https://doi.org/10.53656/math2022-1-8-dvu

Educational Issues
Въпроси на преподаването

ДВУПАРАМЕТРИЧНА ЗАДАЧА ЗА ОПТИМАЛНО РАЗПРЕДЕЛЕНИЕ НА РЕСУРСИ

Проф. д-р Росен Николаев, доц. д-р Танка Милкова
Икономически университет – Варна

Резюме. Методите на линейното оптимиране са добре известни в литературата и практиката като едни от най-ефективните методи за оптимизиране на икономически явления и процеси. Линейните модели с детерминирани коефициенти са задълбочено изследвани, но все още има насоки, в които могат да бъдат доразвити изследванията, свързани с параметричните линейни оптимизационни модели. В настоящото изследване се използва графичният метод за решаване на двуфакторна линейна оптимизационна задача, за да се направи анализ на решението на задача за оптимално разпределение на ресурси при наличието на два параметъра в коефициентите пред неизвестните в едно от ограничителните условия.

Ключови думи: параметрично оптимиране; графичен метод

В практиката съществуват множество задачи, чиято формализация се осъществява с линеен оптимизационен модел. В областта на икономиката са известни редица подобни задачи, като задача за оптимални смеси, задача за разпределение на ресурси, транспортна задача, задача за назначенията и др. В литературата тези модели са задълбочено изследвани в класическия си вид и съществуват методи за тяхното решаване, както аналитични, така и числени (Atanasov et al. 2010; Atanasov et al. 2014; Atanasov &Milkova 2011; Bonev et al. 1989; Vil‘yams 1976; Goncharenko et al. 2013).

Недостатъчно задълбочено са застъпени задачите, при които част от изходните данни не са детерминирани, а са под формата на параметри, изменящи се в определени интервали. В редица учебници и учебни пособия се правят изследвания за случаите, в които или само коефициентите в целевата функция, или само десните страни в ограничителните условия зависят от един параметър.

В предишни свои разработки авторите на статията анализират задачи, при които има наличие на един параметър в коефициентите пред неизвестните в ограничителните условия, както и такива с параметър в коефициентите пред неизвестните както в ограничителните условия, така и в коефициентите в целевата функция. От практическа гледна точка, от значение са също случаите, когато параметричното изменение на коефициентите е независимо, т.е. всеки коефициент зависи от различен параметър.

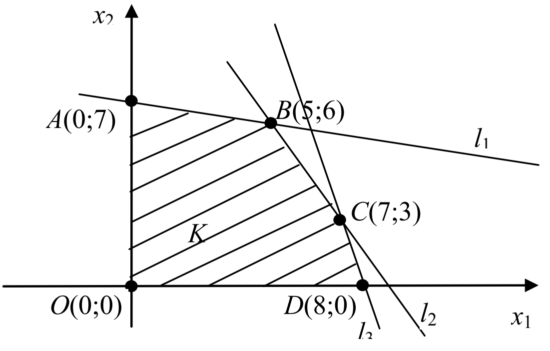
Целта, което си поставят авторите в настоящото изследване, е, като се позоват на графичния метод за решаване на двуфакторна линейна оптимизационна задача, да направят анализ при наличието на два параметъра в коефициентите пред неизвестните в едно от ограничителните условия.

Представената в статията методика за графично решаване на двуфакторна задача с два параметъра в едно от ограничителните условия може да се приложи за всяка двуфакторна задача на линейното оптимиране. Изследванията на авторите в настоящата разработка ще бъдат направени на базата на задачата за оптимално разпределение на ресурси. Разглеждаме конкретен пример, за който се прави пълен анализ на възможностите за оптимално решение в зависимост от изменение стойностите на параметрите в конкретни затворени интервали.

Математическият модел на задача има следния вид:

$$\begin{aligned}
&\max: Z = 5x_1 + 4x_2 \\
&\quad l_1:\ x_1 + 5x_2 \le 35 \\
&\quad l_2:\ 3x_1 + 2x_2 \le 27 \\
&\quad l_3:\ 3x_1 + x_2 \le 24 \\
&\quad l_4:\ \varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 \le 72 \\
&\quad l_5:\ x_1 \ge 0 \\
&\quad l_6:\ x_2 \ge 0 \\
&\quad \varepsilon_1 \in [8;\, 24],\quad \varepsilon_2 \in [9;\, 36]
\end{aligned}$$

Допустимото множество K, определено от правите l_1, l_2, l_3, l_5 и l_6, е показано на фиг. 1.



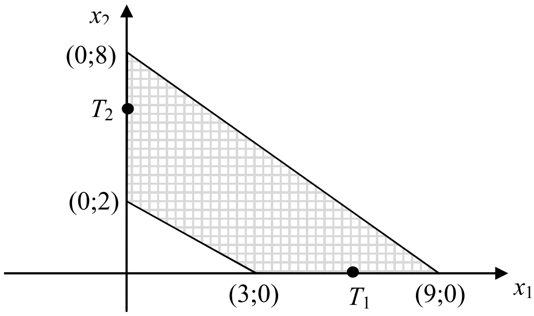
Фигура 1. Допустимото множество K, определено от правите l_1, l_2, l_3, l_5 и l_6

Това е границата и вътрешността на петоъгълника $OABCD$, където $l_1 \cap Ox_2 = \{A\}$, $l_1 \cap l_2 = \{B\}$, $l_2 \cap l_3 = \{C\}$ и $l_3 \cap Ox_1 = \{D\}$. Като сравним $Z(A)$, $Z(B)$, $Z(C)$ и $Z(D)$, установяваме, че в множеството K от фиг. 1.

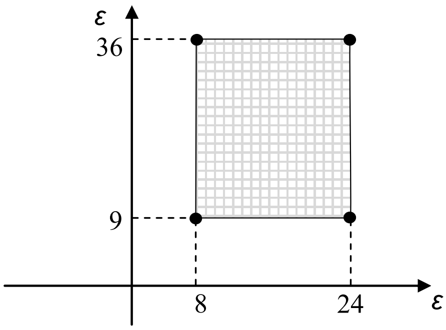
$$\max Z = Z(B) = Z(5;\,6) = 49\,.$$

Освен това $l_4 \cap Ox_1 = T_1\left(\frac{72}{\varepsilon_1};\,0\right)$ и $l_4 \cap Ox_2 = T_2\left(0;\,\frac{72}{\varepsilon_2}\right)$ и тъй като $\varepsilon_1 \in [8;\,24]$, то $\frac{72}{\varepsilon_1} \in [3;\,9]$, а $\varepsilon_2 \in [9;\,36]$, следователно $\frac{72}{\varepsilon_2} \in [2;\,8]$. Предвид това, че ε_1 и ε_2 са независими параметри, положението на точка T_1 не зависи от положението на точка T_2.

Възможните положения на точките T_1 и T_2 са показани на фиг. 2 и отсечките T_1T_2 запълват изцяло защрихования четириъгълник, а възможните точки $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ са изобразени на фиг. 3а.



Фигура 2. Възможни положения на точките T_1 и T_2



Фигура 3а. Възможни положения на точките $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Ще разгледаме пресечните точки на l_4 с правите l_1, l_2 и l_3, които ще означим съответно с P_1, P_2 и P_3.

$$P_1 : \left| \begin{array}{l} x_1 + 5x_2 = 35 \\ \varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 = 72 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 35 - 5x_2 \\ 35\varepsilon_1 - 5\varepsilon_1 x_2 + \varepsilon_2 x_2 = 72 \end{array} \Rightarrow x_2 = \frac{72 - 35\varepsilon_1}{\varepsilon_2 - 5\varepsilon_1},\ x_1 = \frac{35\varepsilon_2 - 360}{\varepsilon_2 - 5\varepsilon_1} \Rightarrow$$

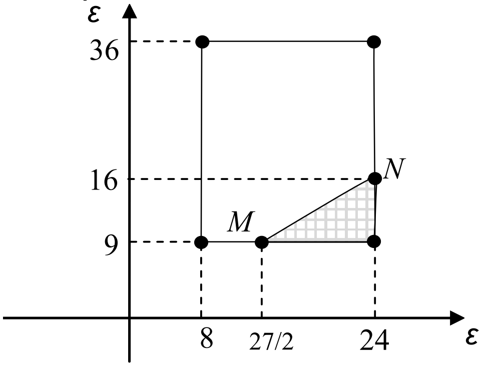
$$\Rightarrow P_1\left(\frac{35\varepsilon_2 - 360}{\varepsilon_2 - 5\varepsilon_1}, \frac{72 - 35\varepsilon_1}{\varepsilon_2 - 5\varepsilon_1} \right).$$

Ако на фиг. 3а построим правата $\varepsilon_2 = 5\varepsilon_1$, се вижда, че за допустимите точки $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ винаги $\varepsilon_2 \neq 5\varepsilon_1$, т.е. правата $T_1 T_2$ не е възможно да е успоредна на правата l_1. Нещо повече, винаги $\varepsilon_2 - 5\varepsilon_1 < 0$.

$$P_2 : \left| \begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 = 27 \\ \varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 = 72 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = \dfrac{27 - 3x_1}{2} \\ \varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 . \dfrac{27 - 3x_1}{2} = 72 \end{array} \Rightarrow x_1 = \frac{144 - 27\varepsilon_2}{2\varepsilon_1 - 3\varepsilon_2},\ x_2 = \frac{54\varepsilon_1 - 432}{2\varepsilon_1 - 3\varepsilon_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_2\left(\frac{144 - 27\varepsilon_2}{2\varepsilon_1 - 3\varepsilon_2}, \frac{54\varepsilon_1 - 432}{2\varepsilon_1 - 3\varepsilon_2} \right).$$

Да разгледаме знаменателя на координатите на точката P_2. Правата $\varepsilon_2 = \dfrac{2}{3}\varepsilon_1$ пресича допустимото множество за $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ в отсечката MN (фиг. 3б), където $M\left(\dfrac{27}{2}; 9 \right)$ и $N(24; 16)$.



Фигура 3б. Допустимо множество за $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ в отсечката MN

Ако $(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2) \in MN$, то $T_1T_2 \parallel l_2$. Ако $(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2)$ са в защрихования триъгълник на фиг. 3б, знаменателят в координатите на точка P_2 е положителен, а в останалата част от правоъгълника е отрицателен.

$$P_3: \left| \begin{array}{l} 3x_1 + x_2 = 24 \\ \varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 = 72 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = 24 - 3x_1 \\ \varepsilon_1 x_1 + 24\varepsilon_2 - 3\varepsilon_2 x_1 = 72 \end{array} \Rightarrow x_1 = \frac{72 - 24\varepsilon_2}{\varepsilon_1 - 3\varepsilon_2},\ x_2 = \frac{24\varepsilon_1 - 216}{\varepsilon_1 - 3\varepsilon_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_3\left(\frac{72 - 24\varepsilon_2}{\varepsilon_1 - 3\varepsilon_2}, \frac{24\varepsilon_1 - 216}{\varepsilon_1 - 3\varepsilon_2} \right).$$

Ако построим правата $\varepsilon_2 = \dfrac{1}{3}\varepsilon_1$, от фиг. 3а се вижда, че тя няма общи точки с допустимото множество за $(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2)$ и винаги $\varepsilon_1 - 3\varepsilon_2 < 0$.

Предстои да проверим разположението на точките T_1, T_2, P_1, P_2 и P_3 по границата на допустимото множество K от фиг. 1.

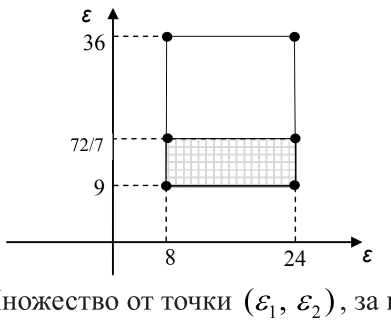
1) $T_1 \overset{?}{\in} OD \Leftrightarrow \dfrac{72}{\varepsilon_1} \le 8 \Leftrightarrow \varepsilon_1 \ge 9 \Rightarrow \varepsilon_1 \in [9;\ 24],\ T_1 \in K$.

2. $T_2 \overset{?}{\in} OA \Leftrightarrow \dfrac{72}{\varepsilon_2} \le 7 \Leftrightarrow \varepsilon_2 \ge \dfrac{72}{7} \Rightarrow \varepsilon_2 \in \left[\dfrac{72}{7},\ 36\right],\ T_2 \in K$.

3. $P_1 \overset{?}{\in} AB \Leftrightarrow 0 \le x_{P_1} \le x_B \Leftrightarrow 0 \le \dfrac{35\varepsilon_2 - 360}{\varepsilon_2 - 5\varepsilon_1} \le 5 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 35\varepsilon_2 - 360 \le 0 \\ 35\varepsilon_2 - 360 \ge 5\varepsilon_2 - 25\varepsilon_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \varepsilon_2 \le \dfrac{72}{7} \\ 6\varepsilon_2 + 5\varepsilon_1 \ge 72 \end{array} \right. .$$

Следователно за всички точки от защрихования правоъгълник на фиг. 3в $P_1 \in K$, т.е. $\varepsilon_1 \in [8,\ 24]$, $\varepsilon_2 \in \left[9,\ \dfrac{72}{7}\right]$



Фигура 3в. Множество от точки $(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2)$, за които $P_1 \in K$

$P_2 \overset{?}{\in} BC$. Разглеждаме два случая: когато $2\varepsilon_1 - 3\varepsilon_2 < 0$ и когато $2\varepsilon_1 - 3\varepsilon_2 > 0$.

В първия случай разглеждаме първата координата на P_2 и виждаме, че тя е по-голяма или равна на 9, докато всички точки на K имат първа координата по-малка или равна на 8:

$$\frac{144-27\varepsilon_2}{2\varepsilon_1-3\varepsilon_2} = \frac{144+9(2\varepsilon_1-3\varepsilon_2)-18\varepsilon_1}{2\varepsilon_1-3\varepsilon_2} = 9 + \frac{144-18\varepsilon_1}{2\varepsilon_1-3\varepsilon_2} \geq 9 .$$

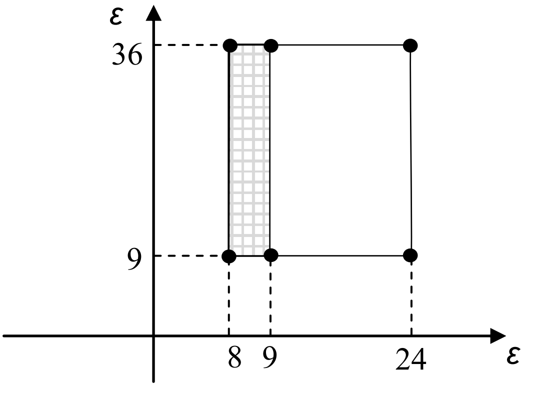
Във втория случай веднага се вижда, че първата координата на P_2 е отрицателна, и отново заключаваме, че P_2 не е в K.

Следователно за всички точки $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ от защрихования правоъгълник на фиг. 3а $P_2 \notin K$.

$$P_3 \overset{?}{\in} CD \Leftrightarrow x_C \leq x_{P_3} \leq x_D \Leftrightarrow 7 \leq \frac{72-24\varepsilon_2}{\varepsilon_1-3\varepsilon_2} \leq 8 \text{ и } \varepsilon_1 - 3\varepsilon_2 < 0 \Rightarrow$$

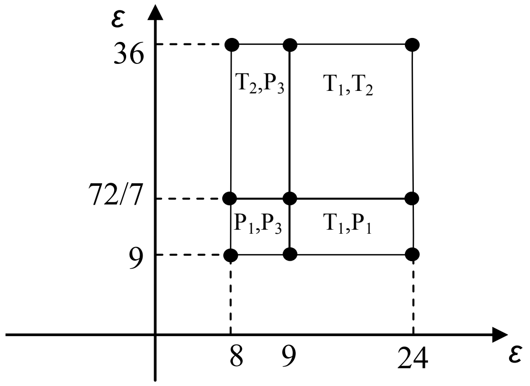
$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} 7\varepsilon_1 - 21\varepsilon_2 \geq 72 - 24\varepsilon_2 \\ 72 - 24\varepsilon_2 \geq 8\varepsilon_1 - 24\varepsilon_2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 7\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2 \geq 72 \\ \varepsilon_1 \leq 9 \end{array} \right. .$$

Решението на последната система е защрихованият правоъгълник на фиг. 3г, т.е. за $\varepsilon_1 \in [8, 9]$, $\varepsilon_2 \in [9, 36]$ $P_3 \in K$.



Фигура 3г. Множество от точки $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, за които $P_3 \in K$

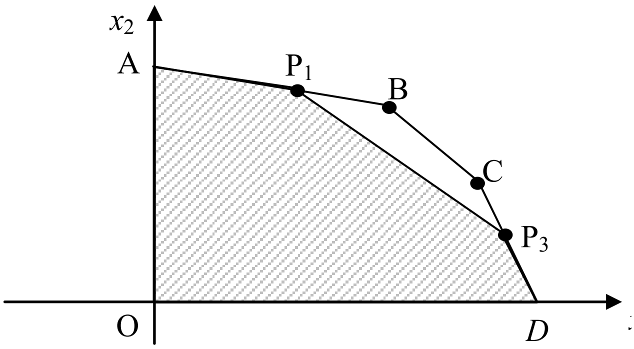
На фиг. 4 за всяка от частите от допустимото множество за $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ е дадено кои от точките T_1, T_2, P_1, P_2, P_3 са от границата на допустимото множество K от фиг. 1.



Фигура 4. Точки от границата на допустимото множество K в зависимост от разположението на точките $(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2)$

В следващите четири случая ще разгледаме възможностите за получаване решението на изходната задача, включвайки и четвъртото ограничително условие в зависимост от разположението на точките $(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2)$ във всеки от четирите правоъгълника на фиг. 4.

Случай 1: $(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2)\in I_1:\ \ \varepsilon_1\in[8,\ 9];\ \varepsilon_2\in\left[9,\ \dfrac{72}{7}\right]$ (фиг. 5).



Фигура 5. Случай 1

Само точките P_1 и P_3 са по границата на K и допустимото множество в този случай е петоъгълникът ODP_3P_1A.

$Z(0;0)=0,\ \ Z(A)=Z(0;7)=28$,

$$Z(P_1)=5.\frac{35\varepsilon_2-360}{\varepsilon_2-5\varepsilon_1}+4.\frac{72-35\varepsilon_1}{\varepsilon_2-5\varepsilon_1}=\frac{175\varepsilon_2-140\varepsilon_1-1512}{\underbrace{\varepsilon_2-5\varepsilon_1}_{<0}},$$

$$Z(P_1)=5.\frac{35\varepsilon_2-360}{\varepsilon_2-5\varepsilon_1}+4.\frac{72-35\varepsilon_1}{\varepsilon_2-5\varepsilon_1}=\frac{175\varepsilon_2-140\varepsilon_1-1512}{\underbrace{\varepsilon_2-5\varepsilon_1}_{<0}},$$

$$Z(P_3)=5.\frac{72-24\varepsilon_2}{\varepsilon_1-3\varepsilon_2}+4.\frac{24\varepsilon_1-216}{\varepsilon_1-3\varepsilon_2}=\frac{96\varepsilon_1-120\varepsilon_2-504}{\underbrace{\varepsilon_1-3\varepsilon_2}_{<0}},$$

$Z(D)=5.8=40$ и $Z(D)>Z(A)>Z(0)$.

Ще сравним $Z(D)$ и $Z(P_1)$.

$$\frac{175\varepsilon_2-140\varepsilon_1-1512}{\varepsilon_2-5\varepsilon_1}\overset{?}{\geq}40 \Leftrightarrow 175\varepsilon_2-140\varepsilon_1-1512\overset{?}{<}40\varepsilon_2-200\varepsilon_1$$

$$135\varepsilon_2+60\varepsilon_1-1512\overset{?}{<}0 \quad :3$$

$45\varepsilon_2+20\varepsilon_1-504<0$, което няма решение за $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ в разглежданите интервали в този случай. Следователно $Z(D)>Z(P_1)$.

Остава да сравним $Z(D)$ и $Z(P_3)$:

$$\frac{96\varepsilon_1-120\varepsilon_2-504}{\varepsilon_1-3\varepsilon_2}\overset{?}{\geq}40 \Leftrightarrow 96\varepsilon_1-120\varepsilon_2-504\overset{?}{\leq}40\varepsilon_1-120\varepsilon_2 \Leftrightarrow \varepsilon_1\leq\frac{504}{56}=9 \quad .$$

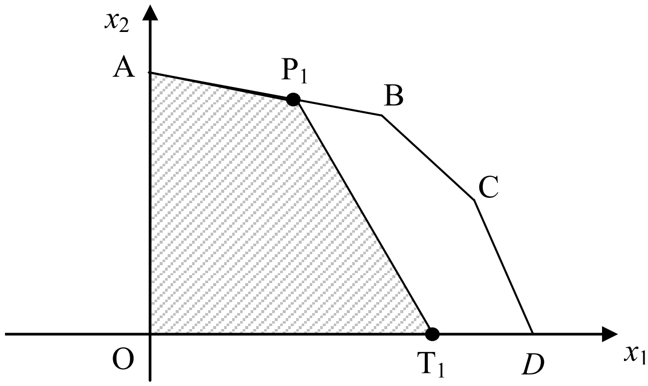
Следователно в цялото разглеждано множество за $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ в този случай $Z_{\max}=Z(P_3)=\dfrac{96\varepsilon_1-120\varepsilon_2-504}{\varepsilon_1-3\varepsilon_2}=f_1(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$.

$f_1(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ е дробно-линейна функция в изпъкналото множество I_1 и нейният максимум се получава във върхова точка:

$$f_1(8,9)\approx 42,95,\ f_1\left(8,\frac{72}{7}\right)\approx 42,45,\ f_1(9,9)=40,\ f_1\left(9,\frac{72}{7}\right)=40.$$

Следователно $\underset{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\in I_1}{MAX} Z_{\max}=Z\left(P_3^*(8;9)\right)=42,95$ и $P_3^*(\underbrace{8}_{\varepsilon_1},\underbrace{9}_{\varepsilon_2})=\left(\underbrace{\frac{144}{19}}_{x_{P_3}},\underbrace{\frac{24}{19}}_{y_{P_3}}\right)$.

Случай 2: $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\in I_2$: $\varepsilon_1\in[9,24]$; $\varepsilon_2\in\left[9,\frac{72}{7}\right]$ (фиг. 6).



Фигура 6. Случай 2

Допустимото множество за изходната задача в този случай е четириъгълникът OT_1P_1A.

$Z(0;0)=0$, $Z(0;7)=Z(A)=28$, $Z(P_1)=\dfrac{175\varepsilon_2-140\varepsilon_1-1512}{\underbrace{\varepsilon_2-5\varepsilon_1}_{<0}}$ (от случай 1),

$$Z(T_1)=Z\left(\frac{72}{\varepsilon_1},\,0\right)=\frac{360}{\varepsilon_1}.$$

Сравняваме $Z(A)$ и $Z(T_1)$:

$\dfrac{360}{\varepsilon_1}\overset{?}{\geq}28 \iff \varepsilon_1\leq\dfrac{90}{7}$. Следователно разглеждаме два случая:

А) Ако $\varepsilon_1\in\left[9,\,\dfrac{90}{7}\right]$, $\varepsilon_2\in\left[9,\,\dfrac{72}{7}\right]\equiv I_{2A}$, $Z(T_1)\geq Z(A)$;

Б) Ако $\varepsilon_1\in\left[\dfrac{90}{7},\,24\right]$, $\varepsilon_2\in\left[9,\,\dfrac{72}{7}\right]\equiv I_{2\acute{A}}$, $Z(A)\geq Z(T_1)$.

И за двата случая ще направим сравнение и със $Z(P_1)$:

В случай А): $Z(T_1)\overset{?}{\geq}Z(P_1) \iff \dfrac{360}{\varepsilon_1}\geq\dfrac{175\varepsilon_2-140\varepsilon_1-1512}{\underbrace{\varepsilon_2-5\varepsilon_1}_{<0}}$.

Имайки предвид, че $\varepsilon_1\in\left[9,\,\dfrac{90}{7}\right]$, то $Z(T_1)\in[15;\,28]$. $Z(P_1)$ е дробно-линейна функция на ε_1 и ε_2 и $\max Z(P_1)$ и $\min Z(P_1)$ се достигат върху върхове на множеството $(\varepsilon_1;\, \varepsilon_2)$: $Z(P_1(9;\, 9)) \approx 33{,}25$, $Z\left(P_1\left(9;\, \frac{72}{7}\right)\right) = 28$,

$Z\left(P_1\left(\frac{90}{7};\, 9\right)\right) \approx 31{,}42$, $Z\left(P_1\left(\frac{90}{7};\, \frac{72}{7}\right)\right) = 28$.

Следователно за $(\varepsilon_1;\, \varepsilon_2) \in I_{2A}$, $Z(P_1) \geq Z(T_1)$. Следователно за $(\varepsilon_1;\, \varepsilon_2) \in I_{2A}$, $Z_{\max} = Z(P_1)$.

В случай Б): $(\varepsilon_1;\, \varepsilon_2) \in I_{2Б}$: $Z(A) \overset{?}{\geq} Z(P_1)$, $28 \overset{?}{\geq} \dfrac{175\varepsilon_2 - 140\varepsilon_1 - 1512}{\underbrace{\varepsilon_2 - 5\varepsilon_1}_{<0}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 28\varepsilon_2 - 140\varepsilon_1 \overset{?}{\leq} 175\varepsilon_2 - 140\varepsilon_1 - 1512 \Leftrightarrow 1512 \overset{?}{\leq} 147\varepsilon_2 \Leftrightarrow \varepsilon_2 \geq \frac{1512}{147} = \frac{72}{7},$$

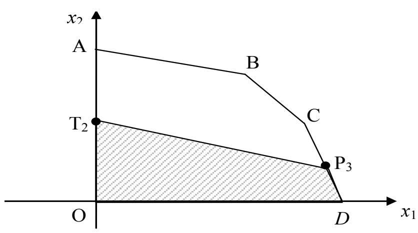
но $\varepsilon_2 \leq \dfrac{72}{7}$, следователно за $\forall(\varepsilon_1;\, \varepsilon_2) \in I_{2\acute{A}}$, $Z(A) \leq Z(P_1)$.

От резултатите в А) и Б) следва, че за $\forall(\varepsilon_1;\, \varepsilon_2) \in I_2$, $Z_{\max} = Z(P_1) = \dfrac{175\varepsilon_2 - 140\varepsilon_1 - 1512}{\varepsilon_2 - 5\varepsilon_1} = f_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

$f_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ като дробно-линейна функция достига своя максимум във върхова точка: $f_2(9,\, 9) \approx 33{,}25$; $f_2\left(9,\, \frac{72}{7}\right) = 28$; $f_2(24,\, 9) \approx 29{,}7$; $f_2\left(24,\, \frac{72}{7}\right) = 28$.

Следователно $\max\limits_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in I_2} Z_{\max} = Z(P_1^*(9;\, 9)) = 33{,}25$ и $P_1^*(\underbrace{9}_{\varepsilon_1},\, \underbrace{9}_{\varepsilon_2}) = \left(\underbrace{\frac{9}{4}}_{x_{P_1}},\, \underbrace{\frac{37}{4}}_{y_{P_1}}\right)$.

Случай 3: $(\varepsilon_1,\, \varepsilon_2) \in I_3$: $\varepsilon_1 \in [8,\, 9]$; $\varepsilon_2 \in \left[\frac{72}{7},\, 36\right]$ (фиг. 7).



Фигура 7. Случай 3

Допустимото множество за изходната задача в този случай е четириъгълникът ODP_3T_2.

$Z(0;0)=0$, $Z(D)=Z(8;0)=40$, $Z(T_2)=Z\left(0,\dfrac{72}{\varepsilon_2}\right)=\dfrac{288}{\varepsilon_2}$,

$Z(P_3)=\dfrac{96\varepsilon_1-120\varepsilon_2-504}{\underbrace{\varepsilon_1-3\varepsilon_2}_{<0}}$ (от случай 1).

$Z(D)>Z(0)$ и сравняваме $Z(T_2)$ със $Z(D)$:

$\dfrac{288}{\varepsilon_2}\overset{?}{\geq}40 \Leftrightarrow \varepsilon_2\overset{?}{\leq}\dfrac{288}{40}=\dfrac{36}{5}=7,2$, но $\varepsilon_2>10 \Rightarrow$ за $(\varepsilon_1,\,\varepsilon_2)\in I_3$, $Z(D)>Z(T_2)$.

Сега сравняваме $Z(D)$ със $Z(P_3)$: $\dfrac{96\varepsilon_1-120\varepsilon_2-504}{\underbrace{\varepsilon_1-3\varepsilon_2}_{<0}}\overset{?}{\geq}40 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ 96\varepsilon_1-120\varepsilon_2-504\overset{?}{\leq}40\varepsilon_1-120\varepsilon_2 \Leftrightarrow 56\varepsilon_1\leq 504 \Leftrightarrow \varepsilon_1\leq 9$, както е и в нашия случай.

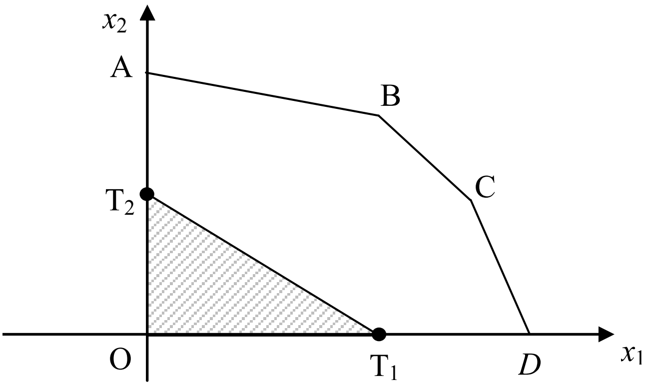
Следователно за $(\varepsilon_1,\,\varepsilon_2)\in I_3$, $Z_{\max}=Z(P_3)=\dfrac{96\varepsilon_1-120\varepsilon_2-504}{\varepsilon_1-3\varepsilon_2}=f_1(\varepsilon_1,\,\varepsilon_2)$ и както в случай 1, $Z_{\max}$ достига своя максимум относно $(\varepsilon_1,\,\varepsilon_2)$ във връх на множеството I_3:

$f_1\left(8,\,\dfrac{72}{7}\right)=42,45$; $f_1(8,\,36)=40,56$; $f_1\left(9,\,\dfrac{72}{7}\right)=40$; $f_1(9,\,36)=40$.

Следователно:

$$\max_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\in I_3} Z_{\max}=Z\left(P_3^*\left(8;\,\frac{72}{7}\right)\right)=42,45 \text{ и } P_3^*\left(\underbrace{8}_{\varepsilon_1},\,\underbrace{\frac{72}{7}}_{\varepsilon_2}\right)=\left(\underbrace{7,65}_{x_{P_3^*}};\,\underbrace{1,05}_{y_{P_3^*}}\right).$$

Случай 4: $(\varepsilon_1,\,\varepsilon_2)\in I_4$: $\varepsilon_1\in[9,\,24]$; $\varepsilon_2\in\left[\dfrac{72}{7},\,36\right]$ (фиг. 8).



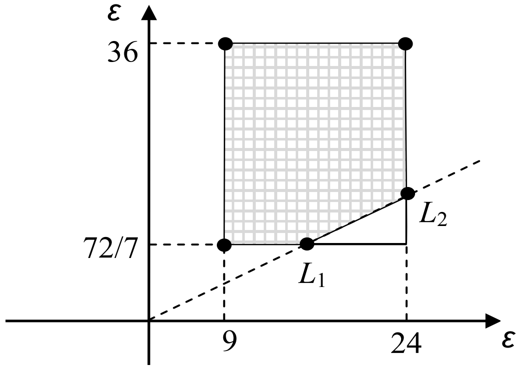
Фигура 8. Случай 4

Допустимото множество за изходната задача в този случай е триъгълникът OT_1T_2.

$Z(0;0)=0$, $Z(T_1)=\dfrac{360}{\varepsilon_1}$, $Z(T_2)=\dfrac{288}{\varepsilon_2}$ и сравняваме $Z(T_1)$ със $Z(T_2)$:

$\dfrac{360}{\varepsilon_1}\overset{?}{\geq}\dfrac{288}{\varepsilon_2} \Leftrightarrow \varepsilon_2 \geq \dfrac{4}{5}\varepsilon_1$.

Правата $\varepsilon_2=\dfrac{4}{5}\varepsilon_1$ пресича границата на множеството I_4 в точките $L_1\left(\dfrac{90}{7};\ \dfrac{72}{7}\right)$ и $L_2\left(24;\ \dfrac{96}{5}\right)$ (фиг. 9).



Фигура 9. Пресичане на множеството I_4 от правата $\varepsilon_2=\dfrac{4}{5}\varepsilon_1$

$Z(T_1) \geq Z(T_2)$ за $(\varepsilon_1,\, \varepsilon_2)$ от защрихованата част на фиг. 9, т.е.:

$$(\varepsilon_1,\, \varepsilon_2) \in I_{4A}: \left| \begin{array}{l} \varepsilon_1 \in [9,\, 24] \\ \varepsilon_2 \in \left[\dfrac{72}{7},\, 36\right] \\ \varepsilon_2 \geq \dfrac{4}{5}\varepsilon_1 \end{array} \right.$$

и $Z(T_2) \geq Z(T_1)$ за $(\varepsilon_1,\, \varepsilon_2) \in I_4 \setminus I_{4A}$.

1) $(\varepsilon_1,\, \varepsilon_2) \in I_{4A} \Rightarrow Z_{\max} = Z(T_1) = \dfrac{360}{\varepsilon_1}$ и $\max Z_{\max}$ относно $(\varepsilon_1,\, \varepsilon_2)$ е при $\min \varepsilon_1 \Rightarrow$ при $\varepsilon_1 = 9$ и $\max\limits_{(\varepsilon_1,\, \varepsilon_2) \in I_{4A}} Z_{\max} = 40 = Z(8;\, 0) = Z(D)$ и се постига за всички точки $(\varepsilon_1,\, \varepsilon_2)$ върху отсечката с краища $\left(9,\, \dfrac{72}{7}\right)$ и $(9,\, 36)$.

2) $(\varepsilon_1,\, \varepsilon_2) \in I_{4A} \Rightarrow Z_{\max} = Z(T_2) = \dfrac{288}{\varepsilon_2}$ и $\max Z_{\max}$ относно $(\varepsilon_1,\, \varepsilon_2)$ е при $\min \varepsilon_2 \Rightarrow$ при $\varepsilon_2 = \dfrac{72}{7}$ и $\max\limits_{(\varepsilon_1,\, \varepsilon_2) \in I_4 \setminus I_{4A}} Z_{\max} = 28 = Z(0;\, 7) = Z(T_2) = Z(A)$ и се постига за всички точки $(\varepsilon_1,\, \varepsilon_2)$ върху отсечката с краища $\left(\dfrac{90}{7},\, \dfrac{72}{7}\right)$ и $\left(24,\, \dfrac{72}{7}\right)$.

От изследванията в четирите случая можем да направим следното обобщение:

1. За $(\varepsilon_1,\, \varepsilon_2) \in I_1:\ \varepsilon_1 \in [8;\, 9];\ \varepsilon_2 \in \left[9;\, \dfrac{72}{7}\right]$, $\max Z = Z(7{,}58;\ 1{,}26) = 42{,}95$ и се получава при $\varepsilon_1 = 8,\ \varepsilon_2 = 9$.

2. За $(\varepsilon_1,\, \varepsilon_2) \in I_2:\ \varepsilon_1 \in [9;\, 24];\ \varepsilon_2 \in \left[9;\, \dfrac{72}{7}\right]$, $\max Z = Z(2{,}25;\ 9{,}25) = 33{,}25$ и се получава при $\varepsilon_1 = 9,\ \varepsilon_2 = 9$.

3. За $(\varepsilon_1,\, \varepsilon_2) \in I_3:\ \varepsilon_1 \in [8;\, 9];\ \varepsilon_2 \in \left[\dfrac{72}{7};\, 36\right]$, $\max Z = Z(7{,}65;\ 1{,}05) = 42{,}45$ и се получава при $\varepsilon_1 = 8,\ \varepsilon_2 = \dfrac{72}{7}$.

4. За $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in I_{4A}:\ \varepsilon_1 \in [9;\ 24];\ \varepsilon_2 \in \left[\frac{72}{7};\ 36\right];\ \varepsilon_2 \geq \frac{4}{5}\varepsilon_1,\ \max Z = Z(8;\ 0) = 40$ и се получава при $\varepsilon_1 = 8,\ \varepsilon_2 \in \left[\frac{72}{7};\ 6\right]$.

5. За $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in I_4 \setminus I_{4A}:\ \varepsilon_1 \in [9;\ 24];\ \varepsilon_2 \in \left[\frac{72}{7};\ 36\right];\ \varepsilon_2 \leq \frac{4}{5}\varepsilon_1,\ \max Z = Z(0;\ 7) = 28$ и се получава при $\varepsilon_1 \in \left[\frac{90}{7};\ 24\right],\ \varepsilon_2 = \frac{72}{7}$.

В заключение могат да бъдат направени няколко основни извода.

1. В зависимост от предпочитанията на лицето, вземащо решение относно интервалите на изменение на параметрите ε_1 и ε_2, то може да се придържа към някои от последните пет варианта по отношение на количествата от двата продукта, които да се произведат с цел получаване на максимална печалба.

2. Ако е възможно изменението на параметрите ε_1 и ε_2 в целите първоначално указани интервали, то за да се получи максимална печалба в размер на 49,95 хил. лв., то разходните норми от четвъртата суровина, които трябва да се заложат в производството на единица продукт от първия и втория вид, трябва да бъдат съответно 7,58 ед. и 1,26 ед.

3. В конкретната задача разходните норми от четвъртата суровина са означени с ε_1 и ε_2, които се изменят в зададени крайни затворени интервали $[\varepsilon_1';\varepsilon_1'']$ и $[\varepsilon_2';\varepsilon_2'']$. От гледна точка на практиката, коефициентите в i-тото ограничително условие се задават с конкретни осреднени стойности $a_{i1}', a_{i2}', ..., a_{in}'$, които евентуално могат да се изменят с някакви стойности на намаление или увеличение, съответно A_{ij} и B_{ij}, $j = \overline{1,n}$, т.е. $a_{ij} \in \left[a_{ij}' - A_{ij};\ a_{ij}' + B_{ij}\right],\ j = \overline{1,n}$. В такъв случай може да се положи $a_{ij} = \varepsilon_{ij},\ \varepsilon_{ij}' = a_{ij}' + B_{ij}$ и решаването на задачата да се сведе до методите, приложени в настоящото изложение.

В изследването като основа бе заложено наличието на параметри в разходните норми за конкретна суровина.

Като предмет на изследване в по-нататъшни разработки могат да бъдат отбелязани следните насоки.

1. Наличие на параметър (параметри) в някои от суровините, които се използват за производството на даден продукт.

2. Увеличението на разходните норми от даден вид суровина може да доведе до повишаване качеството на даден продукт, откъдето следва и увеличение на цената му. Това предполага възможността за поставяне на параметри и в коефициентите на целевата функция.

3. Променливостта на коефициентите в дадено ограничително условие може да бъде допълнена и с възможността за променлив характер и на наличността на този ресурс, т.е. внасяне на параметър и в дясната страна на съответното ограничително условие.

4. Едно от ограниченията в това изложение бе броят на готовите продукти, а именно – два продукта. Една възможност за разширяване на изследването е увеличаване на продуктите и прилагане на методите от параметричното линейно оптимиране.

5. Съществуват немалко практически задачи с параметри, чието моделиране води до модели от нелинеен характер. Това е още една възможност за теоретични разработки в тази насока и търсене на по-голяма пълнота при разработване на проблеми, при които редица изходни параметри имат недетерминиран характер.

ЛИТЕРАТУРА

АТАНАСОВ, Б., НИКОЛАЕВ, Р., МИРЯНОВ, Р., ПЕТКОВ, Й. & ЙОРДАНОВА, В., 2014. *Математика и оптимизационни методи*. Варна: Наука и икономика.

АТАНАСОВ, Б., НИКОЛАЕВ, Р., БОШНАКОВ, В., МИЛКОВА, Т. & ПЕТКОВ, Й., 2010. *Оптимизационни методи*. Варна: Наука и икономика.

АТАНАСОВ, Б. & МИЛКОВА, Т., 2011. *Количествени методи в логистиката*. Варна: Наука и икономика.

БОНЕВ, К., ЛАЛОВА, Н. & ИВАНОВ, А., 1989. *Математическо моделиране*. Книгоиздателство „Г. Бакалов“, Варна.

ГОНЧАРЕНКО и др., 2013. *Методы оптимальных решений в экономике и финансах*. Москва: КноРус.

ВИЛЬЯМС, Н. Н., 1976. *Параметрическое программирование в экономике*. Москва: Статистика.

REFERENCES

ATANASOV, B., NIKOLAEV, R., MIRYANOV, R., PETKOV, Y. & YORDANOVA, V., 2014. *Matematika i optimizatsionni metodi*. Varna: Nauka i ikonomika.

ATANASOV, B., NIKOLAEV, R., BOSHNAKOV, V., MILKOVA, T. & PETKOV, Y., 2010. *Optimizatsionni metodi*. Varna: Nauka i ikonomika.

ATANASOV, B. & MILKOVA, T., 2011. *Kolichestveni metodi v logistikata*. Varna: Nauka i ikonomika.

BONEV, K., LALOVA, N. & IVANOV, A., 1989. *Matematichesko modelirane*. Knigoizdatelstvo „G. Bakalov“, Varna.

GONCHARENKO et al., 2013. *Metody optimal'nykh resheniy v ekonomike i finansakh*. Moskva: KnoRus.
VIL'YAMS, N. N., 1976. *Parametricheskoye programmirovaniye v ekonomike*. Moskva: Statistika.

TWO-PARAMETRIC PROBLEM FOR OPTIMAL DISTRIBUTION OF RESOURCES

Abstract. The methods of linear optimization are well-known, both in the literature and practice, as one of the most effective methods for optimizing economic phenomena and processes. Linear models with determined coefficients have been thoroughly studied so far, but there are still areas in which research related to parametric linear optimization models can be further developed and improved. In the present paper, the graphical method for solving a two-factor linear optimization problem is used to analyze the solution of a problem for optimal distribution of resources with two parameters in the coefficients multiplying the variables in one of the constraints.

Keywords: parametric linear programming; graphical method

✉ **Prof. Dr. Rosen Nikolaev**
Web of Science Researcher ID: S-8490-2016
University of Economics – Varna
77, Kniaz Boris I Blvd.
9002 Varna, Bulgaria
E-mail: nikolaev_rosen@ue-varna.bg

✉ **Dr. Tanka Milkova, Assoc. Prof.**
University of Economics – Varna
77, Kniaz Boris I Blvd.
9002 Varna, Bulgaria
E-mail: tankamilkova@ue-varna.bg