

ПРОПЕДЕВТИКА НА ГЕОМЕТРИЧНИ ПРЕОБРАЗУВАНИЯ ЧРЕЗ ОТКРИВАНЕ НА РАЗЛИКИ

Тони Чехларова

Институт по математика и информатика – БАН

Резюме. Представени са възможности за пропедевтика на геометрични преобразувания чрез задачи за намиране на разлики в две изображения. Описани са идеи, свързани със съставянето на такива задачи, методика на използването им, възможности за популяризирането им чрез дигитални технологии. Обсъдена е възможността за развитие на критичност на мисленето, за развитие на дигитална компетентност съвместно с математическа компетентност чрез решаването на такива задачи.

Ключови думи: геометрични преобразувания; симетрия; критично мислене; GeoGebra; педагогически средства; дигитална компетентност

Въведение

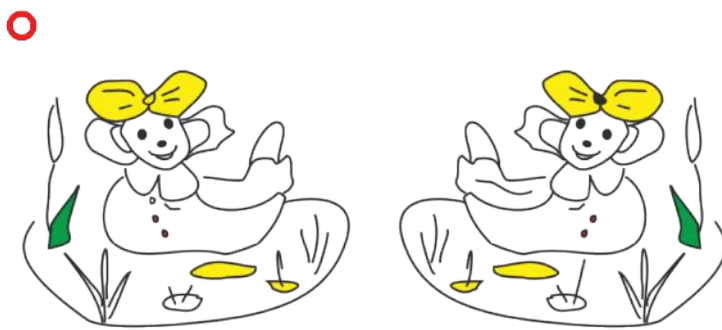
По сега действащата програма системното изучаване на геометричните преобразувания се реализира в VIII и IX клас в българското училище, като в VI клас се разглеждат симетрични точки на дадена точка спрямо началото и спрямо осите на Декартова координатна система. Широкото използване на геометричните преобразувания в ежедневието и наличието им в много обекти позволява лесно да се осъществява пропедевтика.

Т. Чехларова (2004) представя идеята за пропедевтика на геометрични преобразувания чрез задачи за намиране на разлика в две изображения. Очакването за широко приложение на тази идея, както и за създаване на други примери от учители, не се потвърди. Дигиталните технологии създават добри възможности за популяризиране на образователни ресурси. Поставянето на такива задачи във Виртуалния училищен кабинет по математика (Chehlarova 2020), включването им в онлайн състезание „VIVA Математика с компютър“ (Kenderov et al. 2021), както и използването на социалните мрежи доведе до търсения резултат по отношение на разпространението им. Тук се представят идеи, свързани със съставянето на такива задачи, и методика на използването им.

Видове разлики в задачите за откриване на разлики в две изображения

В занимателната страница на вестници и брошури присъства задача за намиране на разликата в две изображения. На практика се търси грешка в образ при трансляция. В задача 1 се разглежда аналогичен проблем с образ на картина при осева симетрия.

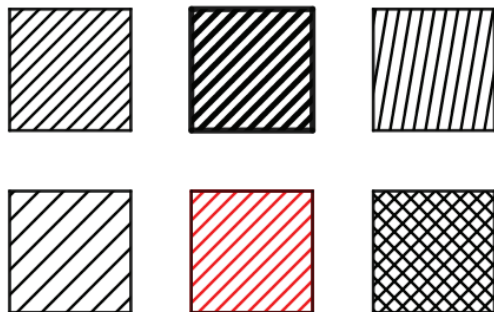
Задача 1. Художник нарисувал пейзаж и огледалния му образ, но направил пет разлики. Открийте ги (фигура 1).



Фигура 1. Задача с осева симетрия¹⁾

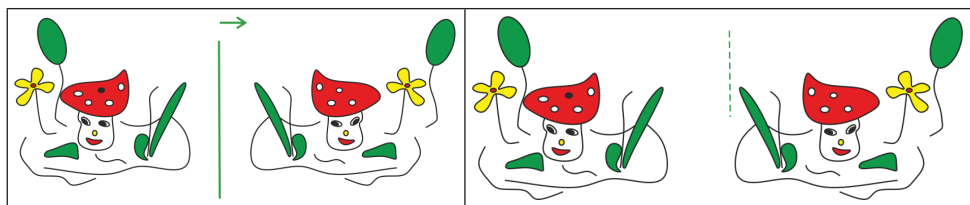
При съставянето на задачата се използват няколко вида разлики. Ако се разглежда лявата фигура като първообраз, а дясната – като образ, различията са: оцветяването на възела на панделката; липса на елемент – копче; поставен допълнителен елемент в крилото; увеличен размер на един от обектите – стръкче; на две места не е изобразен огледалният образ, а има само пренасяне, т.е. се използва трансляция. Обикновено последният вид грешка се открива най-трудно, особено ако непосредствено преди съответния пример е решавана задача с две картини, за получаването на втората от които се използва само трансляция на първата. За този вид разлика учениците коментират, че е много „коварна“, „пикантна“ и я оценяват като „най-яка“.

Разлика може да има в заштриховането, включително в дебелината на линиите, наклона на пълнежа, разстоянието между линиите на заштриховане, цвета или използването на няколко от тези разлики (фигура 2).



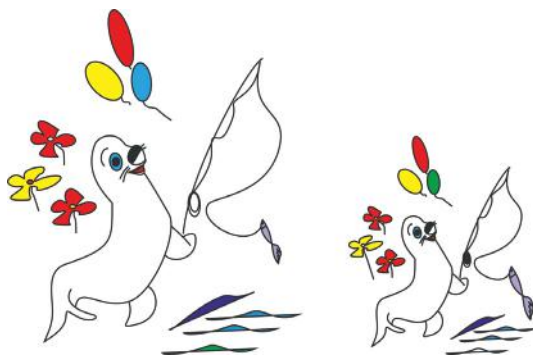
Фигура 2. Разлики при заштриховане

Някой от елементите може да се подлага освен на осева симетрия и на допълнителна трансляция, т.е. може да се разглежда и като образ при осева симетрия с ос на симетрия, различна от оста на симетрия на останалата част от композицията (фигура 3).



Фигура 3. Създаване на разлика чрез друга, но успоредна ос на симетрия

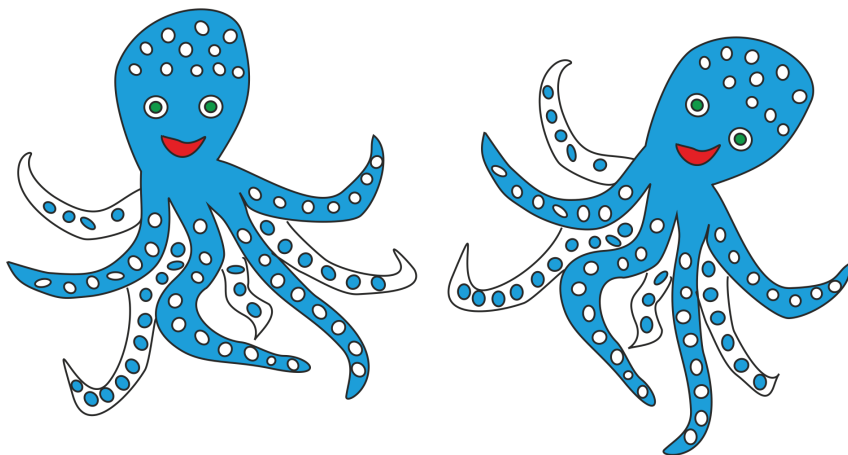
Задача 2. Художник направил копие на картина: нарисувал портрет на малко и на голямо платно, като направил разлики (фигура 4). Открийте ги.



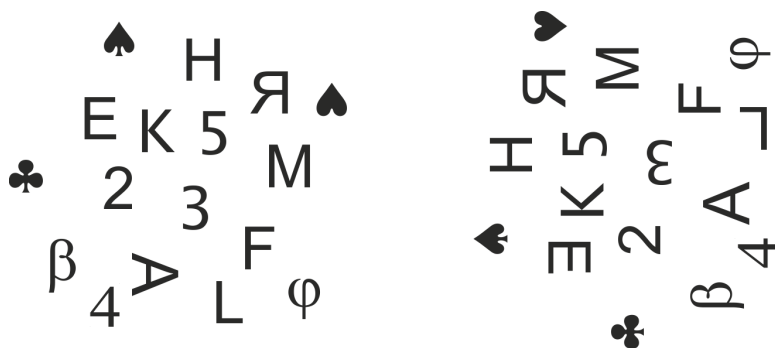
Фигура 4. Задача с хомотетия²⁾

При използване на хомотетия за получаване на образ на композицията специфична разлика се получава, когато някой от елементите е подложен на различна хомотетия.

При използване на ротация за съставяне на задачи обикновено е подходящо тя да се съчетава с транслация, с оглед изображенията да са удобно разположени на сравнително малко разстояние (фигура 5). Подходящо е да се съставят задачи с ъгъл на ротация 90^0 (фигура 6), както и централна симетрия, т.е. с ъгъл на ротация 180^0 .



Фигура 5. Пример с използване на ротация³⁾



Фигура 6. Пример с използване на ротация на -90 градуса⁴⁾

Методически бележки

Споделяме мнението за съчетано използване на класически и нови средства в образованието. В случая това се отнася до осигуряването на възмож-

ност за работа както върху хартиен носител, така и с дигитални средства. При работа върху хартиен носител учениците ограждат най-често различията в дясната фигура. По-рядко ги означават с число или отметка. Единични са случаите за означаване на всяка разлика върху двете изображения.

При експеримента са използвани дигитални ресурси, изработени с GeoGebra (Hohenwarter et al. 2009). Във файловете са предоставени средства за означаване на разликите – например точки, кръгчета, номера. Може да се използват молив или фигура, когато на файла се показва редът с бутоните. Когато са предоставени различни възможности за означаване, най-често се използва специално създаденият инструмент във файла, например точките. Забелязва се, че при работа с файловете над 80% от учениците нанасят разлики и в първообраза, и в образа, без дублиране. Възможността за уголемяване на образа при работа с дигитално средство дава възможност за улесняване на решаването. Удобство е и възможността за лесно коригиране на грешки.

На онлайн състезание „VIVA Математика с компютър“ такива задачи са дадени на първите три групи: III – IV клас, V – VI клас и VII – VIII клас. На фигура 7 се представя броят на участниците по групи.



Фигура 7. Брой на участниците по групи в онлайн състезание

На фигура 8 се показва по групи процентът на неотговорили на тази задача.



Фигура 8. Брой на неотговорилите участници в разглежданите групи

Въпреки ограниченото време от 1 час за решаване на 10 задачи участниците се справят успешно със задачата. На фигура 9 се представя отклонението от верния отговор на тези, които са записали отговор на задачата. От грешните отговори преобладават такива с по-малък брой открити разлики.



Фигура 9. Отклонение от верния отговор на решавалите задачата

Откриването на разлики в две изображения при решаване на предложените задачи съдейства за формиране на умения за извършване на наблюдение, анализ и синтез, сравняване; развитие на критичност на мисленето; развитие на гъвкавост на мисленето; развитие на въображението; натрупване на опит с примери на геометрични преобразувания.

В началото такива ресурси са създавани за предучилищното и началното образование. Разглежданите задачи се оказват предизвикателство и за учениците от среден и горен курс. Решаването им е подходящо да бъде продължено със самостоятелно съставяне на аналогични задачи при използване на различни компютърни средства в часовете по компютърно моделиране, информационни технологии или изобразително изкуство.

Във връзка с дистанционното обучение, въведено поради **епидемичната обстановка, породена от COVID-19, нараства както търсенето, така и предлагането на дигитални образователни ресурси и изследвания, свързани с използването им например** (Aleusiev 2021; Luchev et al. 2020; Pavlova & Tocheva 2020; Chehlarova 2021; Chehlarova & Gachev 2021).

БЕЛЕЖКИ

1. <http://cabinet.bg/content/bg/html/d23172.html>

2. <http://cabinet.bg/content/bg/html/d23182.html>
3. <http://cabinet.bg/content/bg/html/d23180.html>
4. <http://cabinet.bg/content/bg/html/d23181.html>

ЛИТЕРАТУРА

- АЛЕКСИЕВА, Л., 2021. Електронни ресурси за онлайн обучение по математика в началните класове – същност, видове, качество. *Математика и информатика*, Vol. 64(1), pp. 62 – 83.
- КЕНДЕРОВ, П., ЧЕХЛАРОВА, Т. & ГАЧЕВ, Г., 2021. Онлайн състезание „VIVA Математика с компютър“. *Математика и информатика*, Vol. 64(1), pp. 36 – 51.
- ЛУЧЕВ, Д., ПАНЕВА-МАРИНОВА, Д., ПАВЛОВ, Р., СЕНКА, Г. & ПАВЛОВА, Л., 2020. Концептуални модели за разработване на познавателни онлайн игри в областта на културното наследство. *Педагогика*, Vol. 92(5), pp. 620 – 630.
- ПАВЛОВА, В. & ТОШЕВА, Е., 2020. Обучение чрез интерактивни презентационни системи и облачната платформа на Google. *Педагогика*, Vol. 92(1), pp. 134 – 141.
- ЧЕХЛАРОВА, Т., 2020. Ресурси за самопроверка във Виртуалния училищен кабинет по математика. *Педагогика*, Vol. 92(2), pp. 168 – 179.
- ЧЕХЛАРОВА, Т., 2004. Картини и преобразувания за предучилищна възраст. *Предучилищно възпитание*, Vol. 6, pp. 45 – 47.
- CHEHLAROVA, N. & GACHEV, G., 2021. Online Contest “Mathematics and Art” for the Development of Key Competencies. *Педагогика*, Vol. 93(1), pp. 87 – 99.
- CHEHLAROVA, N., 2021. Axes of symmetry dominoes. *Symmetry: Culture and Science*, Vol. 32(1), pp. 103 – 111.
- HOHENWARTER, J., HOHENWARTER, M. & LAVICZA, Z., 2009. Introducing Dynamic Mathematics Software to Secondary School Teachers: the Case of GeoGebra. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, Vol. 28(2), pp. 135 – 146.

REFERENCES

- ALEKSIEVA, L., 2021. Electronic Resources for Online Mathematics Primary Education – Specifics, Types, Quality. *Mathematics and Informatics*, Vol. 64(1), pp. 62 – 83 [in Bulgarian].
- CHEHLAROVA, N. & GACHEV, G., 2021. Online Contest “Mathematics and Art” for the Development of Key Competencies. *Pedagogika – Pedagogy*, Vol. 93(1), pp. 87 – 99 [in Bulgarian].
- CHEHLAROVA, N., 2021. Axes of symmetry dominoes. *Symmetry: Culture and Science*, Vol. 32(1), pp. 103 – 111 [in Bulgarian].

- CHEHLAROVA, T., 2020. Resources for Self-Assessment in the Virtual Mathematics Laboratory. *Pedagogika–Pedagogy*, Vol. 92(2), pp. 168–179 [in Bulgarian].
- CHEHLAROVA, T., 2004. Pictures and transformations for preschoolers. *Preschool Education Magazine*, Vol. 6, pp. 45 – 47 [in Bulgarian].
- HOHENWARTER, J., HOHENWARTER, M. & LAVICZA, Z., 2009. Introducing Dynamic Mathematics Software to Secondary School Teachers: the Case of GeoGebra. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, Vol. 28(2), pp. 135 – 146.
- KENDEROV, P., CHEHLAROVA, T. & GACHEV, G., 2021. Online Competition VIVA Mathematics with Computer. *Mathematics and Informatics*, Vol. 64(1), pp. 36 – 51 [in Bulgarian].
- LUCHEV, D., PANEVA-MARINOVA, D., PAVLOV, R., SENKA, G. & PAVLOVA, L., 2020. Conceptual Models for the Development of Online Learning Games in Cultural Heritage Field. *Pedagogika – Pedagogy*, Vol. 92(5), pp. 620 – 633 [in Bulgarian].
- PAVLOVA, V. & TOSHEVA, E., 2020. Technology Solutions to Support Electronic Education through Interactive Presentation Systems and Google Cloud Platform. *Pedagogika–Pedagogy*, Vol. 92(1), pp. 134–141 [in Bulgarian].

PROPEDEUTICS OF GEOMETRIC TRANSFORMATIONS BY DETECTING DIFFERENCES

Abstract. Opportunities are offered for the propedeutics of geometric transformations through two-image difference detection tasks. Ideas related to the compilation of such tasks, methods of using them, opportunities for their promotion through digital technologies are described. The possibility of developing critical thinking, for developing digital competence together with mathematical competence by solving such problems is discussed.

Keywords: geometric transformations; symmetry; critical thinking; GeoGebra; didactic tool; digital competence

✉ **Prof. Dr. Toni Chehlarova**

ORCID iD: 0000-0001-8472-5217

Institute of Mathematics and Informatics

Bulgarian Academy of Sciences

Sofia, Bulgaria

E-mail: toni.chehlarova@math.bas.bg