https://doi.org/10.53656/math2021-3-9-res

Конкурсни задачи
Contest Problems
Рубриката се води от проф. д.н. Емил Колев

РЕШЕНИЯ НА КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ БРОЙ 2, 2021 Г.

Задача 1. В равнината са дадени точка A и окръжност k с център O. Намерете геометричното място на центровете на описаните окръжности на триъгълници ABC, където BC е диаметър на k.

Решение. Ако точката A лежи на окръжността k, то всички триъгълници ABC имат център на описаната окръжност точка O. В този случай търсеното множество е точката O.

Нека A е външна за окръжността. Да разгледаме диаметър на k, който е перпендикулярен на AO. Центърът на описаната окръжност за ΔABC е точка S върху отсечката AO, за която $SA = SB = SC$. Ще докажем, че търсеното геометрично място е права p през S, перпендикулярна на AO. Да разгледаме произволен диаметър B_1C_1 на k и нека S_1 е пресечната точка на симетралата на B_1C_1 и правата p. Тогава

$$S_1B_1 = S_1C_1 = \sqrt{S_1O^2 + r^2} = \sqrt{S_1S^2 + SO^2 + r^2}$$

От друга страна, за дължината на S_1A получаваме:

$$S_1A = \sqrt{AS^2 + S_1S^2} = \sqrt{BS^2 + S_1S^2} = \sqrt{SO^2 + r^2 + S_1S^2}$$

Следователно $S_1A = S_1B = S_1C$, т.е. S_1 е центърът на описаната окръжност за $\triangle AB_1C_1$. Когато A е вътрешна точка за окръжността, доказателството е аналогично.

Задача 2. Точките P, Q и R от страните на AB, BC и CA на триъгълник ABC $(AC \neq BC)$ са такива, че AQ, BR и CP се пресичат в една точка, CP е перпендикулярна на AB и около четириъгълника $ABQR$ може да се опише окръжност. Докажете, че AQ и BR са височини на триъгълника ABC.

Решение. Тъй като ABQR е вписан, получаваме $\sphericalangle RQC = \sphericalangle BAC$ и следователно $\triangle ABC$ и $\triangle QRC$ са подобни. Ако k е коефициентът на подобие на двата триъгълника, имаме CQ=kb и CR=ka. Сега от теоремата на Чева получаваме:

$$\frac{AP}{PB}.\frac{BQ}{QC}.\frac{CR}{RA} = 1 \Leftrightarrow \frac{AP}{PB}.\frac{a-kb}{kb}.\frac{ka}{b-ka} = 1$$

и понеже $\dfrac{AP}{BP} = \dfrac{b\cos\alpha}{a\cos\beta}$, намираме:

$$\frac{b\cos\alpha}{a\cos\beta}.\frac{a-kb}{kb}.\frac{ka}{b-ka}=1\Leftrightarrow\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}.\frac{a-kb}{b-ka}=1\Leftrightarrow\cos\alpha\left(a-kb\right)=\cos\beta\left(b-ka\right)$$

От горното равенство при $\alpha\neq\beta$ получаваме

$$k=\frac{a\cos\alpha-b\cos\beta}{b\cos\alpha-a\cos\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\alpha-\sin\beta\cos\beta}{\sin\beta\cos\alpha-\sin\alpha\cos\beta}=\frac{\sin2\alpha-\sin2\beta}{2\sin\left(\beta-\alpha\right)}=\frac{\cos\left(\alpha+\beta\right)\text{in}\left(\alpha-\beta\right)}{\text{in}\left(\beta-\alpha\right)}=\cos\gamma$$

Следователно коефициентът на подобие е равен на $\cos\gamma$, т.е. триъгълник

PQR е педалният триъгълник за триъгълник *ABC*, т.е. *AQ* и *BR* са височини на триъгълника *ABC*.

Задача 3. Дадена е функция $f:N\to N$, където N е множеството от положителните цели числа. Ако за всеки две $x,y\in N$ е изпълнено равенството $f(xf(y))=yf(x)$, намерете най-малката възможна стойност на $f(2007)$.

Решение. Ако $f\left(y_1\right)=f\left(y_2\right)$, то за всяко x имаме: $y_1f(x)=f(xf(y_1))=f(xf(y_2))=y_2f(x)$ и понеже $f(x)$ е естествено число, то $y_1=y_2$. При $x=y=1$ получаваме $f(f(1))=f(1)$ и следователно $f(1)=1$. При $x=1$ сега следва $f(f(y))=y$, откъдето следва, че ако $f(y)=z$, то $f(z)=y$. Получаваме:

$$f(xz)=f(xf(y))=yf(x)=f(z)f(x)$$

Да забележим, че ако p е просто число, то $f(p)$ е също просто число. Наистина, ако $f(p)=ab$, то $p=f(f(p))=f(ab)=f(a)f(b)$ и понеже $a\neq1$ и $b\neq1$,то $f(a)\neq1$ и $f(b)\neq1$, противоречие. Следователно

$$f(2007)=f(3)^2f(223)$$

Ако $f(3)=2$, то $f(2)=3$ и най-малката стойност на $f(223)$ е 5, като $f(2007)\geq2^2.5=20$

Ако $f(3)=3$, то най-малката стойност на $f(223)$ е 2, като $f(2007)\geq3^2.2=18$. Лесно се проверява, че функцията $f\left(2^k.223^m.q\right)=2^m.223^k.q$ при $x=2^k.223^m.q$ за k и m неотрицателни цели числа удовлетворява условието на задачата и $f(2007)=3^2.2=18$.