https://doi.org/10.53656/math2023-1-3-for

*Science in Education*
*Научно-методически статии*

# ФОРМУЛИ ЗА ЛИЦАТА НА НЯКОИ ВИДОВЕ МНОГОЪГЪЛНИЦИ И ПРИЛОЖЕНИЕТО ИМ ЗА ДОКАЗВАНЕ НА ЗАВИСИМОСТИ В ТЯХ

**Проф. д.п.н. Йордан Табов[1], гл. ас. д-р Асен Велчев[2], гл. ас. д-р Станислав Стефанов[3], маг. мат. Хаим Хаимов[4]**

*[1]Институт по математика и информатика на БАН – София*
*[2]Технически университет – София*
*[3] Университет по архитектура, строителство и геодезия – София*
*[4]Варна, ул. „Братя Шкорпил" 16*

**Резюме.** В тази публикация една новооткрита формула за лице на четириъгълник се прилага за извеждането на формули за лицата на някои видове многоъгълници с произволен брой страни. С помощта на тези формули се доказват някои зависимости в такива многоъгълници при конкретен брой техни страни.

*Ключови думи:* четириъгълник; многоъгълник; лице; формула; зависимости

## 1. Въведение

Неотдавна бяха открити две нови формули за лице на четириъгълник и формули за лицата на определен вид многоъгълници, наречени диагонално равноъгълни от първи тип (Haimov 2021, Haimov 2022). Формулите за лице на четириъгълник бяха използвани за доказването на ред интересни неравенства в него, както и за извеждането на една важна зависимост между дължините на страните и диагоналите му (Haimov 2021). Освен това в четириъгълник и многоъгълник с по-голям брой страни бяха заимствани и пренесени от триъгълника косинусовата и т.нар. котангенсова теорема.

С помощта на получената котангенсова теорема за многоъгълник бяха изведени формулите за лицата на споменатите по-горе диагонално равноъгълни многоъгълници от първи тип (Haimov 2022). В тази публикация ще приложим една от новооткритите формули за лице на четириъгълник за извеждането на формули за лицата на друг вид многоъгълници, наречени диагонално равноъгълни многоъгълници от втори тип. С помощта на така получените формули ще изведем някои зависимости в равноъгълни многоъгълници с конкретен брой страни. Предварително ще приведем новите формули за лице на четириъгълник и формулите за лицата на диагонално равноъгълните многоъгълници от първи тип, изведени в (Haimov 2022), които ще използваме тук.

**2. Формули за лице на четириъгълник и равноъгълни многоъгълници от първи тип**

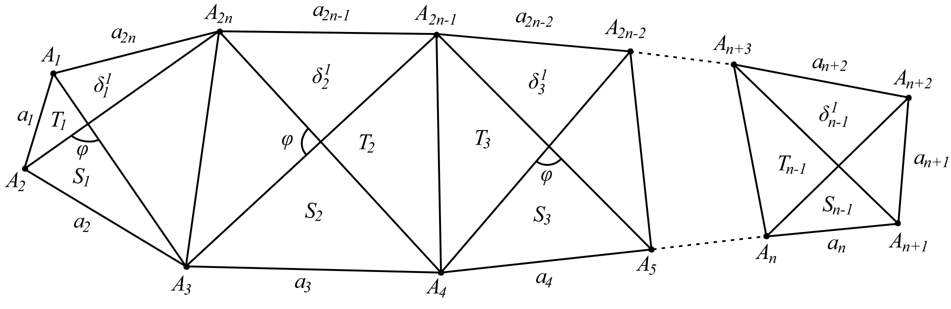
Въпросните формули за лице на четириъгълник са следните:

(1) $$S=\frac{1}{4}\left(b^2+d^2-a^2-c^2\right)tg\varphi,\quad \varphi\neq 90^\circ,$$

(2) $$S=\frac{1}{4}\sqrt{4m^2n^2-\left(b^2+d^2-a^2-c^2\right)^2}\ .$$

Тук $a$, $b$, $c$ и $d$ са дължините на последователните страни на четириъгълника, $\varphi$ е ъгълът между диагоналите, който лежи срещу страните с дължини $a$ и $c$, а $m$ и $n$ са дължините на диагоналите.

Сега ще приведем определението за диагонално равноъгълни многоъгълници от първи тип, дадено в (Haimov 2022). За многоъгълници с четен и нечетен брой страни, то е различно.

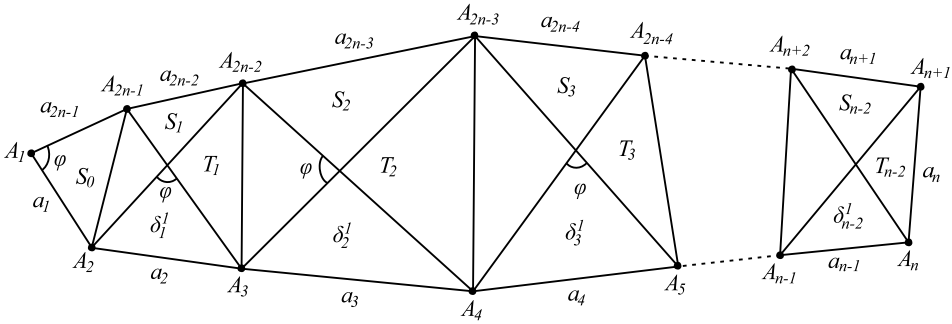



**Фигура 1**

Нека $A_1A_2\dots A_{2n}$ е произволен $2n$-ъгълник (фиг. 1). На страната му $A_1A_2$ да съпоставим редицата от $n-1$ четириъгълника: $A_1A_2A_3A_{2n}$, $A_3A_4A_{2n-1}A_{2n},\dots,$ $A_nA_{n+1}A_{n+2}A_{n+3}$, която се получава, като се построят диагоналите $A_3A_{2n}$, $A_4A_{2n-1},\dots,$ $A_nA_{n+3}$ на многоъгълника, краищата на всеки от които се намират през равен брой върхове спрямо краищата на страната $A_1A_2$. Ще бележим тази редица с $\delta_1^1$, $\delta_2^1$,.., $\delta_{n-1}^1$ и ще я наричаме редица от четириъгълници, съответна на страната $A_1A_2$.

*Определение 1.* Нека $A_1A_2\dots A_{2n}$ е произволен $2n$-ъгълник (фиг. 1). Разглеждаме редицата от четириъгълници, съответна на страната му $A_1A_2$: $A_2A_3A_{2n}A_1$, $A_3A_4A_{2n-1}A_{2n},\dots,$ $A_nA_{n+1}A_{n+2}A_{n+3}$. Означаваме пресечните точки на диагоналите на четириъгълниците от тази редица съответно с: $T_1$, $T_2$,.., $T_{n-1}$. Нека ъглите между диагоналите на всички четириъгълници от редицата имат една и съща мярка $\varphi$, като в първия четириъгълник $A_2A_3A_{2n}A_1$ това е ъгълът $\angle A_2T_1A_3$ срещу страна на многоъгълника, във втория – ъгълът $\angle A_3T_2A_{2n}$ срещу диагонал на многоъгълника, в третия – ъгъл $\angle A_4T_3A_5$, отново срещу страна на многоъгълника, в четвъртия – ъгъл, отново срещу диагонал на многоъгълника, и т.н. Ще казваме, че този $2n$-ъгълник е диагонално равноъгълен от първи тип по отношение на страната си $A_1A_2$ с константен ъгъл $\varphi$.

Да разгледаме сега произволен многоъгълник $A_1A_2 \dots A_{2n-1}$ с нечетен брой страни (фиг. 2). Нека $A_2A_3 \dots A_nA_{n+1} \dots A_{2n-2}A_{2n-1}$ е $2n$-ъгълникът от върховете му без върха $A_1$. Редицата $\delta_1^1$, $\delta_2^1$,.., $\delta_{n-2}^1$ от четириъгълници, съответна на страната му $A_{\text{u}}A_{\ n-}$, ще наричаме редица, съответна на върха $A_1$ на многоъгълника $A_1A_2 \dots A_{2n-1}$.




**Фигура 2**

*Определение 2.* Нека $A_1A_2 \dots A_{n-1}A_nA_{n+1}A_{2n-1}$ е произволен $2n-1$-ъгълник (фиг. 2). Разглеждаме редицата от четириъгълници, съответна на върха му $A_1$: $A_2A_3A_{2n-2}A_{2n-1}$, $A_3A_4A_{2n-3}A_{2n-2}$, …, $A_{n-1}A_nA_{n+1}A_{n+2}$. Означаваме пресечните точки на диагоналите на тези четириъгълници съответно с: $T_1$, $T_2$,.., $T_{n-2}$. Нека ъглите между диагоналите на всички четириъгълници от редицата $\delta_1^1$, $\delta_2^1$,.., $\delta_{n-2}^1$ имат една и съща мярка $\varphi$, като в първия четириъгълник $A_2A_3A_{2n-2}A_{2n-1}$ това е ъгълът $\angle A_2T_1A_3$ срещу страна на многоъгълника, във втория – $A_3A_4A_{2n-3}A_{2n-2}$ – ъгълът $\angle A_3T_2A_{2n-2}$ срещу диагонал на многоъгълника, в третия четириъгълник $A_4A_5A_{2n-4}A_{2n-3}$ – ъгълът $\angle A_4T_3A_5$, отново срещу страна на многоъгълника, в четвъртия – ъгъл, отново срещу диагонал на многоъгълника и т.н. Нека освен това и $\angle A_2A_1A_{2n-1}$ има мярка $\varphi$. Ще казваме тогава, че $2n-1$-ъгълникът $A_1A_2\ldots A_{2n-1}$ е диагонално равноъгълен от първи тип по отношение на върха си $A_1$, с константен ъгъл $\varphi$.

В (Haimov 2022) изведохме следните формули за лицата на диагонално равноъгълните многоъгълници от първи тип, съответно с четен и нечетен брой страни.

*Теорема 1*. Лицето $S$ на диагонално равноъгълния от първи тип, по отношение на страната си $A_1A_2$ многоъгълник $A_1A_2\ldots A_{2n}$ с константен ъгъл $\varphi$, $\varphi \neq 90^\circ$, се изразява чрез дължините $a_1, a_2,\ldots,a_{2n}$ на страните му $A_1A_2$, $A_2A_3,\ldots,$ $A_{2n}A_1$ и тангенса на ъгъл $\varphi$, по формулата (фиг. 1):

$$S=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(a_{2k-1}^2-a_{2k}^2\right)tg\varphi . \tag{3}$$

*Теорема 2*. Лицето $S$ на диагонално равноъгълния от първи тип, по отношение на върха си $A_1$ многоъгълник $A_1A_2\ldots A_{2n-1}$ с константен ъгъл $\varphi$, $\varphi \neq 90^\circ$, се изразява чрез дължините $a_1, a_2,\ldots,a_{2n-1}$, съответно на страните му $A_1A_2$, $A_2A_3,\ldots,$ $A_{2n-1}A_1$ и тангенса на ъгъл $\varphi$ по формулата (фиг. 2):

$$S=\frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}^2-\sum_{k=1}^{n-1}a_{2k}^2\right)tg\varphi. \tag{4}$$

В изложението по-нататък ще използваме и следната формула за лице на триъгълник, следваща непосредствено от котангенсовата теорема (Haimov 2022):

$$S=\frac{1}{4}\left(a^2+b^2-c^2\right)tg\gamma,\quad \gamma\neq 90^\circ, \tag{5}$$

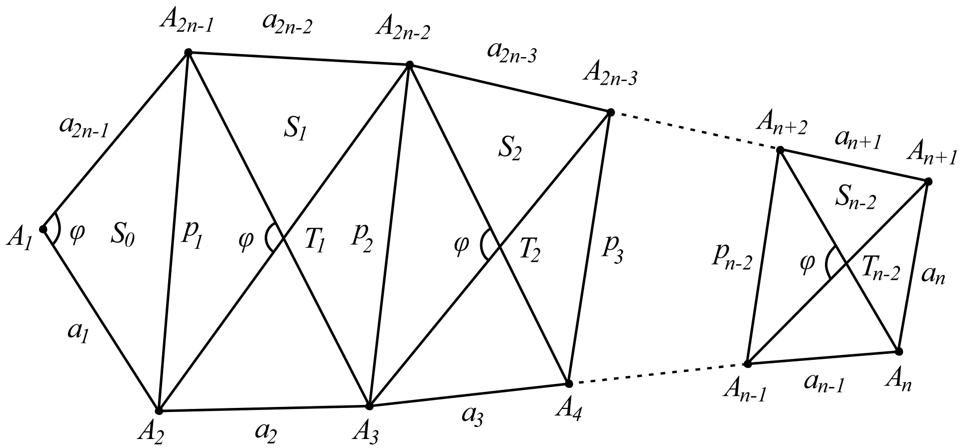
при стандартните означения в триъгълника.

## 3. Формули за лицата на диагонално равноъгълни многоъгълници от втори тип

*Определение 3*. Нека $A_1A_2\ldots A_{n-1}A_nA_{n+1}A_{2n-1}$ е изпъкнал $2n-1$-ъгълник и редицата от четириъгълници, съответна на върха му $A_1$ е: $A_2A_3A_{2n-2}A_{2n-1}$, $A_3A_4A_{2n-3}A_{2n-2},\ldots,$ $A_{n-1}A_nA_{n+1}A_{n+2}$ (фиг. 3). Нека още във всеки четириъгълник от тази редица, например $A_2A_3A_{2n-2}A_{2n-1}$, ъгълът между диагоналите, който лежи срещу страна на четириъгълника, явяваща се диагонал на многоъгълника – в случая ъгъл $A_2T_1A_{2\quad 1}$, има мярка $\varphi$. Нека освен това и ъгъл $A_2A_1A_{2n-1}$ има мярка $\varphi$. Ще казваме тогава, че многоъгълникът е диагонално равноъгълен от втори тип по отношение на върха си $A_1$, с константен ъгъл $\varphi$.

*Теорема 3.* Нека $A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_nA_{n+1}A_{2n-1}$ е диагонално равноъгълен от втори тип по отношение на върха си $A_1$ многоъгълник, с константен ъгъл $\varphi$, $\varphi \neq 90^\circ$ (фиг. 3). Нека още дължините на страните му $A_1A_2$, $A_2A_3$,..., $A_{2n-1}A_1$ са съответно $a_1$, $a_2$,...,$a_{2n-1}$, а дължините на диагоналите му $A_2A_{2n-1}$, $A_3A_{2n-2}$, $A_{ù}A_{\ n-}$ ,..., $A_{n-1}A_{n+2}$ са респективно: $p_1$, $p_2$,..., $p_{n-2}$. Тогава лицето *S* на многоъгълника се определя по формулата:

$$S = \frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 - a_n^2 + \sum_{k=n+1}^{2n-1} a_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n-2} p_k^2\right) tg\varphi. \qquad (6)$$




**Фигура 3**

*Доказателство*. Означаваме лицето на $\Delta A_1A_2A_{2n-1}$ с $S_0$, а лицата на последователните четириъгълници от редицата, съответна на върха $A_1$ – с $S_1$, $S_2$, $S_{n-2}$. По цитираните в началото формули (5) и (1) за лице на триъгълник и четириъгълник, от $\Delta A_1A_2A_{2n-1}$ и последователните четириъгълници от редицата, имаме съответно:

$$S_0 = \frac{1}{4}\left(a_1^2 + a_{2n-1}^2 - p_1^2\right) tg\varphi,$$

$$S_1 = \frac{1}{4}\left(a_2^2 + a_{2n-2}^2 - p_1^2 - p_2^2\right) tg\varphi,$$

$$S_2 = \frac{1}{4}\left(a_3^2 + a_{2n-3}^2 - p_2^2 - p_3^2\right)tg\varphi,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$S_{n-2} = \frac{1}{4}\left(a_{n-1}^2 + a_{n+1}^2 - a_n^2 - p_{n-2}^2\right)tg\varphi.$$

Събираме почленно тези равенства и получаваме:

$$S = \frac{1}{4}\left[\left(a_1^2 + a_{2n-1}^2\right) + \left(a_2^2 + a_{2n-2}^2\right) + \left(a_3^2 + a_{2n-3}^2\right) + \dots + \left(a_{n-1}^2 + a_{n+1}^2\right) - a_n^2 - 2p_1^2 - 2p_2^2 - \dots - 2p_{n-2}^2\right]tg\varphi,$$

или след прегрупиране:

$$S = \frac{1}{4}\left[\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_{n-1}^2\right) - a_n^2 + \left(a_{n+1}^2 + \dots + a_{2n-1}^2\right) - 2p_1^2 - 2p_2^2 - \dots - 2p_{n-2}^2\right]tg\varphi,$$

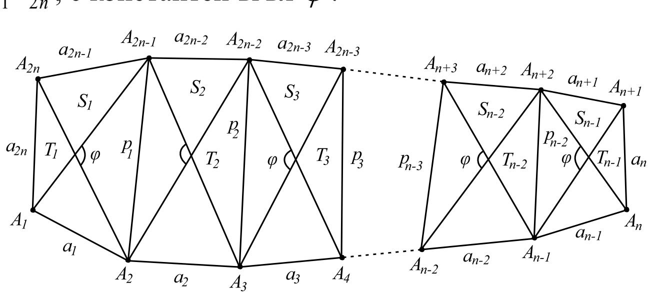
което след въвеждане на знака за сума води до равенството:

$$S = \frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 - a_n^2 + \sum_{k=n+1}^{2n-1} a_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n-2} p_k^2\right)tg\varphi.$$

Така доказахме желаната формула (6).

Сега ще изведем формула за лицето на диагонално равноъгълен многоъгълник от втори тип с четен брой страни.

*Определение 4.* Нека $A_1A_2 \dots A_{n-1}A_nA_{n+1}A_{2n}$ е изпъкнал $2n$-ъгълник и редицата от четириъгълници, съответна на страната му $A_1A_{2n}$, е: $A_1A_2A_{2n-1}A_{2n}$, $A_2A_3A_{2n-2}A_{2n-1}, \dots,$ $A_{n-1}A_nA_{n+1}A_{n+2}$ (фиг. 4). Нека във всеки четириъгълник от тази редица, например в първия четириъгълник $A_1A_2A_{2n-1}A_{2n}$, ъгълът между диагоналите, който лежи срещу страна на четириъгълника, явяваща се диагонал на многоъгълника – в случая $\angle A_2T_1A_{2n-1}$, има мярка $\varphi$. Ще казваме тогава, че многоъгълникът е диагонално равноъгълен от втори тип по отношение на страната си $A_1A_{2n}$, с константен ъгъл $\varphi$.




**Фигура 4**

*Теорема 4.* Нека $A_1A_2...A_{n-1}A_nA_{n+1}...A_{2n}$ е диагонално равноъгълен от втори тип по отношение на страната си $A_1A_{2n}$ многоъгълник, с константен ъгъл $\varphi$, $\varphi \neq 90^\circ$ (фиг. 4). Нека още дължините на страните му $A_1A_2$, $A_2A_3$,..., $A_{2n}A_1$ са съответно $a_1$, $a_2$,...,$a_{2n}$, а дължините на диагоналите му $A_2A_{n-1}$, $A_3A_{2n-2}$,..., $A_{n-1}A_{n+2}$ – съответно: $p_1, p_2,..., p_{n-2}$. Лицето $S$ на многоъгълника се определя по формулата:

$$S=\frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{n-1}a_k^2-a_n^2+\sum_{k=n+1}^{2n-1}a_k^2-a_{2n}^2-2\sum_{k=1}^{n-2}p_k^2\right)tg\varphi. \qquad (7)$$

*Доказателство*. Означаваме лицата на четириъгълниците от редицата, съответна на страната $A_1A_{2n}$, респективно с: $S_1$, $S_2$,... $S_{n-1}$. По цитираната в началото формула (1) за лице на четириъгълник имаме последователно (фиг. 4):

$$S_1=\frac{1}{4}\left(a_1^2+a_{2n-1}^2-a_{2n}^2-p_1^2\right)tg\varphi,$$

$$S_2=\frac{1}{4}\left(a_2^2+a_{2n-2}^2-p_1^2-p_2^2\right)tg\varphi,$$

$$S_3=\frac{1}{4}\left(a_3^2+a_{2n-3}^2-p_2^2-p_3^2\right)tg\varphi,$$

..........................................

..........................................

$$S_{n-2}=\frac{1}{4}\left(a_{n-2}^2+a_{n+2}^2-p_{n-3}^2-p_{n-2}^2\right)tg\varphi,$$

$$S_{n-1}=\frac{1}{4}\left(a_{n-1}^2+a_{n+1}^2-p_{n-2}^2-a_n^2\right)tg\varphi.$$

Събираме почленно тези равенства и получаваме:

$$S=\frac{1}{4}\left[\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2+...+a_{n-2}^2+a_{n-1}^2\right)-a_n^2+\left(a_{n+1}^2+a_{n+2}^2+...+a_{2n-1}^2\right)-a_{2n}^2-2p_1^2-2p_2^2-...-2p_{n-2}^2\right]tg\varphi,$$

или като въведем знак за сума:

$$S=\frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{n-1}a_k^2-a_n^2+\sum_{k=n+1}^{2n-1}a_k^2-a_{2n}^2-2\sum_{k=1}^{n-2}p_k^2\right)tg\varphi.$$

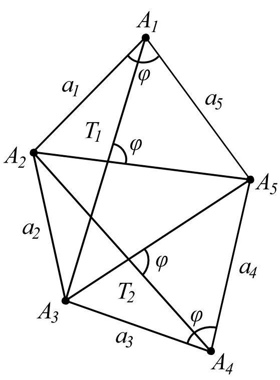
Така доказахме желаната формула (7).

**4. Приложение на формулите за лице на диагонално равноъгълни многоъгълници с конкретен брой страни за доказването на зависимости в тях**

С помощта на формулите за лице на равноъгълни многоъгълници се доказват различни зависимости в тях. Такива зависимости съществуват в многоъгълници с произволен брой страни, които са равноъгълни по отношение на два или повече свои върха (респективно по отношение на две или повече свои страни), с един и същ константен ъгъл $\varphi$. За да избегнем обаче сложни чертежи, ще се ограничим с извеждането на тези зависимости в диагонално равноъгълни многоъгълници с конкретен брой страни.

Ще разгледаме първо два примера на петоъгълници, които се оказват диагонално равноъгълни по отношение на два свои върха, с един и същ константен ъгъл $\varphi$:

*Пример 1*. Нека $A_1A_2 \ldots A_5$ е петоъгълник с дължини на страните си $A_1A_2$, $A_2A_3, \ldots, A_5A_1$ съответно $a_1, a_2, \ldots, a_5$ (фиг. 5). Нека още диагоналите му $A_2A_5$ и $A_1A_3$ се пресичат в точка $T_1$, а диагоналите му $A_3A_5$ и $A_2A_4$ – съответно в точка $T_2$. Ако ъглите $\angle A_2A_1A_5$, $\angle A_1T_1A_5$, $\angle A_3A_4A_5$ и $\angle A_4T_2A_5$ са равни на $\varphi$, където $\varphi \neq 90^\circ$, то е изпълнено равенството $a_4 = a_5$.




**Фигура 5**

*Доказателство*. Означаваме лицето на петоъгълника с $S$. От условието следва, че той е диагонално равноъгълен от първи тип по отношение на върха си $A_1$, с константен ъгъл $\varphi$. Наистина, редицата, съответна на върха му $A_1$, се състои от един четириъгълник $A_2A_3A_4A_5$ и ъгълът между диагоналите на последния, който лежи срещу страна на петоъгълника, има мярка $\varphi$. Освен това и $\angle A_2T_1A_5 = \varphi$. От определение 2 следва, че петоъгълникът $A_1A_2A_3A_4A_5$ е диагонално равноъгълен от първи тип по отношение на върха си $A_1$. По теорема 2 можем да заключим, че лицето му $S$ се определя по формулата:

$$S = \frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{3} a_{2k-1}^2 - \sum_{k=1}^{2} a_{2k}^2\right) tg\varphi,$$

или след освобождаване от знака за сума:

$$S = \frac{1}{4}\left(a_1^2 + a_3^2 + a_5^2 - a_2^2 - a_4^2\right) tg\varphi.$$

Аналогично от условието следва, че петоъгълникът е диагонално равноъгълен от първи тип и по отношение на върха си $A_4$, с константен ъгъл $\varphi$, откъдето по същия начин получаваме равенството:

$$S = \frac{1}{4}\left(a_3^2 + a_4^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_5^2\right) tg\varphi.$$

От последните две равенства (предвид условието $\varphi \neq 90^\circ$) следва, че:

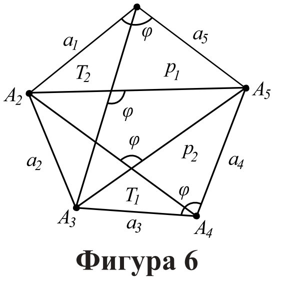
$$a_1^2 + a_3^2 + a_5^2 - a_2^2 - a_4^2 = a_3^2 + a_4^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_5^2,$$

или след унищожаване на еднаквите членове, че: $a_4 = a_5$.

*Забележка*. Петоъгълници, отговарящи на условията от примера, съществуват. Такъв петоъгълник може да се построи (например) така: построяваме произволен $\Delta A_1A_2A_5$, в който $\angle A_2A_1A_5 = \varphi < 90°$. Върху страната му $A_2A_5$ вземаме точка $T_1$ така, че $\angle A_1T_1A_5 = \varphi$. Построяваме произволна точка $T_2$, от която отсечката $A_2A_5$ се вижда под ъгъл $180^\circ - \varphi$, и нека $A_1T_1 \cap A_5T_2 = A_3$. Върху продължението на $A_2T_2$ намираме точката $A_4$, от която отсечката $A_3A_5$ се вижда под ъгъл $\varphi$. Тогава $\angle A_2A_1A_5 = \angle A_5T_1A_1 = \angle A_4T_2A_5 = \angle A_3A_4A_5 = \varphi$.

*Пример 2*. Нека $A_1A_2 \ldots A_5$ е петоъгълник с дължини на страните си $A_1A_2$, $A_2A_3$,..., $A_5A_1$ съответно $a_1$, $a_2$,...$a_5$ и дължини на диагоналите си $A_2A_5$ и $A_3A_5$ съответно $p_1$ и $p_2$. Означаваме пресечната точка на диагоналите $A_2A_4$ и $A_3A_5$ с $T_1$ (фиг. 6), а тази на диагоналите $A_2A_5$ и $A_1A_3$ – с $T_2$. Ако ъглите $\angle A_2T_1A_5$, $\angle A_3T_2A_5$, $\angle A_3A_4A_5$ и $\angle A_2A_1A_5$ имат една и съща мярка $\varphi$, $\varphi \neq 90^\circ$, то е изпълнено равенството:

$$a_3^2 - a_1^2 = p_2^2 - p_1^2. \quad (8)$$




**Фигура 6**

*Доказателство*. Означаваме лицето на петоъгълника с $S$. Лесно се проверява, че той е диагонално равноъгълен от втори тип по отношение на върха си $A_1$, с константен ъгъл $\varphi$. Наистина, редицата, съответна на върха му $A_1$, се състои от четириъгълника $A_2A_3A_4A_5$, в който ъгълът между диагоналите, лежащ срещу диагонал на петоъгълника, има мярка $\varphi$ и освен това $\angle A_2A_1A_5 = \varphi$. Затова по определение 2 петоъгълникът е диагонално равноъгълен от втори тип по отношение на върха си $A_1$. По теорема 4 можем да заключим, че лицето му $S$ се определя по формулата:

$$S = \frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{2} a_k^2 - a_3^2 + \sum_{k=4}^{5} a_k^2 - 2\sum_{k=1}^{1} p_k^2\right) tg\varphi,$$

която се записва и така:

$$S = \frac{1}{4}\left(a_1^2 + a_2^2 + a_4^2 + a_5^2 - a_3^2 - 2p_1^2\right) tg\varphi, \quad \varphi \neq 90^\circ.$$

Аналогично се доказва, че петоъгълникът е диагонално равноъгълен от втори тип и по отношение на върха си $A_4$, откъдето получаваме равенството:

$$S = \frac{1}{4}\left(a_3^2 + a_4^2 + a_2^2 + a_5^2 - a_1^2 - 2p_2^2\right) tg\varphi, \quad \varphi \neq 90^\circ.$$

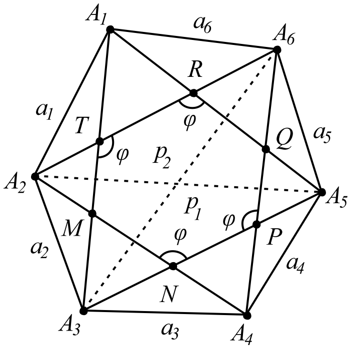
Като приравним десните части на последните две равенства и опростим, стигаме до доказаното равенство (8).

*Забележка*. Построяването на петоъгълник, отговарящ на условията от примера, можем да извършим (например) така: построяваме $\Delta A_2A_5A_1$ с ъгъл $A_2A_1A_5 = \varphi$. Върху страната му $A_2A_5$ избираме точката $T_2$ така, че да е изпълнено: $\angle A_2T_2A_1 = \varphi$. Построяваме произволна точка $T_1$, от която отсечката $A_2A_5$ се вижда под ъгъл $\varphi$. Нека $A_3 = A_1T_2 \cap A_5T_1$. Върху продължението на отсечката $A_2T_1$ намираме точката $A_4$, за която $\angle A_3A_4A_5 = \varphi$. Получаваме петоъгълник, в който всички ъгли от условието имат мярка $\varphi$.

Ще разгледаме сега и два примера на шестоъгълници, които се оказват диагонално равноъгълни по отношение на две свои страни, с един и същ константен ъгъл $\varphi$.

*Пример 3*. Нека $A_1A_2 \ldots A_6$ е шестоъгълник с дължини на страните си $A_1A_2$, $A_2A_3$,..., $A_6A_1$ съответно $a_1$, $a_2$,..., $a_6$ и дължини на диагоналите си $A_2A_5$ и $A_3A_6$ – съответно $p_1$ и $p_2$. Нека последователните диагонали $A_1A_3$, $A_2A_4$, $A_3A_5$,..., $A_6A_2$ се пресичат съответно в точките $M$, $N$, $P$, $Q$, $R$ и $T$ (фиг. 7). Ако ъглите $\angle TRQ$, $\angle MNP$, $\angle MTR$ и $\angle NPQ$ имат една и съща мярка $\varphi$, $\varphi \neq 90^\circ$, то е изпълнено равенството:

$$(9) \quad a_6^2 + p_1^2 + a_3^2 = a_1^2 + p_2^2 + a_4^2$$




**Фигура 7**

*Доказателство*. Означаваме лицето на шестоъгълника с $S$. Лесно се проверява, че той е диагонално равноъгълен от втори тип по отношение на страната си $A_1A_6$, с константен ъгъл $\varphi$. Наистина, редицата, съответна на страната му $A_1A_6$, се състои от два четириъгълника $A_1A_2A_5A_6$ и $A_2A_3A_4A_5$. Във всеки от тях ъгълът между диагоналите, който лежи срещу диагонал на шестоъгълника, има мярка $\varphi$. Затова по определение 4 шестоъгълникът е диагонално равноъгълен от втори тип по отношение на страната си $A_1A_6$. По теорема 4 можем да заключим, че лицето му $S$ се изразява по формулата:

$$S = \frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{2} a_k^2 - a_3^2 + \sum_{k=4}^{5} a_k^2 - a_6^2 - 2\sum_{k=1}^{1} p_k^2\right) tg\varphi, \quad \varphi \neq 90^\circ,$$

или като се освободим от знака за сума:

$$S = \frac{1}{4}\left(a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 - a_6^2 - 2p_1^2\right) tg\varphi, \quad \varphi \neq 90^\circ.$$

Аналогично, понеже шестоъгълникът е диагонално равноъгълен от втори тип и по отношение на страната си $A_2A_1$, с константен ъгъл $\varphi$, се получава равенството:

$$S = \frac{1}{4}\left(a_2^2 + a_6^2 - a_1^2 + a_3^2 + a_5^2 - a_4^2 - 2p_2^2\right) tg\varphi, \quad \varphi \neq 90^\circ.$$

Като приравним десните части на последните две равенства и опростим, непосредствено получаваме доказаното равенство (9).

*Забележка*. Пример на шестоъгълник, за който са изпълнени условията от разгледания пример, е правилният шестоъгълник.

По аналогичен начин се разглежда и следният:

*Пример 4*. Нека $A_1A_2 \ldots A_6$ е шестоъгълник с дължини на страните си $A_1A_2$, $A_2A_3$,..., $A_6A_1$ съответно $a_1$, $a_2$,..., $a_6$. Означаваме $A_1A_3 \cap A_2A_6 = T_1$,

$A_3A_5 \cap A_4A_6 = T_2$, $A_2A_6 \cap A_1A_5 = T_3$ и $A_2A_4 \cap A_3A_5 = T_4$. Ако ъглите $\angle A_2T_1A_3$, $\angle A_3T_2A_6$, $\angle A_2T_3A_1$ и $\angle A_2A_4A_5$ имат една и съща мярка $\varphi$, $\varphi \neq 90^\circ$, то е изпълнено равенството:

$$a_1^2 + a_3^2 + a_5^2 = a_2^2 + a_4^2 + a_6^2.$$

Доказателството тук предоставяме на читателите.

В заключение привеждаме два примера за приложението на формула (1) за лице на четириъгълник, за извеждането на зависимости в други видове многоъгълници.

*Пример 5*. Нека $ABCDE$ е изпъкнал петоъгълник с дължини на страните си $AB$, $BC$, $CD$, $DE$ и $EA$, съответно $a$, $b$, $c$, $d$ и $e$, и дължини на диагоналите $BE$ и $CE$, съответно $m$ и $n$. Нека още средата на страната $BC$ е $F$ и $AF \cap BE = T_1$, $DF \cap CE = T_2$. Ако ъглите $\angle ET_1F_3$, $\angle ET_2F$, $\angle BAE$ и $\angle CDE$ имат една и съща мярка $\varphi$, $\varphi \neq 90^\circ$, то е изпълнено равенството:

$$m^2 - n^2 = 2\left(a^2 - c^2\right).$$

*Пример 6*. Нека $A_1A_2 \ldots A_5$ е изпъкнал петоъгълник с дължини на страните $A_1A_2$, $A_2A_3$,..., $A_5A_1$, съответно $a_1$, $a_2$,...., $a_5$ и дължини на диагоналите $A_2A_5$ и $A_3A_5$, съответно $m$ и $n$. Нека още $A_1A_3 \cap A_2A_5 = T_1$ и $A_2A_4 \cap A_5A_3 = T_2$. Ако ъглите $\angle A_1A_5A_2$, $\angle A_3A_5A_4$, $\angle A_2T_1A_3$ и $\angle A_2T_2A_3$ имат една и съща мярка $\varphi$, $\varphi \neq 90^\circ$, то е изпълнено равенството:

$$a_1^2 + a_4^2 + n^2 = a_3^2 + a_5^2 + m^2.$$


**ЛИТЕРАТУРА**

ХАИМОВ, Х., 2021. Една кратка формула за лице на четириъгълник и нейното приложение, *Математика плюс*, 4, 68 – 77. ISSN 0861-8321.

ХАИМОВ, Х., 2022. Косинусова и котангенсова тереми за четириъгълник и многоъгълник. Обобщение на една теорема на Карно. *Математика плюс*, 1, 52 – 64. ISSN 0861-8321.

**REFERENCES**

HAIMOV, H., 2021. A short formula for the area of a quadrilateral and its application, *Mathematics plus*, 4, 68 – 77. ISSN 0861-8321.

HAIMOV, H., 2022. Cosine and cotangent theorems for quadrilateral and polygon. Generalization of a Carnot theorem. *Mathematics plus*, 1, 52 – 64, ISSN 0861-8321

# FORMULAE FOR THE AREAS OF SOME KINDS OF POLYGONS AND ITS APPLICATION IN PROVING RELATIONS IN THEM

**Abstract.** A new formula for the area of an arbitrary quadrilateral is applied to derive formulae for the areas of some kinds of polygons with any number of sides; these formulae are further applied to find specific relationships for concrete number of sides.

*Keywords:* quadrilateral; polygon; area; formula; relationship

✉ **Prof. DSc. Jordan Tabov**
ORCID iD: 0000-0001-5436-5134
Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of Sciences
Sofia, Bulgaria
E-mail: tabov@math.bas.bg

✉ **Dr. Asen Velchev, Assist. Prof.**
ORCID iD: 0000-0002-6653-465X
Technical University of Sofia
Sofia, Bulgaria
E-mail: asen_v@abv.bg

✉ **Dr. Stanislav Stefanov, Assist. Prof.**
ORCID iD: 0000-0002-8254-1075
University of Archtecture, Civil Engineering and Geodesy
Sofia, Bulgaria
E-mail: stanislav.toshkov@abv.bg

✉ **Haim Haimov, MSc math.**
ORCID iD: 0000-0002-0914-1059
16, Bratya Shkorpil Str.
Varna, Bulgaria