Problems and Solutions
Конкурсни задачи
Рубриката се води от проф. д.н. Емил Колев

КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ БРОЙ 3/2021 Г.

Задача 1. Да се намерят всички естествени числа x и y, за които $x+y+1$ дели $2xy$ и $x+y-1$ дели x^2+y^2-1.

Задача 2. Нека a, b и c са страни на триъгълник и $ab+bc+ca=1$. Да се докаже неравенството

$$\left(a+1\right)\left(b+1\right)\left(c+1\right)<4$$

Задача 3. Да се намерят всички естествени числа n за които множеството $\left\{1,2,...,3n\right\}$ може да се раздели на n триелементни множества, като за всяко такова множество $\left\{a,b,c\right\}$ числата $b-a$ и $c-b$ са различни елементи от множеството $\left\{n-1,n,n+1\right\}$.

Краен срок за изпращане на решения: 10 август 2021 г.

В края на 2021 г. ще бъдат определени читателите с най-интересни решения на конкурсните задачи, а така също най-активните композитори на нови задачи, както и авторите на най-интересните статии. Първенците ще получат безплатни годишни абонаменти за 2022 г.

Решенията трябва да бъдат представени ясно, като е задължително всяка задача да е на отделен лист. Моля, изпращайте решенията на адреса на редакцията mathinfo@azbuki.bg или в електронен вид на emilkol@gmail.com.

Скъпи приятели,

От книжка 5/2020 г. задачите, публикувани в рубриката „Конкурсни задачи“, са свободно достъпни на електронната страница на списанието на адрес: https://mathinfo.azbuki.bg/

Всички читатели – включително ученици, учители и студенти, могат да изпращат своите решения на e-mail mathinfo@azbuki.bg или emilkol@gmail.com.

Сп. „Математика и информатика“ ще обяви конкурс с награди за най-добрите решения на задачите, публикувани в книжките през 2021 г.

Конкурсни задачи
Contest Problems
Рубриката се води от проф. д.н. Емил Колев

РЕШЕНИЯ НА КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ БРОЙ 2, 2021 Г.

Задача 1. В равнината са дадени точка *A* и окръжност *k* с център *O*. Намерете геометричното място на центровете на описаните окръжности на триъгълници *ABC*, където *BC* е диаметър на *k*.

Решение. Ако точката *A* лежи на окръжността *k*, то всички триъгълници *ABC* имат център на описаната окръжност точка *O*. В този случай търсеното множество е точката *O*.

Нека *A* е външна за окръжността. Да разгледаме диаметър на *k*, който е перпендикулярен на *AO*. Центърът на описаната окръжност за ΔABC е точка *S* върху отсечката *AO*, за която *SA* = *SB* = *SC*. Ще докажем, че търсеното геометрично място е права *p* през *S*, перпендикулярна на *AO*. Да разгледаме произволен диаметър B_1C_1 на *k* и нека S_1 е пресечната точка на симетралата на B_1C_1 и правата *p*. Тогава

$$S_1B_1 = S_1C_1 = \sqrt{S_1O^2 + r^2} = \sqrt{S_1S^2 + SO^2 + r^2}$$

От друга страна, за дължината на S_1A получаваме:

$$S_1A = \sqrt{AS^2 + S_1S^2} = \sqrt{BS^2 + S_1S^2} = \sqrt{SO^2 + r^2 + S_1S^2}$$

Следователно $S_1A = S_1B = S_1C$, т.е. S_1 е центърът на описаната окръжност за $\triangle AB_1C_1$. Когато *A* е вътрешна точка за окръжността, доказателството е аналогично.

Задача 2. Точките *P*, *Q* и *R* от страните на *AB*, *BC* и *CA* на триъгълник *ABC* $(AC \neq BC)$ са такива, че *AQ*, *BR* и *CP* се пресичат в една точка, *CP* е перпендикулярна на *AB* и около четириъгълника *ABQR* може да се опише окръжност. Докажете, че *AQ* и *BR* са височини на триъгълника *ABC*.

Решение. Тъй като ABQR е вписан, получаваме $\sphericalangle RQC = \sphericalangle BAC$ и следователно $\triangle ABC$ и $\triangle QRC$ са подобни. Ако k е коефициентът на подобие на двата триъгълника, имаме CQ=kb и CR=ka. Сега от теоремата на Чева получаваме:

$$\frac{AP}{PB}.\frac{BQ}{QC}.\frac{CR}{RA} = 1 \Leftrightarrow \frac{AP}{PB}.\frac{a \quad kb}{kb}.\frac{ka}{b \quad ka} = 1$$

и понеже $\dfrac{AP}{BP} = \dfrac{b\cos\alpha}{a\cos\beta}$, намираме:

$$\frac{b\cos\alpha}{a\cos\beta}.\frac{a-kb}{kb}.\frac{ka}{b-ka}=1 \Leftrightarrow \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}.\frac{a-kb}{b-ka}=1 \Leftrightarrow \cos\alpha\left(a-kb\right)=\cos\beta\left(b-ka\right)$$

От горното равенство при $\alpha \neq \beta$ получаваме

$$k=\frac{a\cos\alpha-b\cos\beta}{b\cos\alpha-a\cos\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\alpha-\sin\beta\cos\beta}{\sin\beta\cos\alpha-\sin\alpha\cos\beta}=\frac{\sin 2\alpha-\sin 2\beta}{2\sin\left(\beta-\alpha\right)}=\frac{\cos\left(\alpha+\beta\right)\text{in}\left(\alpha-\beta\right)}{\text{in}\left(\beta-\alpha\right)}=\cos\gamma$$

Следователно коефициентът на подобие е равен на $\cos\gamma$, т.е. триъгълник *PQR* е педалният триъгълник за триъгълник *ABC*, т.е. *AQ* и *BR* са височини на триъгълника *ABC*.

Задача 3. Дадена е функция $f:N\to N$, където N е множеството от положителните цели числа. Ако за всеки две $x,y\in N$ е изпълнено равенството $f(xf(y))=yf(x)$, намерете най-малката възможна стойност на $f(2007)$.

Решение. Ако $f\left(y_1\right)=f\left(y_2\right)$, то за всяко x имаме: $y_1 f(x)=f(xf(y_1))=f(xf(y_2))=y_2 f(x)$ и понеже $f(x)$ е естествено число, то $y_1=y_2$. При $x=y=1$ получаваме $f(f(1))=f(1)$ и следователно $f(1)=1$. При $x=1$ сега следва $f(f(y))=y$, откъдето следва, че ако $f(y)=z$, то $f(z)=y$. Получаваме:

$$f(xz)=f(xf(y))=yf(x)=f(z)f(x)$$

Да забележим, че ако p е просто число, то $f(p)$ е също просто число. Наистина, ако $f(p)=ab$, то $p=f(f(p))=f(ab)=f(a)f(b)$ и понеже $a\neq 1$ и $b\neq 1$,то $f(a)\neq 1$ и $f(b)\neq 1$, противоречие. Следователно

$$f(2007)=f(3)^2 f(223)$$

Ако $f(3)=2$, то $f(2)=3$ и най-малката стойност на $f(223)$ е 5, като $f(2007)\geq 2^2.5=20$

Ако $f(3)=3$, то най-малката стойност на $f(223)$ е 2, като $f(2007)\geq 3^2.2=18$. Лесно се проверява, че функцията $f\left(2^k.223^m.q\right)=2^m.223^k.q$ при $x=2^k.223^m.q$ за k и m неотрицателни цели числа удовлетворява условието на задачата и $f(2007)=3^2.2=18$.

In Memoriam

В ПАМЕТ НА ПРОФ. ДОРУ СТЕФАНЕСКУ

С чувство за голяма загуба съобщаваме на нашите читатели, че на 09.05.2021 година на 69-годишна възраст напусна този свят членът на редакционния съвет на списание „Математика и информатика" проф. д.м.н. Дору Стефанеску. Отиде си един уважаван румънски учен математик, старши заместник-председател на Румънското математическо общество и изпълнителен редактор на Бюлетина на това общество, трикратен президент на Математическото общество на Югоизточна Европа.

Математическите способности на Дору Стефанеску проличават още в училище. Участва в редица състезания и олимпиади. Завършва математика в Университета в Букурещ, Румъния. Има специализации в Италия, бил е гостуващ професор в чуждестранни университети. Смъртта го застига като професор по математика във Факултета по физика на Университета в Букурещ. Научните му трудове покриват значителен спектър от чисто научни и приложни направления, като въпросите на образованието по математика винаги са заемали подобаващо място в неговите дейности.

Ще запомним професор Дору Стефанеску със сериозното и високо професионално отношение към всичко, с което се занимаваше. Почтеността и добронамереността му ще ни служат за пример. Почивай в мир, Дору!

IN MEMORY OF PROF. DORU STEFANESKU, DSC.

Editorial Board
Mathematics and Informatics Journal
Sofia, Bulgaria
E-mail: mathinfo@azbuki.bg