Математика и информатика | Volume 64, Number 5, 2021 | *Mathematics and Informatics*

https://doi.org/10.53656/math2021-5-2-pod

Educational Matters
Научно-методически статии

ПОДГОТОВКА ЗА XXV МЛАДЕЖКА БАЛКАНИАДА ПО МАТЕМАТИКА 2021

[1)]Доц. Ивайло Кортезов, Емил Карлов, Мирослав Маринов
[1)]Институт по математика и информатика – БАН

Резюме. Статията съдържа състезателните теми за селекция на отбора на България за Младежката балканска олимпиада по математика 2021, както и преглед на представянето на отбора. Включените тук материали могат да са от полза за школите за подготовка за математически състезания VII – IX клас.

Ключови думи: математически състезания; Младежка балканиада по математика; селекционни контролни

Разширеният отбор на България за XXV младежка балканска олимпиада по математика (МлБОМ) беше избран съгласно наредбата на МОН въз основа на резултатите от Зимните математически състезания (за VIII и IX клас), Пролетните математически състезания (за VII, VIII и IX клас) и Националния кръг на олимпиадата по математика (за VII и VIII клас). Шестимата участници в разширения отбор, постигнали най-висок сбор на двете проведени контролни работи (29 – 30.5.2021), съставиха отбора на България за МлБОМ. Ето задачите от тези контролни и решенията им.

Задача 1. а) За реалните числа x, y, z, t докажете

$$(x(y+z)+y(z+t)+z(t+x)+t(x+y))^2 \geq 8(x+z)(y+t)(xz+yt).$$

б) Краен или безкраен е броят четворки (x, y, z, t) от различни цели числа, при които се достига равенство?

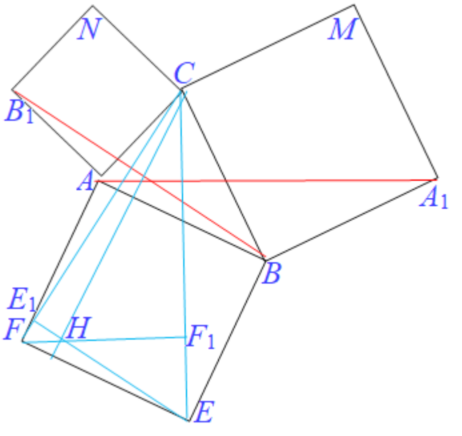
Решение. а) Да положим $A = xy + yz + zt + tx$ и $B = xz + yt$. Лявата страна е равна на $(A + 2B)^2$, а дясната е $8AB$ и исканото е еквивалентно на очевидното $(A - 2B)^2 \geq 0$.

б) Изборът $t = 0$ свежда $A = 2B$ до $xy + yz = 2xz$ и значи при $x + z = 1$ имаме $y = 2xz$. Следователно безкрайното семейството от четворки $(a, 2a(1 - a), 1 - a, 0)$ за цяло $a \neq 0{,}1$ изпълнява исканото.

Оценяване. а) 6 т., от които по 2 т. за забелязване на всяко от A и B и 2 т. за завършване (при незавършени идеи с груби разкривания на скоби – най-много 1 т.); 4 т. за б) от които 0 т. за верен отговор, 1 т. за опростяване от вида “$t = 0$”, 2 т. за деклариране на работещо безкрайно семейство и 1 т. за проверка, че е такова: най-вече отбелязване на изключения, каквито например са в указаното решение, или явно избягване на такива (например с условието $a \geq 2$).

Задача 2. На страните BC и CA на остроъгълен ΔABC навън от триъгълника са построени квадрати CBA_1M и $ACNB_1$. Да се докаже, че правите AA_1 и BB_1 се пресичат върху височината CC_1 на ΔABC.

Решение. Построяваме квадрат $ABEF$ навън от ΔABC. Ротацията на ΔAFE около A на 90°



дава $CF \perp BB_1$, т.е. BB_1 е успоредна на височината EE_1 в ΔFEC. По същите причини AA_1е успоредна на височината FF_1. Нека височините CC_1, EE_1 и FF_1 се пресичат в точка H. Транслацията с вектор $\overrightarrow{FA}$ изпраща височините в правите BB_1, AA_1; търсената пресечна точка е образът на H.

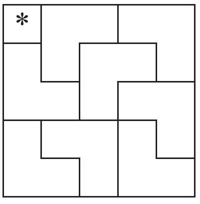
Оценяване. 1 т. за построяване на H, 3 т. за $CF \perp BB_1$ и $CE \perp AA_1$; 1 т. $BB_1 \| EE_1$ и $AA_1 \| FF_1$, 5 т. за завършване.

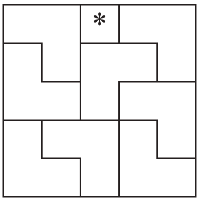
Задача 3. Ще наричаме „г-тримино“ квадрат 2×2 с отстранено едно поле 1×1.

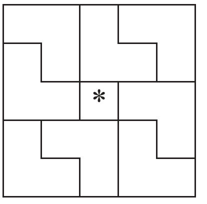
а) От квадрат 5×5 изрязали 8 г-тримина и едно поле останало; кое може да е то?

б) Намерете всички двойки естествени $(m; n)$, $m \leq n$, за които е възможно да покрием правоъгълник $m \times n$ с няколко слоя от г-тримина, така че никое да не стърчи извън правоъгълника и всяко поле на правоъгълника да е покрито с еднакъв брой г-тримина.

Решение. а) Да оцветим следните 9 полѐта: централното, ъгловите 4 и 4-те до средите на страните. Всяко от 8-те г-тримина може да има най-много едно оцветено поле, така че деветото оцветено поле трябва да е останало. Всяко от тези 9 полѐта е възможно, както личи от чертежите:







б) Явно трябва $m>1$. Квадрат 2×2 се покрива с 3 слоя г-тримина, а правоъгълник 2×3 – с 1 слой; това гарантира успех във всички случаи, когато поне едно от числата m, n е четно. Ако $m=3$ и $n=2k-1$, да запишем в нечетните полета от нечетните редове числото -2, а в останалите да запишем 1; сборът от числата в таблицата е $3(2k-1)-3.2k=-3$, а всяко г-тримино покрива полета с неотрицателен сбор, така че желаното е непостижимо. Ако $m=5$ и $n=2k-1$, да запишем в нечетните полета от нечетните редове числото -2, а в останалите да запишем 1; сборът от числата в таблицата е $5(2k-1)-3.3k=k-5$ и понеже всяко г-тримино покрива полета с неотрицателен сбор, трябва $k\geq5$. Това наистина е възможно: таблица 5×9 се запълва лесно, като се следва изискването всяко тримино да съдържа някое от полетата с -2 (има много начини; от участниците се изисква един), а за по-големи k е достатъчно да се добавят подходящ брой 2×2 и 2×3. По същите причини са възможни случаите, ако единият размер на таблицата е поне 9. А таблица 7×7 може да се покрие с 2×2, 2×3 и едно г-тримино, така че и този случай е възможен. Окончателно, възможни са единствено случаите, когато размерите са по-големи от 1, поне един е четен или ако са два нечетни, то са по-големи от 3 и сборът им е поне 14.

Оценяване. а) 1 т.за оценката и 1 т. при наличие на трите типа примери; б) 1 т. общо за пълен анализ на случаите с наличие на размер 1 и на четен размер; 2 т. общо за случаите $3\times(2k-1)$;2 т. общо за случаите $5\times(2k-1)$; 1 т. за случая 7×7; 2 т. за завършване.

Задача 4. Да се намери най-малкото естествено число d със свойството: за всяко естествено число m съществуват естествени числа $a>b>c$ в интервала $[m^4+2; m^4+m^2+dm]$, такива че c дели произведението ab.

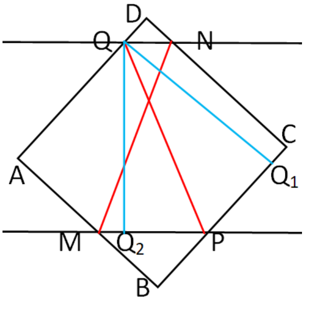
Решение. При $m=1$ и $d\leq 3$ няма подходящи числа. Ще покажем, че $d=4$ изпълнява исканото. За $m=1$ избираме $c=3$, $b=4$, $a=6$. Ако $m\geq 2$, избираме $c=(m^2-2m+2)(m^2+2m+2)=m^4+4$, $b=(m^2-2m+2)(m^2+2m+3)=m^4+m^2-2m+6$, $a=(m^2-2m+3)(m^2+2m+2)=m^4+m^2+2m+6$, които отговарят на условието за $d\geq 4$, $m\geq 2$.

Оценяване. Общо 1 т. за отхвърляне на $d\leq 3$ и ясно твърдение, че $d=4$ работи (0 т. при едно от двете); 1 т. за справяне с $m=1$; 4 т. за ясна формулировка на работеща конструкция; 4 т. за пълна проверка на конструкцията.

Коментар. Няколко от решилите задачата се досетиха за ефикасния избор $c=m^4+m$, придружен от $b=m^2-m+1$ и $a=m^2+m$.

Задача 5. Успоредните прави *a, b* са на разстояние 1 една от друга. Квадрат *ABCD* има страна 1. Правата *a* пресича страните *AB, BC* съответно в точки *M, P*. Правата *b* пресича страните *CD, DA* съответно в точки *N, Q*. Да се намери ъгълът между пресичащите се вътре в квадрата прави *MN* и *PQ*.

Решение. Точката *Q* е на разстояние 1 от *PC* и *PM*, така че лежи на външната ъглополовяща при върха *P* на правоъгълния ΔMBP. По същите причини *MN* е външна ъглополовяща при *M* на ΔMBP. Формулата за ъгъл между външни ъглополовящи дава отговор $90°-\frac{90°}{2}=45°$.



Оценяване. 6 т. за доказване, че *MN* и *PQ* са външни ъглополовящи; 4 т. за завършване.

Задача 6. Ако *a, b, c* са положителни реални числа, за които $abc(a+b+c)=3$, то намерете (ако съществува) най-малката стойност на израза $(a+b)(a+c)$.

Решение. Имаме $(a+b)(a+c)=a(a+b+c)+bc=3:bc+bc\geq 2\sqrt{3}$ от неравенството между средно аритметично и средно геометрично с равенство при $bc=\sqrt{3}$. Ако фиксираме $b=1$, $c=\sqrt{3}$, то $a(a+1+\sqrt{3})=\sqrt{3}$ води до квадратно уравнение, в което старшият коефициент и свободният член са с противоположни знаци, така че дискриминантата е положителна и един от корените на уравнението е положителен, т.е. наистина стойността $2\sqrt{3}$ се достига за числа с дадените ограничения.

Оценяване. 2 т. за свеждане до условие за bc; 3 т. за доказване, че изразът е не по-малък от $2\sqrt{3}$; 5 т. за доказване, че стойността се достига за числа с дадените ограничения.

Задача 7. Да се намерят всички прости числа p, такива, че за всеки две (не непременно различни) естествени числа x и y числото $(x+y)^{19}-x^{19}-y^{19}$ се дели на p.

Решение. При $x=y=1$ имаме, че p дели $2^{19}-2=2.(2^9-1).(2^9+1)=2.3^3.7.19.73$, а при $x=2, y=1$ имаме, че p дели $3^{19}-2^{19}-1$, като директно се проверява, че 73 не дели последното, например чрез $3^{19}\equiv(3^3).(3^4)^4\equiv 27.8^4\equiv 27.(-9)^2\equiv 27.8\equiv 70$ и $2^{19}\equiv 2.64^3\equiv 2.(-9)^3\equiv -18.81\equiv -18.8\equiv 2$, всичките по модул 73 (принципно $3^{19}-2^{19}-1=2.3.7^2.19.207973$, като 207973 е просто – в тази ситуация това не ни е необходимо). Така непременно $p=2,3,7,19$ и ще проверим, че тези работят.

От теоремата на Ферма по модул 19 $(x+y)^{19}\equiv x+y, x^{19}\equiv x, y^{19}\equiv y$ и исканото следва за $p=19$.

За $p=7$ по модул 7 за цяло a от Ферма $a^{19}\equiv a^7.a^6.a^6\equiv a.a^6.a^6\equiv a^7.a^6\equiv a.a^6\equiv a$ и сме готови.

За $p=2,3$ можем да постъпим както по-горе или чрез бързи директни проверки, както следва. При $p=2$, ако x (аналогично и за y) е нечетно, числата $x+y$ и x са с еднаква четност и сме готови; иначе x и y са нечетни, $x+y$ е четно и исканото пак е изпълнено. При $p=3$ случаят, когато x или y се дели на 3, е директен; ако $x\equiv y\equiv 1$,то $2^{19}-2$ се дели на 3, понеже нечетните степени на 2 дават остатък 2 по модул 3; ако $x\equiv y\equiv 2$, то $4^{19}-2.2^{19}\equiv 1-2^{20}$се дели на 3, понеже четните степени на 2 дават остатък 1; ако $x\equiv 2, y\equiv 1$ (или обратното), то искаме $-2^{19}-1$ да се дели на 3, и довършваме както във втория случай.

Оценяване. 2 т. за извод от полагане, което ясно показва, че $p=2,3,7,19$ (и най-много две други p) са евентуални кандидати; 4 т. за отхвърляне на излишните p; 1 т. за проверката на $p=19$, 2 т. при изцяло коректна проверка за $p=7$, общо 1 т. за проверката на $p=2$ и $p=3$ (0 т., ако само едното е разгледано).

Задача 8. Числата k, m, n са естествени и по-големи от 2. Във всеки връх на n-ъгълник е записано цяло число от интервала $[0; m]$. За един ход се избират две съседни числа и се увеличават с по 1. С дадена двойка върхове може да се извършва ход не повече от k пъти. При кои стойности на m, n, k е сигурно, че всички числа могат да се изравнят независимо от началните им стойности?

Решение. Номерираме върховете на n-ъгълника поред 1, 2, 3, ...; нека A е сборът от числата на четни позиции, а B – този на нечетни. Ако n е четно, ходовете не променят $A-B$, така че няма как да го направим 0, ако не е било 0 отначало, т.е. не може да се гарантира успех. Нека сега n е нечетно, $n=2j+1$; номерацията на върховете е по модул n. Нека от B изключим последното събираемо. Ако първоначално числата на четни позиции са равни на m, а останалите на 0, то $A-B=mj$. С всеки ход тази величина не се променя или се намалява с 1 (ако добавим 1 към n-тото и първото число), или се увеличава с 1 (ако добавим 1 към $n-1$-вото и n-тото число). При желаната цел $A-B=0$, така че са нужни поне mj хода с двойката, съдържаща n-тия и първия връх. И така, необходимо е $k \geq mj$. Ако $k \geq mj$, нека за всяко i извършим ход с двойката числа на позиции i и $i+1$ толкова пъти, колкото е сборът на числата на позиции $i+2$, $i+4$, ..., $i+2j$ (този сбор е най-много mj); по този начин числото във всеки връх ще стане равно на сбора на числата в първоначалната ситуация (понеже то ще участва в ходове и с левия, и с десния си съсед). Отговор: точно когато $n=2j+1$ за цяло j и $k \geq mj$.

Оценяване. 1 т. за случая с четно n; 4 т. за доказване, че $k \geq mj$ е необходимо; 5 т. за доказване, че $k \geq mj$ е достатъчно.

След определяне на отбора на България беше проведена 25-дневна подготовка с целия Разширен отбор, която в дистанционните си фази включваше и други участници в тази възрастова група, постигнали високи резултати в състезанията. В подготовката освен авторите на настоящата статия се включиха и бивши ръководители на националните отбори и участници в тях; тя се състоеше от дистанционно обучение (5.6 – 25.6.2021) и присъствено по 6 учебни ча̀са лекции плюс *мат бой*, както и контролна работа при правилата на МлБОМ в Центъра за подготовка на ученици за олимпиади на МОН (25 – 29.6.2021). Самата МлБОМ, организирана от Математическото общество на Югоизточна Европа (MASSEE), през 2021 имаше за формален домакин Молдова. В олимпиадата взеха участие ученици от 22 отбора от 21 държави. Резултатите на българския национален отбор са следните:

	1	2	3	4	Сбор	Медал
Марин Христов Христов	10	10	10	3	33	златен
Демира Георгиева Недева	3	10	10	1	24	сребърен
Веселин Николаев Маркович	10	10	0	3	23	сребърен
Давид Георгиев Йорданов	1	10	0	0	11	бронзов
Милен Миленов Шуманов	3	10	0	2	15	бронзов
Георги Николаев Илиев	1	10	0	3	14	бронзов
БЪЛГАРИЯ	28	60	20	12	120	

В отборното класиране сред официалните участници България зае второ място след отбора на Румъния, а сред неофициалните по-добри от нашия са резултатите на Саудитска Арабия и Казахстан, две държави със силна държавна подкрепа в подготовката на отборите си.

PREPARATION FOR THE XXV YOUTH BALKANIADE IN MATHEMATICS 2021

Abstract. The paper contains the team selection tests for the team of Bulgaria at the Junior Balkan Math Olympiad 2021 as well as an overview of the team results. The included materials can be useful for the math contest preparation classes in Junior high school.

Keywords: math contests; JBMO; junior high school; TST

✉ **Assoc. Prof. Ivaylo Kortezov, PhD**
Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of Sciences
Acad. G. Bonchev St., Block 8
1113 Sofia, Bulgaria
E-mail: kortezov@math.bas.bg

✉ **Emil Karlov**
E-mail: karlovemil@gmail.com

✉ **Miroslav Marinov**
E-mail: miri_plovdiv@abv.bg