Конкурсни задачи
Contest Problems
Рубриката се води от проф. д.н. Емил Колев

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 1, 2021

Задача 1. Да се реши в естествени числа уравнението:

$$n \quad -5n+10=2$$

Решение. Да разгледаме даденото уравнение по модул 7. При деление на 7 степените на двойката дават остатъци 1, 2 или 4. Директна проверка показва, че $n^3-5n+10$ не може да дава остатъци 2 или 4. Следователно 2^k-1 се дели на 7, откъдето следва, че k се дели на 3. При $k=3s$ имаме:

$$\left(n-2^s\right)\left(n^2+n2^s+4^s\right)=5\left(n-2\right)$$

При $n = 1$ горното уравнение няма решение, а при $n = 2$ решението е $s = 1$, като тогава $k = 3$. При n>2 дясната страна на уравнението е положителна и следователно $n>2^s$ и тогава:

$$\left(n-2^s\right)\left(n^2+n2^s+4^s\right)\geq n^2+n2^s-4^s\geq n^2+2n+4>5n-10$$

като последното неравенство следва от $n^2-3n+14>0$.

Полученото противоречие показва, че единственото решение е $n = 2$, $k = 3$.

Задача 2. За положителните числа a, b, c и d е изпълнено равенството $a^2+b^2+c^2+d^2=1$. Да се докаже, неравенството:

$$a+b+c+d+\frac{1}{abcd}\geq 18$$

Решение. От неравенството $1=a^2+b^2+c^2+d^2\geq 4\sqrt{abcd}$ следва, че $\frac{1}{abcd}\geq 16$. Използваме неравенството между средното аритметично и средното геометрично за числата a, b, c, d и 32 числа $\frac{1}{32abcd}$. Получаваме:

$$a+b+c+d+32.\frac{1}{32abcd}\geq 36\sqrt[36]{\frac{abcd}{32^{32}\left(abcd\right)^{32}}}=\frac{36}{32^{\frac{8}{9}}\left(abcd\right)^{\frac{31}{36}}}\geq 36.2^{-\frac{40}{9}}.2^{\frac{31}{9}}=18$$

Задача 3. Положителните числа x, y, z,α , β и γ удовлетворяват равенствата:

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi \text{ и } x^2+y^2+z^2=2\left(xy\cos\gamma+yz\cos\alpha+zx\cos\beta\right)$$

Да се докаже, че от отсечки с дължини x, y и z може да се построи триъгълник с ъгли α , β и γ .

Решение. От равенството

$$0=x^2+y^2+z^2-2\left(xy\cos\gamma+yz\cos\alpha+zx\cos\beta\right)=\left(y\sin\gamma-z\sin\beta\right)^2+\left(y\cos\gamma+z\cos\beta-x\right)^2$$

следва, че $y\sin\gamma=z\sin\beta$, т.е. $\dfrac{y}{\sin\beta}=\dfrac{z}{\sin\gamma}$. Аналогично получаваме, че $\dfrac{y}{\sin\beta}=\dfrac{x}{\sin\alpha}$. Следователно за някое R имаме $\dfrac{y}{\sin\beta}=\dfrac{z}{\sin\gamma}=\dfrac{x}{\sin\alpha}=2R$. Да разгледаме триъгълник с ъгли α,β и γ . Като използваме подходяща хомотетия, преобразуваме този триъгълник в подобен на него триъгълник с радиус на описаната окръжност R. Сега от равенствата $\dfrac{y}{\sin\beta}=\dfrac{z}{\sin\gamma}=\dfrac{x}{\sin\alpha}=2R$ следва, че страните на този триъгълник са x, y и z.