https://doi.org/10.53656/math2021-5-3-res

Конкурсни задачи
Contest Problems
Рубриката се води от проф. д.н. Емил Колев

РЕШЕНИЯ НА КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ БРОЙ 4, 2021 Г.

Задача 1. Намерете всички взаимно прости естествени числа a и b, за които $\frac{a}{b} = b,a$.

(Забележка: ако a = 13 и b = 79, то $b,a = 79,13$)

Решение. Нека числото a има k цифри. Тогава

$\frac{a}{b} = b + \frac{a}{10^k} \Leftrightarrow ab = (a - b^2)10^k$.Тъй като a и b са взаимно прости, то $a - b^2$ е взаимно просто и с a и с b. Следователно $\alpha - b^2 = 1$ и получаваме $ab = 10^k$,

като a е k-цифрено число. Това е възможно само когато b е едноцифрено число или 10, и тъй като b дели 10^k, то b = 1, 2, 4, 5, 8 или 10. За всяка от тези стойности намираме $a = b^2 + 1$ и проверяваме верността на равенството от условието. Получаваме единствено решение a = 5, b = 2.

Задача 2. Окръжността k с център O е описана около триъгълник ABC. Точка M е средата на дъгата BC от k, която не съдържа точката A. Правите през O, успоредни на MB и MC, пресичат AB и AC съответно в точки K и L. Ако перпендикулярът от върха A към BC пресича k в точка N, докажете, че $NK = NL$.

Решение. Тъй като $\measuredangle ABM = \beta + \frac{\alpha}{2}$ и OK е успоредна на NB, то $\measuredangle BKO = \gamma + \frac{\alpha}{2}$. Следователно $\measuredangle BOK = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Аналогично $\measuredangle CLO = \beta + \frac{\alpha}{2}$ и $\measuredangle COL = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Тъй като OB=OC=R и $\sin\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right) = \sin\left(\gamma + \frac{\alpha}{2}\right)$, то от синусовата теорема за триъгълниците KBO и CLO получаваме $KB = CL = \dfrac{R\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}+\beta\right)}{\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}$. За да докажем, че NK=NL, използваме косинусовата теорема за триъгълниците NBK и NCL. Тъй като $NB = 2R\cos\beta$ и $NB = 2R\cos\gamma$, то е достатъчно да докажем, че $\cos\beta - \cos\gamma = \dfrac{\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\sin(\gamma-\beta)}{\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}+\gamma\right)}$. Това равенство следва директно от $\cos\beta - \cos\gamma = 2\sin\left(\dfrac{\gamma-\beta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\beta+\gamma}{2}\right) = 2\sin\left(\dfrac{\gamma-\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ и $\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}+\gamma\right) = \cos\left(\dfrac{\beta-\gamma}{2}\right)$.

Задача 3. Дадена е точка *P,* външна за окръжност *C*. Отсечките *PA* и *PB* са допирателни към *C*, а точка *K* е произволна точка от отсечката *AB*. Описаната около триъгълник *PBK* окръжност пресича за втори път *C* в точка *T*. Точка *P'* е симетричната на *P* относно *A*. Докажете, че $\measuredangle PBT = \measuredangle P'KA$.

Решение. Тъй като KTPB е вписан четириъгълник $\measuredangle TAK = \measuredangle TBP$ и $\measuredangle AKT = \measuredangle BPT$. Следователно $\triangle TAK \sim \triangle TBP$, откъдето получаваме $\dfrac{TA}{TB} = \dfrac{AK}{BP} = \dfrac{AK}{AP'} \Rightarrow \dfrac{AP'}{TB} = \dfrac{AK}{TA}$. Това равенство заедно с $\measuredangle P'AK = \measuredangle BTA$ означава, че $\triangle P'AK \sim \triangle BTA$ и следователно $\measuredangle P'KA = \measuredangle BAT = \measuredangle PBT$.