https://doi.org/10.53656/math2021-4-8-res

Конкурсни задачи
Contest Problems
Рубриката се води от проф. д.н. Емил Колев

РЕШЕНИЯ НА КОНКУРСНИТЕ ЗАДАЧИ БРОЙ 3, 2021 Г.

Задача 1. Да се намерят всички естествени числа *x* и *y*, за които $x+y+1$ дели $2xy$ и $x+y-1$ дели x^2+y^2-1.

Решение. От тъждеството $(x+y+1)(x+y-1)=(x+y)^2-1=x^2+y^2-1+2xy$ следва, че $x+y+1$ дели x^2+y^2-1. Следователно $x+y+1$ и $x+y-1$ делят x^2+y^2-1. Тъй като най-големият общ делител на $x+y+1$ и $x+y-1$ е 1 или 2, имаме, че произведението $(x+y+1)(x+y-1)$ дели x^2+y^2-1 или $2(x^2+y^2-1)$. Първият случай е невъзможен, тъй като $(x+y+1)(x+y-1)=x^2+y^2+2xy-1>x^2+y^2-1$, а вторият случай дава $(x+y+1)(x+y-1)=2(x^2+y^2-1)$. Това равенство е еквивалентно на $\left(x-y\right)^2=1$. Следователно $\left|x-y\right|=1$ и директно се проверява, че двойките $\left(x,x\pm 1\right)$ са решения на задачата.

Задача 2. Нека *a*, *b* и *c* са страни на триъгълник и $ab+bc+ca=1$. Да се докаже неравенството

$$\left(a+1\right)\left(b+1\right)\left(c+1\right)<4$$

Решение. Ако $a\geq 1$, то $b+c>a\geq 1$ и получаваме $ab+bc+ca=a(b+c)+bc>1+bc>1$, противоречие. Следователно $a<1, b<1, c<1$, откъдето получаваме

$$\left(1-a\right)\left(1-b\right)\left(1-c\right)>0$$

Това неравенство е еквивалентно на

$$1+ab+bc+ca>a+b+c+abc \Leftrightarrow 4>1+a+b+c+ab+bc+ca+abc$$

От последното неравенство имаме $\left(a+1\right)\left(b+1\right)\left(c+1\right)<4$.

Задача 3. Да се намерят всички естествени числа *n,* за които множеството $\left\{1,2,\ldots,3n\right\}$ може да се раздели на *n* триелементни множества, като за всяко такова множество $\left\{a,b,c\right\}$ числата $b-a$ и $c-b$ са различни елементи от множеството $\left\{n-1,n,n+1\right\}$.

Решение. Да разгледаме правилен $3n$-ъгълник $P_1P_2\ldots P_{3n}$. Условието на задачата е еквивалентно на разделяне на върховете на този $3n$-ъгълник на тройки $\left\{A_i,B_i,C_i\right\}$, като ъглите на всеки триъгълник $A_iB_iC_i$ са $\frac{n-1}{3n}\pi$,

$\dfrac{n}{3n}\pi$ и $\dfrac{n+1}{3n}\pi$. Без ограничение можем да приемем, че една от тройките е $(n, 2n-1, 3n)$. Една от останалите $n-1$ тройки съдържа две числа от интервала $\left[2n, 3n-1\right]$, като тези две числа могат да бъдат само $2n$ и $3n-1$, като единствената възможна тройка е $(n-1, 2n, 3n-1)$. Всяка от останалите тройки съдържа по един елемент от всеки от интервалите $\left[1, n-2\right]$, $\left[n+1, 2n-2\right]$ и $\left[2n+1, 3n-2\right]$. За всяка от тези тройки $\left(a, b, c\right)$ образуваме $\left(a, b-2, c-4\right)$, което дава разделяне на множеството $\left\{1, 2, \ldots, 3(n-2)\right\}$. Тъй като при $n=1$ такова разделяне е невъзможно, то при нечетно n такова разделяне е невъзможно. При $n=2m$ разделянето $\left(2i-1, 2i+n, 2i+2n-1\right)$ и $\left(2i, 2i+n-1, 2i+2n\right)$ за $i=1, 2, \ldots, m$ удовлетворява условието на задачата.