https://doi.org/10.53656/math2021-6-9-res

Problems and Solutions
Конкурсни задачи
Рубриката се води от проф. д.н. Емил Колев

РЕШЕНИЯ НА КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ
БРОЙ 5, 2021 Г.

Задача 1. Число, което е точен квадрат на естествено число, се записва с няколко единици и една двойка. Докажете, че това число се дели на 11.

Решение. Нека M е такова число. Можем да го запишем като

$$\mathrm{M} = \underbrace{11\ldots1}_{m}\,2\,\underbrace{11\ldots1}_{n}$$

където $m, n \geq 0$ са броят на единиците съответно преди и след цифрата 2.

Тъй като няма точен квадрат, завършващ на 2: $n \geq 1$.

$$M = (1 + 10^1 + \cdots + 10^{n-1}) + 2.10^n + 10^{n+1}(1 + 10^1 + \cdots + 10^{m-1}) =$$

$$\frac{10^n - 1}{9} + 2.10^n + \frac{10^{n+1}(10^m - 1)}{9} = \frac{10^n(9 + 10^{m+1}) - 1}{9}$$

Знаменателят е точен квадрат, значи числителят също е точен квадрат.

Очевидно числителят е нечетно число, следователно е $1\ (mod\, 4)$.

Ако $n \geq 2: 10^n \equiv 0\ (mod\, 4) \Rightarrow 10^n(9 + 10^{m+1}) - 1 \equiv -1\ (mod\, 4)$ – противоречие. Следователно $n = 1$ и

$$M = \frac{10^{m+2} + 89}{9}$$

Тъй като $10^{m+2} + 89 \equiv (-1)^{m+2} + 1\ (mod\, 11)$, е достатъчно да докажем, че m е нечетно.

Да допуснем обратното. Тогава

$$10^{m+2} + 89 = r^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(r + 10^{\frac{m+2}{2}}\right)\left(r - 10^{\frac{m+2}{2}}\right) = 89$$

Числото 89 е просто и $r - 10^{\frac{m+2}{2}} < r + 10^{\frac{m+2}{2}}$, следователно $r + 10^{\frac{m+2}{2}} = 89, r - 10^{\frac{m+2}{2}} = 1$, откъдето $10^{\frac{m+2}{2}} = 44$, което е невъзможно.

Задача 2. Квадрат 2021×2021 е разделен на квадрати 1×1 и 2×2. Докажете, че има ред от квадрата, който пресичат нечетен брой от квадратите на разделянето.

Решение. Да допуснем, че твърдението не е вярно, т.е. всеки ред пресича четен брой квадрати. Нека квадратите 2×2, които се пресичат от някой ред, са x на брой. Тъй като всички останали квадрати са 1×1, то този ред пресича x квадрата 2×2 и $2021-2x$ квадрата 1×1, т.е. общо $x+2021-2x=2021-x$ квадрата. Следователно x е нечетно число, което означава, че всеки ред пресича нечетен брой квадрати 2×2.

Да номерираме редовете на квадрата от долу нагоре с 1,2,…,2021. Като приложим доказаното по-горе за първия ред, получаваме, че броят на квадратите, които лежат изцяло в първите два реда, е нечетен. Сега същото свойство за втория ред дава, че броят на квадратите, които лежат изцяло във втория и третия ред, е четен. По индукция следва, че броят на квадратите 2×2, които лежат изцяло в i-ия и в $i+1$-ия ред, е нечетен при нечетно i и четен при четно i. Това означава, че броят на квадратите 2×2, които лежат изцяло в 2020-ия и в 2021-вия ред е четен. Това е противоречие с доказаното, че всеки ред пресича нечетен брой квадрати 2×2.

Задача 3: Дадени са различни естествени числа a, b и c, за които

$(a+b)(a+c)=(b+c)^2$

Докажете, че $(b-c)^2>8(b+c)$.

Решение. Нека d е най-големият общ делител на $a+b$ и $a+c$, т.е. $d=$ НОД$(a+b,a+c)$. Тогава d дели $(a+b)-(a+c)=b-c$, а от условието следва, че d дели $b+c$. Следователно d дели $(b+c)+(b-c)=2b$.

Ако съществува прост делител p на d, който дели b, то p дели a и c (тогава $a=pa_1$, $b=pb_1$ и $c=ca_1$) и равенството от условието се свежда до

$$(a_1+b_1)(a_1+c_1)=(b_1+c_1)^2.$$

В този случай трябва да докажем, че $p^2(b_1-c_1)^2>8(b_1+c_1)$, и тъй като $p^2(b_1-c_1)^2>(b_1-c_1)^2$, задачата се свежда до d=1 или d=2.

Ако d=2, получаваме $a+b=2m^2$, $a+c=2n^2$, като тогава $b+c=2mn$ и $b-c=2(m^2-n^2)$. В този случай трябва да докажем

$$4\left(m^2-n^2\right)^2>8.2.mn\Leftrightarrow\left(m^2-n^2\right)^2>4mn\Leftrightarrow(m-n)^2(m+n)^2>4mn$$

Последното неравенство е вярно, защото $m\neq n$, и тогава $(m-n)^2>1,(m+n)^2>4mn$.

Ако d=1, получаваме $a+b=m^2$, $a+c=n^2$, като тогава $b+c=mn$ и $b-c=m^2-n^2$.

В този случай трябва да докажем $\left(m^2-n^2\right)^2>8mn\Leftrightarrow(m-n)^2(m+n)^2>8mn$. Тъй като $b+c=mn$ и $b-c=m^2-n^2$ трябва да са с еднаква четност, то m и n са четни числа. Тогава $(m-n)^2\geq4$, а $(m+n)^2>4mn$ и неравенството е вярно.

Мартин Любомиров Димитров, София