https://doi.org/10.53656/math2022-1-9-res

РЕШЕНИЯ НА КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ
БРОЙ 6, 2021 Г.

Задача 1. Дадени са 9 различни естествени числа, всяко от които има прости делители, не по-големи от 3. Докажете, че произведението на някои три от тези числа е точен куб.

Решение: числата са представим във вида $2^{\alpha}3^{\beta}, \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$.

Нека разгледаме квадрат $(a_{ij}) = i, j$

0,0	0,1	0,2
1,0	1,1	1,2
2,0	2,1	2,2

като поставяме числото $2^{\alpha}3^{\beta}$ в клетка $\alpha\ mod\ 3, \beta mod\ 3$.

Ако е изпълнено едно от следните:

1. съществуват три числа на един ред или по един стълб или по един диагонал;

2. съществуват три числа в една клетка;

3. число в клетка-връх на квадрата и числа в средите на страните, несъдържащи този връх, например.

0,0	0,1	0,2
1,0	1,1	1,2
2,0	2,1	2,2

то произведението на трите числа е точен куб.

Затова нека считаме, че няма клетка с повече от две числа и не всички клетки съдържат по число.

Нека $x \geq 1$ клетки имат по две числа и y– по едно. Тогава $2x + y = 9 \Rightarrow y$ е нечетно. Решенията на това уравнение са $(1,7)$, $(2,5)$, $(3,3)$и $(4,1)(4,1)$, като заетите клетки при всяко от тях са съответно $8, 7, 6$ и 5.

Ще покажем, че няма как да имаме 5 заети клетки и да не са изпълнени 1 и 3.

Допускаме противното: имаме 5 заети клетки и 1 и 3 не са изпълнени.

Разглеждаме няколко случая в зависимост колко клетки в средите на страните са заети.

<table>
<tr><td>Случай 1: 4 клетки
<table><tr><td>0,0</td><td>0,1</td><td>0,2</td></tr><tr><td>1,0</td><td>1,1</td><td>1,2</td></tr><tr><td>2,0</td><td>2,1</td><td>2,2</td></tr></table></td><td colspan="2">Ако поставим 5-ото число във връх, ще е изпълнено 3.
Ако го поставим в 1,1, ще е изпълнено 1.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Случай 2: 3 клетки
<table><tr><td>0,0</td><td>0,1</td><td>0,2</td></tr><tr><td>1,0</td><td>1,1</td><td>1,2</td></tr><tr><td>2,0</td><td>2,1</td><td>2,2</td></tr></table></td><td>За да не е изпълнено 3:
<table><tr><td>0,0</td><td>0,1</td><td>0,2</td></tr><tr><td>1,0</td><td>1,1</td><td>1,2</td></tr><tr><td>2,0</td><td>2,1</td><td>2,2</td></tr></table></td><td>За да не е изпълнено 1:
<table><tr><td>0,0</td><td>0,1</td><td>0,2</td></tr><tr><td>1,0</td><td>1,1</td><td>1,2</td></tr><tr><td>2,0</td><td>2,1</td><td>2,2</td></tr></table></td></tr>
<tr><td colspan="2">Остават две клетки и две числа, следователно първи ред е запълнен, т.е. 1 е изпълнено.</td></tr>
<tr><td>Случай 3: 2 клетки
а)
<table><tr><td>0,0</td><td>0,1</td><td>0,2</td></tr><tr><td>1,0</td><td>1,1</td><td>1,2</td></tr><tr><td>2,0</td><td>2,1</td><td>2,2</td></tr></table></td><td colspan="2">За да не е изпълнено 3:
<table><tr><td>0,0</td><td>0,1</td><td>0,2</td></tr><tr><td>1,0</td><td>1,1</td><td>1,2</td></tr><tr><td>2,0</td><td>2,1</td><td>2,2</td></tr></table>Ако клетка 0,0 не е запълнена, то останалите три числа са по диагонала – противоречие с 1.
Ако клетка 0,0 е запълнена, то тъй като останалите две числа не могат да са едновременно в 1,1, някоя от тях е в 2,0 или в 0,2, т.е. следва запълнен стълб или ред – противоречие с 1.</td></tr>
<tr><td>б)
<table><tr><td>0,0</td><td>0,1</td><td>0,2</td></tr><tr><td>1,0</td><td>1,1</td><td>1,2</td></tr><tr><td>2,0</td><td>2,1</td><td>2,2</td></tr></table></td><td colspan="2">За да не е изпълнено 1:
<table><tr><td>0,0</td><td>0,1</td><td>0,2</td></tr><tr><td>1,0</td><td>1,1</td><td>1,2</td></tr><tr><td>2,0</td><td>2,1</td><td>2,2</td></tr></table>Остават 3 числа и два стълба, на които можем да ги сложим, следователно има стълб, съдържащ две от тях – противоречие с 1.</td></tr>
<tr><td>Случай 4: 1 клетка
<table><tr><td>0,0</td><td>0,1</td><td>0,2</td></tr><tr><td>1,0</td><td>1,1</td><td>1,2</td></tr><tr><td>2,0</td><td>2,1</td><td>2,2</td></tr></table></td><td colspan="2">По стълб 1 можем да сложим най-много едно число, следователно останалите 3 клетки са заети.
<table><tr><td>0,0</td><td>0,1</td><td>0,2</td></tr><tr><td>1,0</td><td>1,1</td><td>1,2</td></tr><tr><td>2,0</td><td>2,1</td><td>2,2</td></tr></table>Където и да сложим останалото число, ще образуваме диагонал – противоречие с 1.</td></tr>
<tr><td>Случай 5: 0 клетки
<table><tr><td>0,0</td><td>0,1</td><td>0,2</td></tr><tr><td>1,0</td><td>1,1</td><td>1,2</td></tr><tr><td>2,0</td><td>2,1</td><td>2,2</td></tr></table></td><td colspan="2">Остават 5 клетки и 5 числа. Те ще покриват диагоналите – противоречие с 1.</td></tr>
</table>

Задача 2. Намерете всички двойки естествени числа a и b, за които $\frac{a^2+b}{b^2-a}$ и $\frac{b^2+a}{a^2-b}$ са цели числа.

Решение: очевидно, ако (a, b)е решение, то и (b, a) е решение. Затова нека $b \geq a$.

Ако $b = 1 \Rightarrow a = 1$ и дробите не са дефинирани.

Следователно $b \geq 2 \Rightarrow b^2 > b \geq a \Rightarrow b^2 - a > 0 \Rightarrow \frac{a^2+b}{b^2-a} \in \mathbb{N} \Rightarrow a^2 + b \geq b^2 - a \Rightarrow a^2 - b^2 + b + a \geq 0 \Rightarrow (a + b)(a - b + 1) \geq 0 \Rightarrow b \leq a + 1$.

Комбинирайки с по-горе, получаваме $a \leq b \leq a + 1 \Rightarrow b \in \{a, a + 1\}$.

<u>Случай 1</u>: $b = a$. Тогава дробите са $\frac{b^2+b}{b^2-b} = \frac{b+1}{b-1} = 1 + \frac{2}{b-1} \Rightarrow (b - 1)|2 \Rightarrow b \in \{2, 3\}$. Следователно решения са $(2, 2)$ и $(3,3)$.

<u>Случай 2</u>: $b = a + 1$.Тогава $\frac{a^2+b}{b^2-a} = \frac{b^2-b+1}{b^2-b+1} = 1$, а $\frac{b^2+a}{a^2-b} = \frac{b^2+b-1}{b^2-3b+1}$.

Тъй като $b \geq 2b \geq 2$, знаменателят е отрицателен само при $b = 2$, при което $a = 1$. Заместваики в дробите, установяваме, че $(1,2)$ е решение.

При $b \geq 3$:
$\frac{b^2+b-1}{b^2-3b+1} = \frac{(b^2-3b+1)+(4b-2)}{b^2-3b+1} \Rightarrow (b^2 - 3b + 1)|(4b - 2) \Rightarrow 4b - 2 \geq b^2 - 3b + 1 \Rightarrow b \in \{3, 4, 5, 6\}$.
Проверяваме, че само при $b = 3$: $(b^2 - 3b + 1)|(4b - 2)$. Тогава $a = 2$ и $(2,3)$ е решение.

Като вземем предвид симетричните решения, получаваме всички решения: $(1, 2), (2,1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3,3)$.

Задача 3. Докажете, че за произволни положителни реални числа a, b и c е изпълнено неравенството

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 9(ab + bc + ca)$$

Решение: имаме
$(a^2 + x)(b^2 + x) = \left(a^2 + \sqrt{x}^2\right)\left(\sqrt{x}^2 + b^2\right) \geq \left(a\sqrt{x} + \sqrt{x}b\right)^2 = x(a + b)^2 (*)$,
като приложихме неравенството на Коши-Буняковски-Шварц.

От СА-СК $a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}$.

Тогава

$$(a^2+2)(b^2+2)=(a^2b^2+a^2+b^2+1)+a^2+b^2+3=\underbrace{(a^2+1)(b^2+1)}_{(*)}+(a^2+b^2)+3\geq$$

$$(a+b)^2+\frac{(a+b)^2}{2}+3=\frac{3}{2}(a+b)^2+3.$$

Известно е неравенството $\sum_{cyc}a^2\geq\sum_{cyc}ab\sum_{cyc}a^2\geq\sum_{cyc}ab$.

Тогава

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\geq\left(\frac{3}{2}(a+b)^2+3\right)(c^2+2)=\frac{3}{2}\underbrace{((a+b)^2+2)(c^2+2)}_{(*)}$$

$$\geq\frac{3}{2}.2(a+b+c)^2=3\left(\sum_{cyc}a^2+2\sum_{cyc}ab\right)\geq 9\sum_{cyc}ab$$

Мартин Любомиров Димитров – София

Редакцията на сп. „Математика и информатика“ награждава с годишен абонамент за списанието за 2022 г. Мартин Любомиров Димитров от София за предложените от него за този и предния брой решения на конкурсните задачи.