informatika, 53 – 71.

Selevko, G. K. (1998). *Sovremennie obrazovatelnie tehnologii*, M.: Narodnoe obrazovanie.

Semenov, П. В. (2000). Kak sostavlyat uravnenya $\sqrt{ax+b}=cx+d$, *Matematika v shkole* (№ 10), 18 – 19.

Stefanova, M. (1999). *Didaktichesko obshtuvane.* Sofia: Bulvest 2000.

# DIDACTIC MODEL FOR GENERATING A SYSTEM OF PROBLEMS BASED ON THE TECHNOLOGICAL APPROACH

**Abstract.** The article describes a model of didactic technology for generating a system of problems. A combination of the stages of knowledge acquisition, staging of systems design, described in the literature are observed when specifying the technology, which are partially supplemented. The structure and the components, of a specific technology for creating a system of problems for the formation of skills in students to solve irrational equations with one radical, are described. A specific system of problems is proposed.

*Keywords*: didactic system of problems; didactic technology; irrational equations with one radical

✉ **Mr. Slavi Kadiev**
National School for Ancient Languages and Cultures
"St. Constantine Cyril the Philosopher"
16, Baba St.
1360 Sofia, Bulgaria
E-mail: slav4o9405@abv.bg

✉ **Dr. Julia Ninova, Assoc. Prof.**
Web of Science Researcher ID: AAD-2876-2020
ORCID iD: 0000-0002-6239-0767
Faculty of Mathematics and Informatics
Sofia University
5, James Bourchier Blvd.
1164 Sofia, Bulgaria
E-mail: julianinova@hotmail.com