

РЕШАВАНЕ НА ПРОБЛЕМИ ПО МАТЕМАТИКА – СЪЩНОСТ, МОДЕЛИ, СТРАТЕГИИ И ВЪЗМОЖНОСТИ ЗА РЕАЛИЗИРАНЕ В ОБУЧЕНИЕТО НА 9 – 10-ГОДИШНИ УЧЕНИЦИ

**Доц. д-р Любка Алексиева,
Лилия Стоилова**

Софийски университет „Св. Климент Охридски“

Резюме. Съвременните реформи в образователната система в България са насочени към развитието на трансверсални умения и компетентности, заложени в държавните образователни стандарти и учебните програми по класове във всички учебни дисциплини в начален етап. Математиката е дисциплината, която развива абстрактно-логически връзки и осмисляне на света по един символен начин, намирайки пряко отражение в способността на учениците да се справят със задачи в непознати ситуации, с други думи – да решават проблеми. Настоящата статия си поставя за цел да изследва теорията за решаване на проблеми по математика в начална училищна възраст, като се търсят възможностите за нейното реализиране в обучението. Методите на изследването включват теоретично проучване на литературни източници в областта на решаването на проблеми, включително неговите равнища, моделите и стратегиите за приложението му, както и анализ на съдържанието на учебна документация за III клас. Изборът е обоснован от релевантната възраст на 9 – 10-годишните ученици за осмислянето на различни стратегии за решаване на проблеми. В резултат на проучването се представят подходящи модели и стратегии, които имат потенциал да се приложат ефективно за развитие на уменията на учениците за решаване на проблеми, като се откроява нуждата от по-голям брой задачи в учебниците, които позволяват проблематизиране.

Ключови думи: решаване на проблеми; обучение по математика; проблемни задачи

Увод

В началото на XXI век дискусиата за образованието сменя посоката си от търсене на репродуктивно знание, характерно за епохата на индустриална

революция, към формиране на знания, умения и отношения, водещи до творческо приложение на наученото, трансфер на знанията в разнообразни ситуации и умения да се решават проблеми самостоятелно или съвместно в група. Всичко това е породено от новите обществени изисквания към личността на фона на технологичния напредък. Все повече рутинни дейности се прехвърлят за изпълнение от машини, програмни системи и изкуствен интелект. Това придава нова ценност на неповторимото умение на човека да мисли и действа творчески и дивергентно, да създава ново знание, да допринася за развитието на обществото, в най-общ смисъл, чрез способността си за разсъждение. В образователната сфера в световен мащаб тази промяна се изразява в изискванията образованието на учениците да се насочи към формиране на компетентности, които да позволят на младите хора да бъдат активни участници в обществения, професионалния и личния си живот. Такива комбинации от знания, умения и отношения, които да позволят на младите хора да вземат решения и да се справят с непредвидени ситуации, вероятно ще бъдат все по-голяма част от ежедневието им в бъдеще, както наблюдаваме и днес. Именно в тази посока концепцията за компетентностен подход в образованието е заложена в цялата документация, организираща образователната система у нас чрез последните реформи от 2018/2019 г.¹ В областта на ключовите компетентности, приложими в почти всяка сфера на човешкия живот, са представени социални умения, приспособимост, самоуправление и самоконтрол, системно мислене и нерутинно решаване на проблеми, а развитието и наличието на тези компетентности „е добра основа за реализация на пълноценен живот – и в обществен, и в личностен план“ (Kenderov 2015). За реализирането на компетентностния подход във всяка актуална учебна програма за начален етап са включени текстове, насочващи учители и образователни експерти към „формиране на знания, умения и отношения, свързани с математическата компетентност на ученика“², която Министерството на образованието в България определя като „... способността за развиване и прилагане на математическо мислене при решаване на различни проблеми в ситуации от ежедневието за използване на математически начини на мислене и представяне (формули, модели, концепции, графики и диаграми)“³. В основата на развитието на тази компетентност стои развитието на ефективни мисловни процеси. Мисленето, като най-забележителното умение, характерно единствено за човека, се определя като „висш активен познавателен процес..., при който чрез сложна мозъчна дейност на анализиране, съпоставяне и синтез на явления и факти се стига до формулиране на изводи, умозаклучения, понятия и съждения“⁴. Развитието на уменията за мислене стои в основата на образованието на младите хора като висша цел на образователния процес, а съществен негов елемент е умението да се решават комплексни проблеми. Международни изследвания като TIMSS⁴ регулярно измерват постиженията в тази област на четвърток-

ласниците от цял свят. Сложността на задачите в теста на TIMSS е обособена в 4 категории – ниска, средна, висока и за напреднали. Именно нивото за напреднали се свързва с решаването на задачи, за които пътят на решение е неизвестен. Резултатите от проведеното изследване в България през 2015 и 2019 година показват, че под 10% от четвъртокласниците се справят с такъв тип комплексни задачи по математика (Mullis et al. 2020; Mavrodieva 2016), което е тревожен факт, демонстриращ необходимостта от фокусиране върху решаването на комплексни проблеми в обучението. Именно в този контекст е и настоящата статия, която е насочена към изследване на теорията за решаване на проблеми по математика в начална училищна възраст и възможностите за нейното приложение в обучението на ученици от началните класове.

Концепция за решаване на проблеми в обучението по математика

В европейските и националните образователни документи ясно личи фокусът към уменията за решаване на проблеми като основно изразно средство на математическата компетентност. Решаването на проблеми е отдавна познат аспект на образованието по света. За основоположник на концепцията се смята Пойа (1972), който дефинира решаването на проблеми като практическо умение, което се придобива чрез подражание и практика. За да се изпълни подражанието, учителят следва чрез известна драматизация да демонстрира процеса си на мислене чрез задаване на ключови въпроси. По този начин учениците се научават да задават тези въпроси на себе си, когато са изправени пред дадена задача (проблем) (Polya 1972). Съобразно Програмата за международно оценяване на учениците (PISA) проблемът се определя като ситуация, за която липсва очевидно решение и има нужда от мислене и учене, за да се разреши. Умението да се решават проблеми в PISA, се дефинира като „индивидуална способност за прилагане на когнитивен процес за разбиране и разрешаване на проблемна ситуация, за която методът на решение не е очевиден“. Според Националния съвет на учителите по математика на САЩ основните цели на обучението по математика са разбирането и решаването на проблеми, като двете цели са неразривно свързани, тъй като ученето на математика чрез разбиране се осигурява най-адекватно именно чрез решаване на проблеми (Lester & Charles 2003). Стърнбърг (Sternberg 2012) обобщава решаването на проблеми като „усилието да се преодолеят пречките по пътя към решението“. Министерството на образованието на Нова Зеландия определя проблема като въпрос, който мотивира индивида да търси решение, като отново се набляга на основната характеристика – необходимостта от разсъждение, породена от липсата на бърз отговор. Според това определение решаването на проблема се крие предимно в търсене на решението, а не само в постигането на отговор на математически проблем⁵. За целите на настоящото изследване ние приемаме определението на PISA за проблем (ситуация, за

която липсва очевидно решение и има нужда от мислене и учене, за да се разреши), а решаването на проблеми – като когнитивно усилие, което изисква подход на досещане и стратегическо мислене (Kolovou 2011).

Решаването на проблеми е ключова и основна дейност в подходите за активно учене като изследователския подход, проблемно базираното и проектно базираното обучение. Изследователският подход се основава на естествен процес на проучване и решаване на проблеми, при който учениците са активни участници в изграждането на собствените си знания. Проблемно базираното обучение често се класифицира като вид изследователски подход и границите между тях не са ясно и еднозначно обособени в литературата. Сходството между проблемно и проектно базираното обучение се крие в това, че и двата подхода решават проблеми от реалния живот, интердисциплинарни са и подпомагат развитието на уменията за решаване на проблеми, критичното мислене и креативността. Проблемно базираното обучение се свързва с развитието на конструктивистката парадигма в образованието и включва възможности за активно учене чрез прилагане на по-рано придобити знания и умения, решаване на реални и интересни проблеми с по-ниска степен на структурираност за избягване на еднозначни отговори, включително в сътрудничество (Atanasova 2014). Някои изследователи говорят за проблемно продуктивна стратегия за преподаване в начален етап на основно образование, която цели да въвлече учениците в активна позиция на предлагане на идеи, проучване на възможни решения, планиране и изпълнение, преглед на изпълнението и самооценка (Mincheva, Charkova, Ivanova 2017). В проучвания за STEM подхода в обучението по математика, който в своята същност е ориентиран към решаване на проблеми, също се потвърждава, че децата учат по-добре в уроци, в които се задълбочава разбирането за приложението на теоретичните понятия на практика и се решават проблемни ситуации (Aleksieva 2020). Всъщност още в началото на века, в своята „Методика на обучението по математика в началните класове“ Новакова твърди, че проблемното обучение подпомага преодоляването на формализма в знанията и чрез него се развиват уменията на учениците за разсъждение, доказване и творческо приложение на знанията и уменията (Novakova 2004). Основно средство за реализиране на проблемно обучение е проблемната задача, която Николов, Александрова и Кръстев (2007) свързват с евристичната задача, като подчертават, че при проблемната задача определящо е възникването на нужда от познание, породено от противоречието между наличните знания и опит на учениците и изискванията на задачата. От друга страна, за евристичната задача съществено е търсенето на нестандартен тип решение. Върбанова (Varbanova 2013) също говори за евристична беседа в часовете по математика, подходяща за извличане на предходен опит на учениците с цел развитие на нови знания и умения. При проблемните задачи се наблюдават специфични умствени състояния на уче-

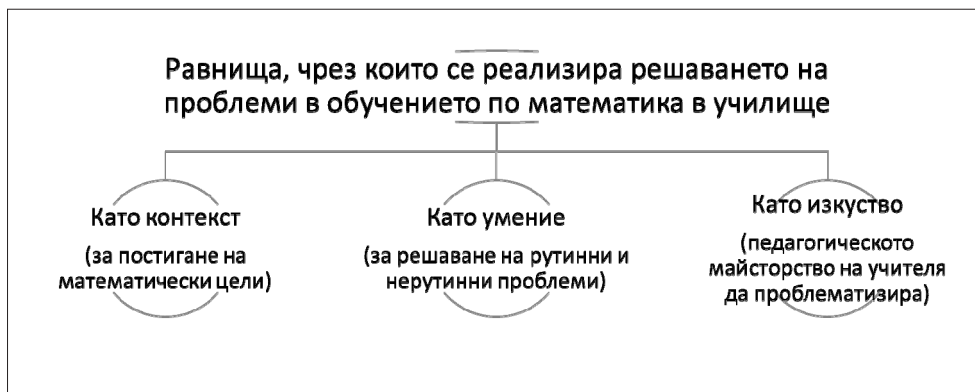
ниците – „висока мобилизация; психическо напрежение от затруднението; безпокойство и колебание; психическо съсредоточаване; противоречивост и избирателност; самочувствие за „откривателство“ при намиране на решението и т.н.“ (Nikolov et al. 2007). Всички тези твърдения и наблюдения ни дават основание да извлечем следните **обща характеристика на решаването на проблеми** в учебния процес по математика: 1) учебна ситуация, задача, проблем с наличие на дисонанс между моментното състояние (знание) и целта; 2) когнитивен процес на активно търсене на път, начин, стратегия за постигане на определена цел (решение на задачата); 3) умствено усилие за преодоляване на интелектуално предизвикателство, породено от дефицит на знания и умения.

Наред с ползите, набелязани от множество автори за приложението на базираното на проблеми обучение, са известни и някои ограничения. Ученето чрез решаване на проблеми изисква повече време за работа (Novakova 2004), повече време за подготовка на учителя, и води до някои трудности, свързани с улавяне интереса на учениците, подбиране на достъпни и разбираеми проблемни задачи, развиващи както знания и умения, заложен в учебните програми, така и математическите разсъждения (Gadjalov & Ivanov 2019). В допълнение някои изследвания сочат, че умението за решаване на проблеми зависи основно от наличните знания на обучаемия, а не толкова от честото прилагане на проблемно базирано обучение (Jefferson 2001). Въпреки тези ограничения решаването на проблеми има значимо място в развитието на математическата компетентност на учениците. Преносът на усвоени знания и умения в нови ситуации е от решаващо значение за дълбочината на разбирането им и за развитието на способности за справяне в непредвидени ситуации.

Равнища на решаване на проблеми в обучението по математика

Решаването на проблеми е широка концепция, дефинирана по различни начини от учените и експертите. Нейната многообразност се демонстрира от определените от Националния съвет на учителите по математика на САЩ **три основни равнища**, чрез които се реализира решаването на проблеми в обучението по математика в училище. От една страна, решаването на проблеми се разглежда като контекст. В този смисъл то служи за постигане други, по-скоро математически цели. Най-често, включително и в практиката в България, се предоставя проблемна ситуация, която да послужи като обосновка на новото знание и да мотивира учениците да го научат (Novakova 2004; Lester & Charles 2003). Така например в много учебници конкретно знание се въвежда чрез поставяне на задача, която след това е обяснена в самия учебник, а учителят заедно с учениците разыгрва ситуацията и решението. По този начин чрез подражание и практика учениците се научават да

решават новия вид задачи⁷. Второто равнище на решаването на проблеми е разбирането му като умение, което може да бъде заложено в учебните програми по математика. Това поставя въпроса за изграждането на уменията в своеобразна йерархична структура със съответните нива на постижения. Такива нива може да представляват рутинните и нерутинните проблеми, описвани от множество автори (Kolovou, 2011; Lester & Charles 2003). Сред първите спадат задачи от познат тип или такива, за които учениците разполагат с точни алгоритми и процедури, които прилагат директно. Нерутинни са онези проблеми, които представляват сериозна трудност за някои ученици, тъй като изискват разсъждение и творчески подход в прилагането на знанията и уменията. Ванева (Vaneva 2003) разграничава двата вида проблеми като алгоритмични и евристични, което се свързва с разбирането за рутинни и нерутинни задачи. В когнитивната психология са възприети понятията „добре структуриран проблем“ и „зле структуриран проблем“, като под първото се разбират задачи с ясен път на решение, а второто позволява различен изход в зависимост от приетия подход към решението (Sternberg 2012; Cummins 2012). Това разбиране позволява изграждане на педагогически модели за развитие на уменията на учениците да решават комплексни проблеми по математика по структуриран и систематичен начин. Третото равнище на разбиране е за решаването на проблеми като изкуство. То се свързва с педагогическото майсторство на учителя, ръководейки се от интереса на учениците в класната стая и непосредствения контекст, да проблематизира задачите, така че да активира мотивацията и усилията им да се справят с проблеми, с които до този момент не са се сблъскали (Lester & Charles 2003). Трите равнища на дефиниране на решаването на проблеми са представени на фигура 1 по-долу.



Фигура 1. Равнища на решаване на проблеми

Именно решаването на проблеми като умение в комбинация с разбирането на подхода като изкуство може да намери по-достойно място в теорията и практиката на обучението по математика в българското начално училище, както и в следващите образователни степени. В стремежа си да операционализират това умение, множество автори са изградили модели за решаване на проблеми глобално или в частност за преподаването на математика. Такива модели ще бъдат представени в следващите параграфи.

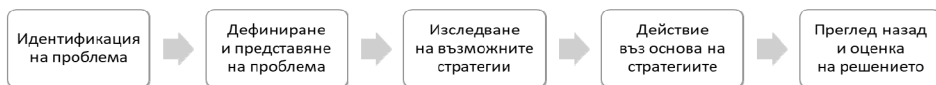
Модели за решаване на проблеми

Моделите за решаване на проблеми представят стъпка по стъпка процеси, които осигуряват рамката за справяне със съответното предизвикателство. Един от най-широко разпространените модели за преподаване на решаване на проблеми е този на Пойа (Polya 1972), включващ метода на четирите стъпки (фигура 2).



Фигура 2. Модел на Пойа за решаване на проблеми

Този модел намира широко приложение в съвременните учебници по математика за начален етап при решаване на текстови задачи. В един от вариантите четирите стъпки са представени чрез модел на ръка с оцветени пръсти за първа, втора и пр. стъпка⁷. Тук е мястото да се уточни, че има съществена разлика между проблемните задачи и традиционните текстови задачи, които са неизменна част от съдържанието на обучението по математика, съответно на уроците, учебниците и други помагала за работа по математика. Тя се изразява в нещо повече от често срещаните затруднения на учениците с разбирането на текста и изчисленията. Различието произхожда от необходимостта учениците да изработят сами символно описание на значима (за тях) ситуация, с други думи – самостоятелността на процеса на вземане на решение за действие и самото действие (Lesh, Harel 2003). Ванева (Vaneva 2003) предлага 5-стъпков модел за решаване на проблеми, разработен от Брансфорд и Стей и представен на фигура 3.



Фигура 3. Модел на Ванева за решаване на проблеми

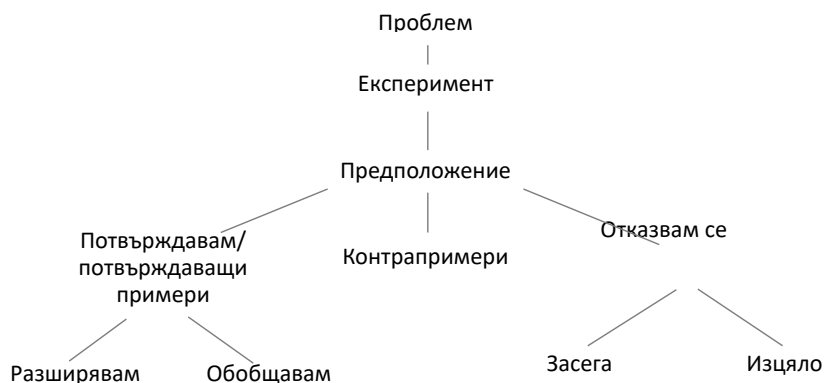
Считаме, че предложеното от Ванева отделяне на етап за разглеждане на възможни стратегии за действие и избор измежду обмислените е целесообразен подход при формиране на умения за проследяване на собственото мислене и изграждане у учениците на разбиране за мисленето като процес. Сред множеството модели за решаване на проблеми се откроява и този на Стърнбърг (Sternberg 2012, p. 455), представен на фигура 4 и включващ 7 стъпки.



Фигура 4. Модел на Стърнбърг за решаване на проблеми

Тук е важно да се отбележи, че моделът на Стърнбърг не е съставен за образователни цели и това е причина за разграничаването на множество стъпки в него спрямо педагогическите модели, които имат нужда от простота, за да бъдат обхванати стъпките от учениците. Все пак предложението на Стърнбърг може да бъде съотнесено спрямо модела на Пойа с оглед лекотата на преподавателската работа. Така например разпределянето на ресурси би могло да се включи в предходния етап (организиране на информацията за проблема), а наблюдението на решението може да се обедини с оценяването на това решение.

Друг модел за решаване на проблеми е научният (фиг. 5), който се използва в изследователския подход, както и в STEM. Според него субектът, решаващ задачата, първо дефинира проблема, след което експериментира, за да формулира някакво предположение. Предположението се проверява, за да се потвърди или отхвърли. Проверката се извършва чрез множество примери, като в процеса се търсят и контрапримери. Ако предположението се потвърди, може да се формулира обобщено правило, закономерност и да се търсят възможности за приложение в други ситуации (разширения). Ако предположението не се потвърди, субектът би могъл да се откаже за кратко, за да събере още необходима информация, или да се откаже изобщо, ако разбира, че на този етап е достигнал пределна точка в работата си⁶. Научният модел е изключително полезен при въвеждане на ново математическо знание, когато се събира предварителният опит на учениците в подобни ситуации и се изграждат хипотези за възможни решения. На тази база учителят може да прецизира преподаването си спрямо нивото на класа, да повиши мотивацията за работа и ефективността на учебния процес.



Фигура 5. Научен модел за решаване на проблеми

Моделът, който Hyde (2015) предлага в книгата си *Comprehending Problem Solving*, наричайки го „модел на плитката“, е още една възможност за структуриране на работата по преподаване и учене в решаване на проблеми. Според него процесът започва с визуализация и задаване на ключови въпроси, които да осигурят задълбочено разбиране на проблема. Когнитивната работа продължава с изграждане на връзки между елементите и от елементите – към неизвестното, за да се постигнат умозаклучения, които залягат в основата на плана за действие. В създаването на плана за действие ключова роля имат стратегиите за решаване на проблеми, които учениците познават и биха могли да приложат. Едва след това се пристъпва към изпълнение на плана и ревизия, проверка. Представен в табличен вид, методът на плитката предлага подробна структура, която да служи като опора на мисълта в процеса на решаване на проблемна задача. Броят на стъпките обаче отново е по-голям, въпреки педагогическата насоченост на модела. Разграничени са етапи в процеса на разбиране на проблема, за които учениците в начален етап все още нямат достатъчна осъзнатост, въпреки че са формулирани като въпроси (каква картина си представям (за задачата), как тази картина ми помага да разбера задачата, визуализиране на задачата (какво става тук?).

Изборът на модел за преподаване в развитие на уменията да се решават проблеми, е съществен елемент в подготовката на учителите за внедряване на подхода в класната стая. Приложението на модела на Пойа в комбинация с научния модел би позволило на учителите в България да използват познат конструктор в нова ситуация и да го доразвиват чрез приучаването на учениците да разсъждават, подражавайки и практикувайки научно мислене, базирано на изграждане и проверка на хипотези. Въвеждането в практиката на решаване на проблеми като образователна структура изисква още едно ниво на опера-

ционализация. То се изразява в преподаване и учене на конкретни мисловни стратегии, които да подпомагат учениците в осмислянето на проблемната ситуация/задачата, както и в търсене на най-подходящия път за решаването ѝ.

Стратегии за решаване на проблеми

Стратегията представлява „... програма за дейност, ... пряко насочена към реализиране на определени цели“ (Desev 2008), а стратегиите за учене могат да се дефинират като „подходи“, чрез които учениците усвояват „опит и ценности“ (Desev 2008). Авторът разграничава стратегии на първично и общено повторение, формиране на умствена представа (образ); преформулиране, сумиране, обясняване на новото чрез старо, усвоено знание, аналогия, както и организационни стратегии за първични (прости) и сложни учебни задачи. Сред първите са групиране, хронология, подреждане, докато към сложните стратегии Десев (2008) отнася стратегии като изграждане на йерархия, диаграма, самопроверка, формулиране на въпроси. В този смисъл стратегията се разбира като постъпков план за решаване на проблем, а стратегическото мислене – като мислене за процеса на действие в неговата декомпозиция.

Съществен елемент от процеса на решаване на проблем е досещането, като умение. Още Пойа разграничава доказателствени разсъждения и правдоподобни разсъждения, базирани на досещания. Първите определя като „твърди стандарти“, подчинени на логиката, докато правдоподобното разсъждение свързва с догадката, най-вече с „разумната догадка“. Именно правдоподобните разсъждения авторът свързва с новооткритията в науката и в частност в математиката (Polya 1970). Те стоят в основата на евристиката, разбираана като средство за „изучаване методите и правилата за откриване и изобретяване“ (Polya 1972) или „съкратени пътища“ за достигане до знание или вземане на решение (Kahneman 2012). Според Ванева (2003) конкретни евристики, които могат да се прилагат като стратегии за решаване на различни видове проблеми, са анализът на средствата и целите (опростяване на проблема), работата в обратен ред и използването на аналогия. В литературата се поставя акцент върху различни мисловни стратегии, които могат да се представят на вниманието на учениците и те да се обучават в прилагането им. Hyde (2015) определя 12 такива стратегии за решаване на проблеми: изработка на модел, разиграване (проиграване), търсене на закономерност, работа отзад напред, рисуване на схема (картинка), подреждане в таблица, използване на логически разсъждения, опростяване на проблема, подреждане в систематизиран списък, преобразуване на проблема в уравнение, четене и чертане на диаграма, предположение и проверка. Друго предложение за броя и вида преподавани стратегии за решаване на проблеми включва четене и чертане на диаграма, разиграване (проиграване), използване на манипулативи (дидактични физически материали), предположение и проверка, подреждане в таблица и

подреждане в систематизиран списък⁵. В популярната иновативна система за обучение по математика Jump Math също се предвижда въвеждането на такива стратегии от трети клас. В допълнение на ръководствата на учителя за III клас на Jump Math са структурирани уроци за 4 стратегии: разпознаване и използване на определена структура, подреждане в систематизиран списък, четене и чертане на диаграма, опростяване на проблем (Mighton et al. 2014). В IV клас се добавя още една стратегия – предположение и проверка (Mighton et al. 2015), докато за по-малките класове отделни уроци за работа със стратегии не се предлагат. Те са включени в структурата на стандартните уроци по математика.

Може да се обобщи, че независимо от различията някои стратегии, като систематично търсене (систематизиран списък), използване на диаграми, опростяване, търсене на закономерности, са често препоръчвани като носещи значима добавена стойност в образователния процес по математика в началното училище. Преподаването на стратегиите може да се свърже с почти всяко конкретно знание независимо от учебния предмет, както и с почти всяко математическо знание. Необходимо е учителят да насочи вниманието на учениците към приложението им в различни контексти за справяне с проблемни задачи. Това би се постигнало по-лесно, ако учебните програми и създадените съобразно тях учебници и учебни помагала предоставят възможности за целенасочено учене в разпознаване и прилагане на стратегии за решаване на проблеми/задачи. Считаме, че щом в учебните програми по математика са заложени някои дейности, свързани с моделирането, като извличане на информация от чертежи, схеми и таблици, и съдържателно интерпретиране на резултатите при решаване на даден проблем, то в учебниците и учебните помагала биха могли да се предложат конкретни стратегии, подпомагащи решаването на проблеми. В тази връзка, в следващите параграфи ще бъдат разгледани конкретните възможности, които някои от учебниците в България предлагат за обучение в решаване на проблеми.

Възможности за решаване на проблеми чрез задачите в учебниците по математика за 9 – 10-годишни ученици (III клас)

Класът и разделът от учебното съдържание за изследване възможностите за решаване на проблеми са избрани целенасочено поради няколко причини, основната от които е свързана с необходимата степен на развитие на мисленето у малките ученици. В I и II клас тяхното мислене се намира в етапа на нагледните образи и представи (нагледно-образно мислене) и едва в III клас (9 – 10-годишна възраст) започва следващият етап, в който настъпват по-осезаеми изменения – мисловната дейност на учениците „се превръща в относително самостоятелна работа на анализиране, синтезиране, обобщаване“ (Krasteva 2010) и учениците са способни да извършват аналитико-синтетична

дейност (Krasteva 2010). Както е видно от етапите на разгледаните модели и стратегии за решаване на проблеми, това е важна предпоставка за ефективното им приложение. Неслучайно именно в III клас учениците за първи път се срещат с модела за деление на дву- и трицифрено число с едноцифрено. Това ги поставя в ситуация да задълбочат разбирането си за аритметичните операции с необходимостта за започване на алгоритъма от най-голямата позиционна стойност на делимото число. Точно обратното са се учили да правят учениците до момента, тъй като процедурите за изчисляване на събиране и изваждане започват от най-малка позиционна стойност. Тази промяна се оказва повратна точка за малките ученици и голямо предизвикателство в усъвършенстване уменията им за смятане. Съобразно учебната програма за III клас по математика, усвояването на математическото съдържание се осъществява чрез използването на разнообразни дейности, допринасящи и за овладяването на ключови компетентности и съответно за личностното развитие на учениците. Доколко учебниците предлагат подобни дейности обаче, е друг въпрос. За да се проверят възможностите, които чрез учебниците се предоставят за решаване на проблеми, беше направен кратък анализ на няколко учебника за III клас в раздела за деление.

Целта на този анализ е да открие възможностите, предложени в различни учебници по математика за III клас, за решаване на проблеми. Основен **метод** на изследване на учебната литература е анализът на съдържанието (content analysis) на избрани учебници.

Процедура по подбор на учебниците: използвани са учебници по математика за III клас на пет издателства. На учебниците са поставени идентификационни номера, както следва: M1 – учебник на „Просвета“⁶; M2 – учебник на „Анубис“⁷; M3 – учебник на „Рива“⁸; M4 – учебник на „Архимед“⁹; M5 – ръководство на учителя на системата Jump Math¹⁰. Те са подбрани като представителни за учебници, разработени от по-големи издателства с разширени екипи, (M1 и M2) и такива, разработени от по-малки издателства и екипи (M3, M4, M5). Освен това представляват различни по големина авторски колективи. Учебникът M2 и ръководството за учителя на Jump Math са разработени от по-големи екипи в сравнение с по двама автори на M1, M3 и M4. Четири от учебниците са издадени от български издателства, структурирани според учебната програма и спрямо традиционната методика за преподаване на математика за начален етап. Ръководството на учителя на Jump Math е структурирано спрямо учебната програма на САЩ и адаптирано за приложение в български класни стаи чрез съкращаване и пренареждане на съдържанието, така че да отговаря на учебната програма у нас. Материалите на Jump Math се използват в България от 2011 година, а основните ползи, които носят на учениците и учителите, са свързани с по-задълбочено концептуално разбиране на математическото съдържание, търсене на обосновка на матема-

тическите алгоритми и реални приложения на знанията и уменията, заложен в програмата.

Резултати и дискусия

Задачите в раздел „Деление“ във всички избрани учебници могат да се разпределят в две основни категории – рутинни задачи (изискващи директно приложение на математически алгоритми и процедури) и нерутинни задачи (изискващи известно творчество, досещане или приложение на алгоритмите с някаква промяна спрямо преподаваните начини за употреба). Вторият вид, нерутинните задачи, също може да се раздели на две групи – нерутинни задачи в контекст (представящи реална или част от реална житейска ситуация) и нерутинни задачи с абстрактен характер (които се отнасят изцяло до математически задачи от типа да се предложи вариант за пресмятане на две трицифрени числа със заемане, преди да е преподаден алгоритъмът, на база знанията за събиране на двуцифрени числа с преминаване). Учебното съдържание, преподавано по системата Jump Math, е разпределено в тематични раздели (деление, измерване и мерни единици за дължина, време, мерни единици за тегло и вместимост, работа с числови изрази и неизвестни компоненти в числов израз), докато в традиционните учебници тези теми се свързват в един раздел и се подчиняват на аритметичното знание. Поради тази причина в анализа бяха включени всички уроци от Jump Math, чиито теми са еквивалентни на включените в разделите за деление теми в традиционните български учебници, независимо че спадат към друг раздел в канадската система. Броят на уроците в съответните раздели на четирите учебни пособия е близък и това е показано на таблица 1. Прави впечатление, че в учебника на „Архимед“ уроците в раздела са поне с 8 по-малко, отколкото в останалите учебници.

Таблица 1. Брой уроци в раздел за деление на разглежданите учебници за III клас

Учебник	M1	M2	M3	M4	M5
Брой уроци в раздел за деление	36	31	36	23	31

От резултатите от анализа е установено, че в четирите традиционни учебника има задачи, които осигуряват възможности за решаване на проблеми от учениците, но те са твърде малко на брой (по-малко от 5% от всички задачи в раздела), както е видно в таблица 2. На места възможността за подобен тип работа е допълнително намалена чрез предоставяне на подсказки на страницата в учебника под формата на цветно каре. Това отнема възможността на учениците да разсъждават самостоятелно, да експериментират с възможности, и интуитивно ги насочва към приложение на предложения начин на

решение. Впечатление прави и значително по-големият общ брой задачи в ръководството на учителя на Jump Math, както и численото превъзходство на задачите тип проблем в него. Интересно е, че въпреки по-малкия брой уроци и значително по-малкия общ брой задачи в раздела за деление учебник М4 предоставя втория най-голям брой нерутинни задачи след М2. Това е ясен знак, че количеството задачи не определя качеството им. Подобрене може да се търси не в увеличаване количеството задачи в съответния учебник, а в замяна на някои рутинни задачи с нерутинни, с възможност за прилагане на различни стратегии за мислене.

Таблица 2. Брой задачи по видове в раздел за деление на изследваните учебници

Учебник (раздел „Деление“)	Общ брой задачи в раздела	1. Брой рутинни задачи	2. Брой нерутинни задачи			
			2.1. Брой нерутинни задачи в контекст	2.2. Брой нерутинни задачи, символни	2.3. Общо	Общо в %
М1	206	198	7	1	8	3,9%
М2	207	197	6	4	10	4,8%
М3	237	230	4	3	7	3%
М4	111	106	5	0	5	4,5%
М5	270	212	20	33	58	21,5%

В раздел „Деление“ учениците решават между 200 и 270 задачи, от които едва 5% до 21,5% позволяват да проявяват творчество към процеса на решение, да търсят самостоятелно или с подкрепа мисловни стратегии, чрез които да достигат до решения, и да анализират тези стратегии с оглед по-ефективно приложение в бъдещи ситуации. Това би могло да се разглежда като основен фактор за ниската успеваемост на международни оценявания като TIMSS в степен „за напреднали“ на решаване на задачи по математика. Тук все пак е важно да отбележим, че учебникът, макар и основно дидактическо средство, не е определящ фактор за реализирането на учебния процес, доколкото учителят, неговата компетентност и методи на работа са решаващи фактори. Въпреки минималния дял задачи, които са предвидени в разгледаните учебници с цел решаване на проблеми, все пак учителите разполагат с такива, но е въпрос на бъдещи изследвания да се установи доколко ги използват. Резултатите от TIMSS за България и техният спад с 9 точки през 2019 (Mullis et al. 2020) демонстрират, че явно, не се работи много в тази посока, което налага допълнителни изследвания на причините за това. Увеличаването на броя задачи от вида проблеми в учебниците и учебните помагала може да се окаже полезна стъпка в развитието на уменията на учениците да решават комплексни про-

блеми по математика. Паралелно с това е необходимо учителите да разполагат с необходимите знания, компетентности и мотивация да прилагат подходящи модели и стратегии за тази цел. Това обосновава необходимостта от създаването на адекватни на българския контекст модели за решаване на проблеми, които да бъдат приложими в началните класове, отговаряйки на учебните програми и развивайки ключовите компетентности, необходими на съвременните ученици на XXI век.

Заклучение

В статията бяха разгледани различни аспекти на решаването на проблеми в обучението по математика – неговата същност в контекста на ключовите компетентности, различните му равнища на приложение, специфичните модели и стратегии, които могат да се използват за неговото реализиране в началните класове, и потенциалните възможности, които учебниците предлагат за целта. Математическата компетентност логично се оказва тясно свързана с развитието на уменията на учениците да решават комплексни проблеми по математика, чрез които да се учат да изследват и прилагат мисловни стратегии за изграждане на решения и постигане на еднозначни и нееднозначни отговори. Теоретичното проучване ни даде основание да заключим, че наличието на подобен тип работа, ориентирана около преподаване и учене на стратегии за решаване на задачи още от начален етап, ще позволи на учениците да изградят мотивация за учене и стабилност на математическите си знания, които да надградят в следващите образователни степени. Освен това, този тип дейност ще направи знанията и уменията на учениците по-гъвкави спрямо образователните и житейските контексти, в които попадат. Първото равнище на решаване на проблеми, което е добре познато на традиционната методика, а именно като контекст за въвеждане на нови знания и умения, не е достатъчно – необходимо е по-високите равнища на концепцията за решаване на проблеми (като конкретно умение и като творчество) да намерят по-достойно място в теорията и практиката на българското начално образование и чрез тях да се повиши качеството на учебно-възпитателния процес за учениците. Тук на преден план изпъква нуждата от избор и дефиниране на модел за методическа работа за решаване на проблеми и подходящ подбор на стратегии, които да бъдат преподавани в началните класове. От анализа на разгледаната учебна документация се открие и нуждата от по-голям брой задачи в учебниците и учебните помагала по математика, които да предоставят възможности за проблематизиране на задачите и активиране усилията на учениците в разсъждения за стратегии и възможни решения. Увеличаването на броя проблемни задачи не означава задължително увеличаване на броя задачи в учебното средство. Може да се приложи подход на замяна или преформулиране на налични задачи с оглед превръщането им в проблемни.

Настоящото изследване има и своите специфични ограничения. Основното от тях е свързано с непълния обхват на изследваното учебно съдържание в учебниците. Отворени остават въпросите за работата на учителите с конкретните учебници, техните нагласи, практики и опит за развиване у учениците на умения за решаване на проблеми. Макар и непредставително като обем, изследваното съдържание все пак дава ясен ориентир за предлаганите в учебниците за III клас възможности, което удовлетворява поставената в статията цел. В рамките на изследването се очертават и много съществени въпроси за разрешаване, които са планирани като част от бъдеща изследователска работа. Един от най-важните от тях е подготовката на педагогическите специалисти за формиране на умения у учениците за откриване, разпознаване и прилагане на стратегии за решаване на проблеми в часовете по математика и преносът на тези умения в други познавателни области.

БЕЛЕЖКИ

1. МОН, 2019. КОМПЕТЕНТНОСТЕН ПОДХОД. [viewed 02.05.2022]. Available from: <https://www.mon.bg/bg/100770>.
2. МОН, УЧЕБНИ ПРОГРАМИ ПО МАТЕМАТИКА ЗА I – IV КЛАС, Available from: <https://web.mon.bg/bg/28>. [viewed 03.08.2022]
3. ИНСТИТУТ ЗА БЪЛГАРСКИ ЕЗИК. Available from: <https://ibl.bas.bg/rbe/lang/bg/>. [viewed 02.05.2022]
4. TRENDS IN INTERNATIONAL MATHEMATICS AND SCIENCE STUDY, <https://timssandpirls.bc.edu/timss-landing.html>.
5. NEW ZEALAND GOVERNMENT OF EDUCATION: PROBLEM SOLVING INFORMATION, [viewed 02.05.2022]. Available from: <https://nzmaths.co.nz/problem-solving-information>; What is Problem Solving? Available from: <https://nzmaths.co.nz/what-problem-solving>; [viewed 03.05.2022]; Available from: <https://nzmaths.co.nz/problem-solving-strategies>. [viewed 03.05.2022]
6. М1: АНГЕЛОВА, В., КОЛЕВА, Ж., (2018). Учебник по математика за 3. клас. Просвета +.
7. М2: ВИТАНОВ, Т., КИРОВА, Г., ШАРКОВА, З., ПУШКАРОВА, И., ПАРУШЕВА, Д., (2018). Учебник по математика за 3. клас. ИК Анубис.
8. М3: АЛЕКСИЕВА, Л., КИРИЛОВА, М., (2018). Учебник по математика за 3. клас. ИК Рива.
9. М4: ПАСКАЛЕВ, ПЛ., ПАСКАЛЕВА, ЗДР., (2018). УЧЕБНИК ПО МАТЕМАТИКА ЗА 3. КЛАС. Архимед.
10. М5: ИНСТИТУТ ЗА ПРОГРЕСИВНО ОБРАЗОВАНИЕ (2022). Jump Math, Problem Solving Lessons for 3rd Grade.
11. ГАДЖАЛОВ, Н.; ИВАНОВ, М., 2019. Извеждане на модел на проблем-

- на задача при обучението на курсантите. 4. с. 5 – 10. Available from: <https://www.researchgate.net/publication/330666472>. [viewed 02.05.2022].
12. OECD (2013) PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy, OECD Publishing, Paris, [viewed 03.08.2022]. Available from: <https://doi.org/10.1787/9789264190511-6-en>.
13. European Commission, 2019. Key competences for lifelong learning, Publications Office, Available from: <https://data.europa.eu/doi/10.2766/569540>. [viewed 03.08.2022].

REFERENCES

- ALEKSIEVA, L., 2020. STEM in the context of national mathematics education standards in primary school, *Образование и изкуство: Традиции и перспективи. Сборник доклади от Научно-практическа конферентсия, посветена на 80-годишнината от рождението на проф. д-р Георги Бизхков* Available from: <https://fnoi.uni-sofia.bg/wp-content/uploads/2020/11/bizhkov.pdf> [viewed 02.05.2022] [In Bulgarian]. ISBN 978-954-07-5061-3.
- ATANASOVA, N., 2014. Problem based learning in school – archaism or innovation. *Balgarski uchitel*, no. 2, pp. 45 – 54 [In Bulgarian] ISSN 1314-9482.
- GADJALOV, N.; IVANOV, M., 2019. *Developing a model of problem-based task in education of cadets*, no. 4. pp. 5 – 10.
- DESEV, L., 2008. *Rechnik po psihologiya*. Sofia: Bulgaria [In Bulgarian]. ISBN: 978-954-07-5602-8.
- JEFFERSON, J. R. PT, Problem-Based Learning and the Promotion of Problem Solving: Choices for Physical Therapy Curricula. *Journal of Physical Therapy Education*, vol. 15, no. 1, pp. 26 – 31.
- KAHNEMAN, D., 2011. *Thinking, Fast and Slow*. New York: Farrar, Straus and Giroux.
- KENDEROV, P., 2015. Predgovor. V: T. CHEHLAROVA, E. SENDOVA (red). *Dobri praktiki v obrazovaniето по математика и IT за развиване на ключови компетентности*. Sofia: Makros [In Bulgarian]. ISBN 978-954-561-389-0.
- KOLOVOU, A., 2011. *Mathematical Problem Solving In Primary School*. Dissertation Utrecht University, Netherlands.
- KRASTOVA, A., 2010. Edward de Bono i kak da nauchim uchenite da mislyat? *Nachalno obrazovanie*, no. 1, pp. 5 – 11. ISSN 1314-8540.
- LESH, R.; HAREL, G., 2003. Problem Solving, Modeling, and Local Conceptual Development. *Mathematical Thinking and Learning*, vol. 5, no. 2 – 3, pp. 157 – 189, [viewed 03.05.2022]. Available from: DOI: 10.1080/10986065.2003.9679998.

- LESTER, F. K. JR; CHARLES, R. I. (EDS.), 2003. *Teaching Mathematics through Problem Solving. Prekindergarten-Grade 6*. National Council of Teachers of Mathematics, Inc.
- MIGHTON, J.; KLEBANOV, A.; RAHBAR, S.; MERKURIO, S., 2014. *Jump Math, rakovodstvo za uchitelya*, 3. Klas. Sofia: Institut za progresivno obrazovanie.
- MIGHTON, J.; KLEBANOV, A.; SABOURIN, S. 2015. *Jump Math, rakovodstvo za uchitelya*, 4. klas. Sofia: Institut za progresivno obrazovanie.
- MAVRODIEVA, M., 2016. Results of the Bulgarian 4th grade students in TIMSS 2015. *Strategies for Policy in Science and Education*, vol. 24, no. 6, pp. 575 – 579. ISSN 1314–8575 (Online).
- MINCHEVA, R.; CHARKOVA, P.; IVANOVA, ST., 2017. *Problemno-produktivna strategiya i varianti za neynoto prilozhenie v obuchenieto po matematika v I – IV klas*. Stara Zagora: Trakiiski universitet. ISSN 2603-3178.
- MULLIS, I.; MARTIN, M.; FOY, P.; KELLY, D.; FISHBEIN, B., 2020. *TIMSS 2019 – International Results in Mathematics and science*. Boston: Boston College and International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).
- NIKOLOV, P.; ALEKSANDROVA, N.; KRASSTEV L., 2007. *Pedagogicheska psihologiya*. Blagoevgrad: Neofit Rilski [In Bulgarian]. ISBN 978-954-680-521-8.
- NOVAKOVA, Z. 2004. *Metodika na obuchenieto po matematika v nachalnite klasove*. Sofia: Veda Slovena – ZHG [In Bulgarian].
- POLYA, D., 1972. *Kak se reshava zadacha*. Sofia: Narodna prosveta [In Bulgarian].
- POLYA, D., 1970. *Matematikata i pravdopodobnite razsazhdeniya. Tom I. Induktsiya i analogiya v matematikata*. Sofia: Narodna prosveta [In Bulgarian].
- STERNBERG. R., 2012. *Cognitive psychology*. Sofia: Iztok-Zapad [In Bulgarian].
- VANEVA, V., 2003. *Kognitivni strategii pri obuchenieto po matematika v detskata gradina i nachalното uchilishte. Prouchvane i razrabotvane na inovatsii v tehnologiyata na realiziraneto na savremenni obrazovatelni strategii*. Ruse: UITS [In Bulgarian]. ISBN 954-712-195-2.
- VARBANOVA, M., 2003. *Metodika na obuchenieto po matematika v nachalnite klasove*. Plovdiv: Astarta [In Bulgarian]. ISBN 978-954-350-174-8.

SOLVING PROBLEMS – MODELS, STRATEGIES AND POTENTIAL IMPLEMENTATION IN MATHEMATICS EDUCATION OF 9 – 10-YEAR-OLD STUDENTS

Abstract. The recent reforms in the educational system in Bulgaria aimed to provide the development of transversal skills and competences established in the state educational standards and curricula in all academic disciplines at primary school. Mathematics is the discipline that develops abstract-logical connections and makes sense of the world in a symbolic way, while building up the ability of students to cope with tasks in unfamiliar situations, in other words – to solve problems. The present paper attempts to investigate the theory of solving problems in mathematics at primary school age searching for its potential implementation. Methods of the study include theoretical research in the field of problem solving, covering its levels, models and strategies for its application, as well as content analysis of educational documentation for the 3rd grade. As a result of the study, relevant models and strategies are presented that have the potential to develop students' problem-solving skills, revealing the need for increasing the number of tasks in the textbooks, which provide opportunities for problematization.

Keywords: problem solving; mathematics education; problem tasks

✉ **Mrs. Liliya Stoilova, PhD student**

✉ **Dr. Lyubka Aleksieva, Assoc. Prof.**

ORCID iD: 0000-0002-7877-5792

WoS Researcher ID: AAE-4709-2019

Faculty of Educational Studies and the Arts

Sofia University

Sofia, Bulgaria

E-mail: lsstoilova@uni-sofia.bg

E-mail: l.aleksieva@fppse.uni-sofia.bg