Математика и информатика | Volume 66, Number 1, 2023 | *Mathematics and Informatics*

https://doi.org/10.53656/math2023-1-1-ane

Science in Education
Научно-методически статии

НОВА ФОРМУЛА ЗА ЛИЦЕ НА ЧЕТИРИЪГЪЛНИК (ЧЕТИВО ЗА VII КЛАС)

Проф. д.п.н. Йордан Табов[1], гл. ас. д-р Асен Велчев[2], гл. ас. д-р Станислав Стефанов[2], маг. мат. Хаим Хаимов[4]

[1]Институт по математика и информатика на БАН – София
[2]Технически университет – София
[3] Университет по архитектура, строителство и геодезия – София
[4]Варна, ул. „Братя Шкорпил“ 16

Резюме. В статията се извежда формула за лице на четириъгълник с ъгъл между диагоналите $45°$, която е частен случай на по-обща формула за лице на произволен четириъгълник (Haimov 2022). Попътно се извеждат формули и за лице на триъгълник с ъгъл $45°$ (или с ъгъл $135°$). Привеждат се и формули за лицата на един вид петоъгълници и шестоъгълници под формата на задачи.

Ключови думи: формула за лице на четириъгълник; петоъгълник; шестоъгълник

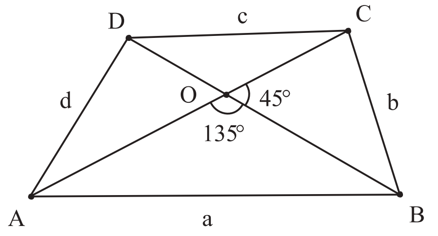
1. Въведение

Формулите за лице на триъгълник и специални видове четириъгълници – успоредник и трапец, са важен инструмент при изследването на различни въпроси от геометрията, в частност при решаването на задачи, в които участват лица на фигури. Към арсенала от тези инструменти отскоро се прибави нова формула за лице на произволен четириъгълник, останала незабелязана през дългите векове на развитие на математиката. Удобно е тя да се изучава в по-горните класове, но един неин частен случай е достъпен и за малки ученици. Тази статия е посветена на въпросната формула, разгледана в този частен случай, когато диагоналите на четириъгълника сключват ъгъл $45°$. Ако *a*, *b*, *c* и *d* са дължините на последователните страни на четириъгълника, като *b* и *d* лежат срещу ъгъла от $45°$, а *S* е лицето му (фиг. 1), тази формула е:

$$4S = a^2 + c^2 - b^2 - d^2 \tag{1}$$

2. Формула за лице на триъгълник с ъгъл $45°$ (с ъгъл $135°$)

Преди да пристъпим към доказателството на формула (1), ще изведем специална формула за лице на триъгълник, един от ъглите на който е $45°$, както и формула за лице на триъгълник с ъгъл $135°$. Те ще ни послужат и в това доказателство.



Фигура 1

Теорема 1. Нека в ΔABC дължините на страните *BC*, *CA* и *AB* са съответно *a*, *b* и *c*, а $\angle BAC = 45°$. Тогава лицето *S* на триъгълника се определя по формулата:

$$4S = b^2 + c^2 - a^2. \qquad (2)$$

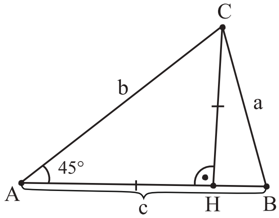
Доказателство. Означаваме с *CH* височината към страната *AB* на ΔABC, $H \in AB$ (виж фигури 2а, 2б и 2в. Възможни са три случая.

1) Нека ъгълът при върха *B* на триъгълника е остър, т.е. точката *H* лежи върху страната *AB*, $H \neq B$ (фиг. 2а).

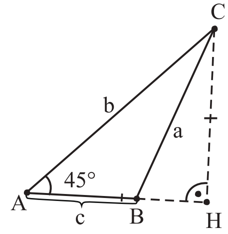
Триъгълниците ACH и BCH са правоъгълни и от Питагоровата теорема $b^2 = AH^2 + CH^2$ и $a^2 = BH^2 + CH^2$ следва:

$$b^2 - a^2 = (AH^2 + CH^2) - (BH^2 + CH^2) = AH^2 - BH^2 =$$
$$= (AH - BH).(AH + BH) = [AH - (c - AH)].c,$$

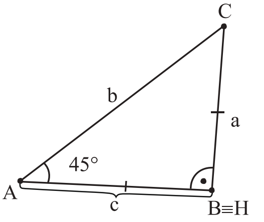
т.е. $b^2 - a^2 = 2.AH.c - c^2$.



Фигура 2а



Фигура 2б



Фигура 2в

2) Нека сега ъгълът при върха *B* в ΔABC е тъп, т.е. точката *H* лежи на продължението на страната *AB* (фиг. 2б). В този случай с помощта на Питагоровата теорема получаваме:

$$b^2 - a^2 = (AH^2 + CH^2) - (BH^2 + CH^2) = AH^2 - BH^2 =$$

$$= (AH - BH).(AH + BH) = c.[AH + (AH - c)],$$

т.е. $b^2 - a^2 = 2.AH.c - c^2$.

3) Ако ъгълът при върха B в ΔABC е прав, т.е. точка H съвпада с точка B (фиг. 2в) и $c = ac = a$, тогава от Питагоровата теорема получаваме:

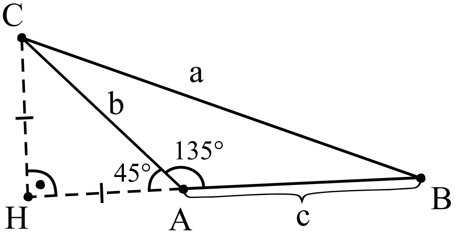
$b^2 - a^2 = c^2 = 2.c.c - c^2 = 2.AH.c - c^2$, т.е. едно и също в трите случая.

От друга страна, от равнобедрения правоъгълен ΔACH имаме $AH = CH$ (фиг. 2а, 2б и 2в). Тогава $b^2 - a^2 = 2.AH.c - c^2 = 2.CH.c - c^2 = 4S - c^2$. Оттук и получаваме непосредствено формулата (2) за лицето S.

Ще докажем и използваме и една формула за лице на триъгълник с ъгъл $135°$.

*Теорема 2***.** Нека в ΔABC дължините на страните са $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ и $\angle BAC = 135°$ (фиг. 3). Тогава лицето S на триъгълника се определя по формулата:

(3) $$4S = a^2 - b^2 - c^2.$$



Фигура 3

Доказателство. Построяваме височината CH към страната AB на ΔABC ($H \in AB$) (Фиг. 3). Понеже $\angle BAC$ е тъп, точката H лежи на продължението на отсечката BA. От правоъгълния ΔACH, в който $\angle CAH = 45°$, имаме: $AH = CH$. С помощта на Питагоровата теорема получаваме последователно:

$$a^2 - b^2 = (BH^2 + CH^2) - (AH^2 + CH^2) = BH^2 - AH^2 = (BH - AH).(BH + AH)$$

$$= c.[(c + AH) + AH] = c^2 + 2.AH.c = c^2 + 2.CH.c = c^2 + 4S,$$

откъдето непосредствено следва доказваната формула (3).

3. Доказателство на формулата за лице на четириъгълник с ъгъл между диагоналите $45°$

Вече можем да докажем дадената в началото формула за лице на четириъгълник с ъгъл между диагоналите 45^0.

Теорема 3. Нека *ABCD* е изпъкнал четириъгълник и *O* е пресечната точка на диагоналите му (фиг. 1). Ако $\angle BOC = 45°$ и дължините на страните *AB*, *BC*, *CD* и *DA* са съответно *a*, *b*, *c* и *d*, то лицето на четириъгълника се определя по формулата:

$$4S = a^2 + c^2 - b^2 - d^2. \tag{4}$$

Доказателство. Триъгълниците *BOC* и *AOD* имат ъгъл $45°$, а триъгълниците *AOB* и *COD* – ъгъл $135°$. Тогава от теореми 1 и 2 за техните лица следва съответно:

$$4S_{ABO} = a^2 - AO^2 - BO^2, 4S_{BCO} = BO^2 + CO^2 - b^2,$$

$$4S_{CDO} = c^2 - CO^2 - DO^2, 4S_{ADO} = DO^2 + AO^2 - d^2.$$

Оттук за лицето S на четириъгълника *ABCD* получаваме последователно:

$$4S = 4S_{ABO} + 4S_{BCO} + 4S_{CDO} + 4S_{ADO} =$$

$$= (a^2 - AO^2 - BO^2) + (BO^2 + CO^2 - b^2) + (c^2 - CO^2 - DO^2) + (DO^2 + AO^2 - d^2) =$$

$$= a^2 - b^2 + c^2 - d^2 - AO^2 - BO^2 + BO^2 + CO^2 - CO^2 - DO^2 + DO^2 + AO^2 =$$

$$= a^2 + c^2 - b^2 - d^2 = a^2 + c^2 - b^2 - d^2.$$

С това формула (1) за лицето на разглеждания четириъгълник е доказана.

4. Задачи

Доказаната в предния раздел формула е с широко приложение. С нейна помощ (в общия случай, когато ъгълът α между диагоналите на четириъгълника е произволен) се обобщава класическо твърдение от геометрията, известно като Теорема на Карно за триъгълника (Haimov 2021). Тя се използва и за извеждането на формули за лицата на един вид многоъгълници, както и за намирането на интересни зависимости между техни елементи (Haimov 2022). Предлагаме на читателите сами да приложат тази формула, както и формулата за лице на триъгълник с ъгъл $45°$ за решаване на следващите три задачи, две от които са снабдени с чертеж.

Задача 1. Нека *ABCDE* е петоъгълник с пресечна точка *O* на диагоналите *BD* и *CE*, като $\angle BOC = 45°$. Нека и $\angle BAE = 45°$ (фиг. 4). Да се докаже, че ако дължините на страните му са *AB* = *a*, *BC* = *b*, *CD* = *c*, *DE* = *d*, *EA* = *e* съответно, то лицето *S* на петоъгълника се определя по формулата:

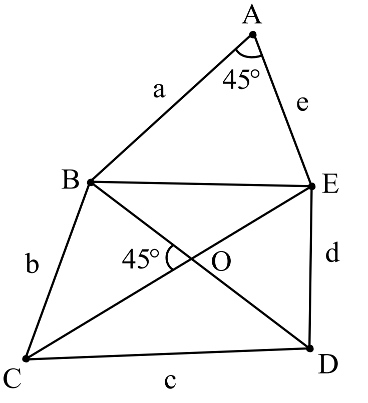
$4S = a^2 - b^2 + c^2 - d^2 + e^2$.

Задача 2. Нека *ABCDEF* е шестоъгълник с пресечна точка O_1 на диагоналите *AE* и *DF* и O_2 на диагоналите *AC* и *BD*, като $\angle EO_1D = 45°$ и $\angle AO_2D = 45°$ (фиг. 5). Ако дължините на страните му са *AB* = *a*, *BC* = *b*, *CD* = *c*, *DE* = *d*, *EF* = *e* и *FA* = *f* съответно, да се докаже, че лицето *S* на шестоъгълника се определя по формулата:

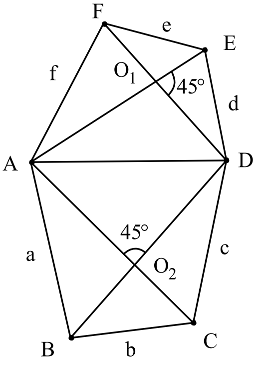
$4S = a^2 - b^2 + c^2 - d^2 + e^2 - f^2$.

Задача 3. Нека *ABCD* е четириъгълник с дължина на страната *CD* = *c*, пресечна точка *T* на диагоналите, $\angle ADC = \angle ACB = 90°$ и $\angle BTC = 45°$. Докажете, че лицето му е $S = \frac{1}{2}c^2$.

Упътване. Заедно с формула (1) за лице на четириъгълник ползвайте двукратно Питагоровата теорема.



Фигура 4



Фигура 5

5. Заключение

Нека отбележим, че от формула (1) за лице на четириъгълник следва и друга формула за лицето му (Haimov 2021; Haimov 2022), но доказателството ѝ надхвърля рамките на учебния материал за VII клас.

ЛИТЕРАТУРА

ХАИМОВ Х., 2021. Една кратка формула за лице на четириъгълник и нейното приложение, *Математика плюс*, **4**, 68 – 77. ISSN 0861-8321.

ХАИМОВ, Х., 2022. Косинусова и котангенсова теорема за четириъгълник и многоъгълник. Обобщение на една теорема на Карно. *Математика плюс*, **1**, 52 – 64. ISSN 0861-8321.

REFERENCES

HAIMOV, H., 2021. A short formula for the area of a quadrilateral and its application, *Mathematics plus*, **4**, 68 – 77. [in Bulgarian] ISSN 0861-8321.

HAIMOV, H., 2022. Cosine and cotangent theorems for quadrilateral and polygon. Generalization of a Carnot theorem. *Mathematics plus*, **1**, 52 – 64. [in Bulgarian] ISSN 0861-8321.

A NEW FORMULA FOR THE AREA OF THE QUADRILATERAL (READING FOR GRADE 7)

Abstract. Here we derive formula for the area of a quadrilateral with angle 45º between the diagonals, which is a special case of a more general formula for the area of a quadrilateral (Haimov 2022). Along the way we obtain formulas for the area of triangles with angle of 45º/135º. We also give formulas for the area of specific kinds of pentagons and hexagons, in the form of problems.

Keywords: formula for the area of a quadrilateral; pentagon; hexagon

✉ **Prof. DSc. Jordan Tabov**
ORCID iD: 0000-0001-5436-5134
Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of Sciences
Sofia, Bulgaria
E-mail: tabov@math.bas.bg

✉ **Dr. Asen Velchev, Assist. Prof.**
ORCID iD: 0000-0002-6653-465X
Technical University of Sofia
Sofia, Bulgaria
E-mail: asen_v@abv.bg

✉ **Dr. Stanislav Stefanov, Assist. Prof.**
ORCID iD: 0000-0002-8254-1075
University of Archtecture, Civil Engineering and Geodesy
Sofia, Bulgaria
E-mail: stanislav.toshkov@abv.bg

✉ **Haim Haimov, MSc math.**
ORCID iD: 0000-0002-0914-1059
16, Bratya Shkorpil Str.
Varna, Bulgaria