

КОМБИНАТОРНИ ЗАДАЧИ ВЪРХУ КВАДРАТНИ И ТРИЪГЪЛНИ МРЕЖИ СЪС „СТРУНИМА“ И GEOGEBRA

Младен Вълков¹⁾

¹⁾България

Резюме. В тази статия са представени дигитални средства, чрез които могат да се изучават математически задачи с квадратни и триъгълни мрежи, които могат да бъдат както числови, така и геометрични. Темата е разработена на базата на известни теми, като магически правоъгълници, състезателни комбинаторни задачи, както и математически отворени въпроси (напр. точна формула за максималния брой точки, които могат да се оцветят върху триъгълна мрежа без да се образува равностранен триъгълник). Използваните софтуери са „СтруниМа“ и Geogebra.

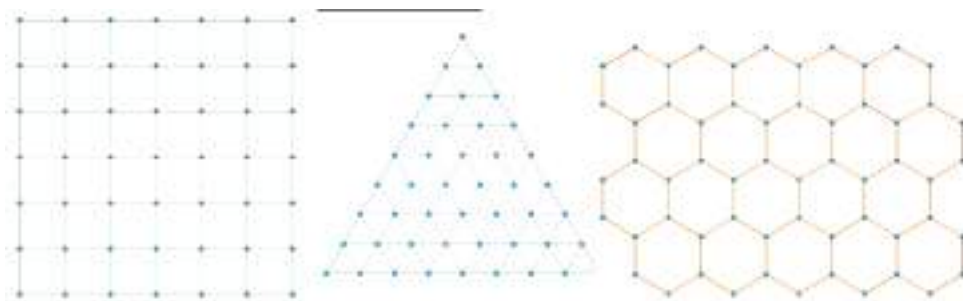
Ключови думи: квадратна мрежа; правоъгълна мрежа; „СтруниМа“; Geogebra

1. Въведение

Нека в равнината са дадени няколко безкрайни множества от равномерно разположени успоредни прави, при пресичането на които равнината се разбива на еднакви фигури. Полученото ще наричаме *безкрайна мрежа*. Мрежите могат да бъдат квадратни (две множества от прави, склучващи прав ъгъл), триъгълни, шестоъгълни и др. (фиг. 1). Върховете на получените фигури ще считаме за мрежа от точки. Квадратна мрежа $n \times m$ от точки ще наричаме върховете на единичните квадрати в правоъгълник $(n - 1) \times (m - 1)$ или за дадени $x, y, d \in \mathbb{R}$, точките с координати $(x + id, y + jd), i \in \{0, 1, \dots, m - 1\}, j \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$.

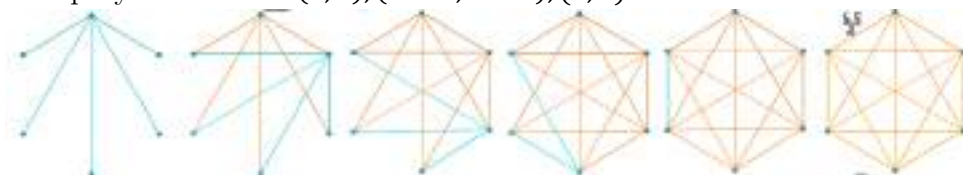
Поставянето на точки върху квадратна или триъгълна мрежа в равнината или пространството включва голям клас от геометрични и комбинаторни задачи както в състезателната математика, така и в стандартните часове по математика. Използването на геометрични средства за решаването на комбинаторни задачи спомага за изграждането на по-трайно разбиране за съответното знание (например намирането на сумата на числата от 1 до n чрез броене на отсечките между $n + 1$ точки по два начина (фиг. 2) или например намирането по

колко начина цяло число k може да се представи като сума на n неотрицателни цели числа (Pavlova 2019). За други от тях не са известни елементарни средства, с които могат да се решат – например точна формула за максималния брой избрани точки върху квадрат $n \times n$ от точки, така че никои три от тях не лежат на една права – *The No-Three-in-a-Line Problem* (Guy & Kelly 1968). Това прави тези задачи подходящи за състезание в дигитална среда, тъй като намирането на конструкции е нетривиално и трудността нараства с увеличаването на броя на точките по мрежата. Също така от ключово значение за такъв тип задачи е нуждата от пълноценно използване на софтуера.



Фигура 1. Част от квадратна, триъгълна и шестоъгълна мрежа

Такава задача се даде на състезание „Viva Математика с компютър“ (Chehlarova 2020, Kenderov & Chehlarova 2015; Kenderov et al. 2021) – какъв е най-малкият ненулев ъгъл, който може да се образува от три точки, избрани от квадратна мрежа $n \times n$ (фиг. 3) – търсеният ъгъл се образува от точки $(0, 0)$, $(n - 2, n - 1)$, $(1, 1)$.



Фигура 2. Намиране на сумата на числата от 1 до 5 по два начина, използвайки 6 точки, наредени по окръжност

Представената задача може да бъде разширена и до квадратна мрежа в пространството, което внася допълнителна трудност – „Върху

повърхността на куб със страна n била построена квадратна мрежа. Колко най-малко градуса може да бъде ъгълът между две равнини, образувани от точките на квадратната мрежа, като равнините не могат да са успоредни или да съвпадат“ (фиг. 3).



Фигура 3. Задача 5 от „Viva Математика с компютър“¹

2. Разместване на точки върху квадратни и триъгълни мрежи в „СтруниМа“

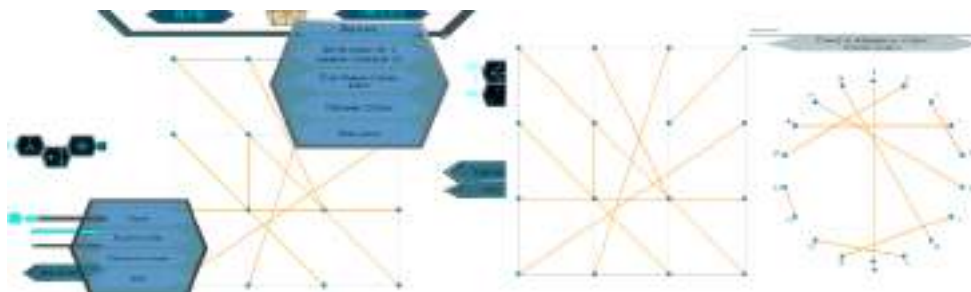
2.1. „СтруниМа“, и различни видове мрежи

„СтруниМа“ е обучителна система (Вълков 2022; Chehlarova & Valkov 2021) по математика, базирана на теми по комбинаторика и геометрия². Групирани са в *Симетрия върху дъска*, *Покрития на дъска*, *Графи и вериги* и *Възли и връзки*.

Повечето от подтемите имат разработена изследователска част (в която могат да се генерират различни интерактивни обекти с различни размери, напр. „Квадратна мрежа“), част за самообучение (преминаване на интерактивни стъпки, свързани с темата) и състезателна (упражнителна) част, в която има състезателни нива, разпределени в 4 групи от по 4 степени на трудност във всяка. Най-често трудността се определя от размера на използвания интерактивен обект. В процеса на съставянето на нива за подтемите могат да се съставят и комбинаторни задачи, подходящи за математически състезания. Някои примери за такива:

Няколко точки са разположени на равни разстояния на окръжност. Прекарани са няколко отсечки и всяка от отсечките е оцветена в един от два цвята. Всяка от тях пресича най-много една отсечка от същия цвят. Колко най-много са прекараните отсечки.³ Задачата е от темата *Еднопланарни възли*, която е по-добре известна, като *Еднопланарни графи*.

Колко най-много плочки Г-Тримино могат да се поставят върху квадратна дъска (размерите зависят от класа, на който е дадена), така че няма две плочки, които се допират по страна.⁴ Задачата е от темата за покритие на дъска с плочки.



Фигура 4. Разбиване на квадратна мрежа от точки 4×4 и точки, разположени по окръжност, на отсечки с различна дължина

В темата „Графи и вериги“ е изградена функционалност за генериране на различни видове мрежи (квадратна, триъгълна и шестоъгълна), като върху тях могат да се изследват различни видове комбинаторни и геометрични свойства. Например да се провери дали точките от квадратна мрежа могат да се разбият на двойки, така че отсечките, които свързват двойките, са с различна дължина (фиг. 4), като при успешно разделяне и проверка с бутон се показва съобщение за това. Някои от останалите са разгледани в раздел 2.2.

2.2. Подтемата „Разместване на точки“

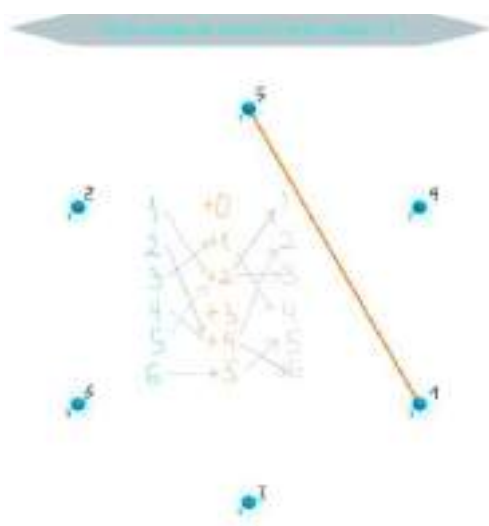
Този тип задачи са част от темата *Графи и вериги* и включват поставянето на няколко или всички от създадените точки (върхове) върху предварително генерирани позиции (поставки), които могат заедно на образуват различни конструкции – квадратна мрежа,

триъгълна мрежа, шестоъгълна мрежа, да бъдат разположени на равни разстояния по окръжност и др.

Поставените точки трябва да изпълняват дадено условие, като то може да бъде чисто геометрично, числово или и двете. Някои от разработените теми са на базата на известни състезателни комбинаторни задачи. За повечето от тях са направени обучителни стъпки и състезателни нива, разпределени в 4 степени на трудност. Примери за такива теми са:

– разместване на точки по такъв начин (върху поставки, създадени на първоначалните места на точките), че никои две от тях да не запазят първоначалното си разстояние. Темата е базирана на комбинаторна задача от полска национална олимпиада 1989 г., където точките са разположени на равни разстояния по окръжност. Темата беше разширена в контекста на „СтруниМа“ върху квадратни и триъгълни мрежи, като даже и за малки мрежи се оказва, че е трудно да се намери решение, което я прави подходяща за онлайн състезателна среда (фиг. 5).

– разместване на точки по такъв начин, че точките не са върхове на предварително зададен вид фигура. Някои от тях са *Без равностранен триъгълник*, *Без равнобедрен правоъгълен триъгълник*, *Без отсечки, успоредни на страните на мрежата*, *Без три точки на една права* и др. За всяка една от темите е направена функционалност, в която може да се поставят точки и да се проверява дали някои от точките образуват съответния вид фигура. Като повечето от тях са отворени проблеми –



Фигура 5. Разместване на точки – различни разстояния⁵

съществуват само оценки, но не и точен брой за произволна големина на мрежата (фиг. 6).



Фигура 6. Примери за решения на състезателни нива с максимален брой точки в мрежата без съответно равнобедрен триъгълник, отсечка, успоредна на страните, правоъгълен равнобедрен триъгълник⁶

– размястване на точки по такъв начин, че номерата на точките (от 1 до n) изпълняват конкретно условие върху квадратната/триъгълната мрежа.



Фигура 7. Примери за решения на състезателни нива с минимална съседна разлика, максимална съседна разлика и антипаскалов триъгълник⁷

Примери за това са размястване на точките върху мрежа $n \times m$, така че разликата между всеки две съседни от тях не надвишава k (MOM Shortlist, 1988), разликата между всеки две съседни от тях да е поне k , подреждане на точките в антипаскалов триъгълник (всяка

точка е равна на абсолютната разлика на двете точки под нея. Задача 3 от МОМ 2018) и др. Има разработена и учебителна част върху първата тема (фиг. 7), а втората е предложение на автора за национални състезания, като мрежата е с размери 4×2025 .

– разместване на точки върху квадратна мрежа по такъв начин, че сумите на номерата на точките в отделни части от мрежата да изпълнява дадено условие – например магически правоъгълници (сумите по редове да са равни и по стълбове да са равни или, сумите по върховете на единичен квадрат от мрежата да е минимална (Иван Салабашев 2024, 4. клас) (фиг. 8).



Фигура 8. Пример за магически правоъгълник 3×5 ⁸

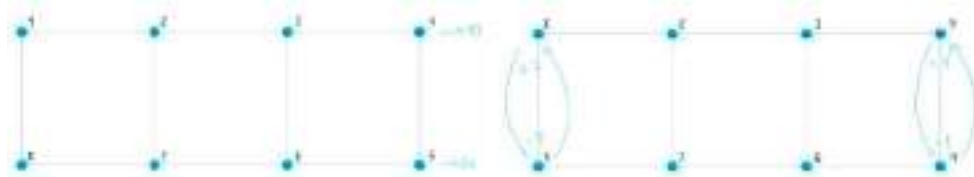
3. Учебен час с магически правоъгълници (разместване на точки върху квадратна мрежа)

С няколко класа от 5. клас в ППМГ „Нанчо Попович“ – Шумен, и Основно прогресивно училище 3 в София се проведоха часове, използващи системата „СтруниМа“, на тема *Магически правоъгълници*. Във всеки от тях заедно се премина предварително разработена учебителна част (чрез използването на компютърна презентация) и в края на часа се проведе състезателна част. Първата от задачите в учебителната част е поставянето на точки, номерирани с 1 до 8, върху квадратна мрежа 2×4 (фиг. 9).



Фигура 9. Стъпка от учебната част за мрежа 2×4

Тук учениците бързо се ориентираха към това да групират числата $(1; 8), (2; 7), (3; 6), (4; 5)$ за поставяне по колони. Споменато беше, че намирането на сумата на числата и разделянето ѝ на броя редове и броя стълбове е улесняваща подготвителна стъпка. Знаейки, че сумата по редове е $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) \div 2 = 18$ и че при размяната на двете числа в колона сумата в съответния ред се променя с разликата на разменените числа, се достигна до искания пример (фиг. 10).



Фигура 10. Пример за разместване по колони, така че сумите в двата реда да се изравнят

Втората задача е правоъгълна мрежа 2×5 , върху която трябва да се поставят точките $1, 2, \dots, 10$. Тук се отдели време върху различните начини за намирането на сумата на последователни числа. Задачата няма решение, тъй като сумата по редове трябва да е $55 \div 2 = 27,5$. По-голямата част от учениците започнаха да подреждат точките преди намирането на сумите по редове и стълбове (фиг. 11).

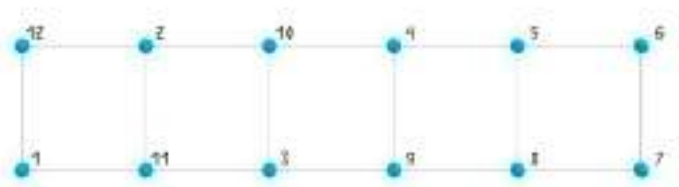
Третата задача от учебната част е мрежа 2×6 , върху която се разсъждава по подобен начин, както при 2×4 (фиг. 12).

Последната подробно разгледана задача от учебната тема е стандартен магически квадрат, при който са включени и диагоналите,

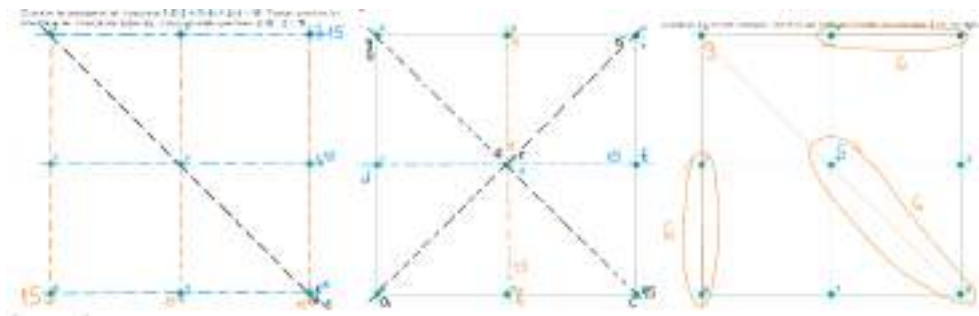
като подробно се разгледаха стъпки, които определят мястото на числото 5 и след това на 9 (фиг. 13).



Фигура 11. Решение на стъпка от обучителна част за мрежа 2×5



Фигура 12. Решение на стъпка от обучителна част за мрежа 2×6



Фигура 13. Стъпки от обучителна част за магически квадрат 3×3 – намиране на суми по редове/стълбове, обяснения за позициите на числата 5 и 9 в него

За домашна работа се остави намирането на пример за квадратна мрежа 3×5 , която изисква повече време (дори и след намирането на сумите по редове и стълбове) (фиг. 9). Известно е, че съществува магически правоъгълник, тогава и само тогава, когато броят на точките в ред и стълб по мрежата са поне 2 и са от една и съща четност – с

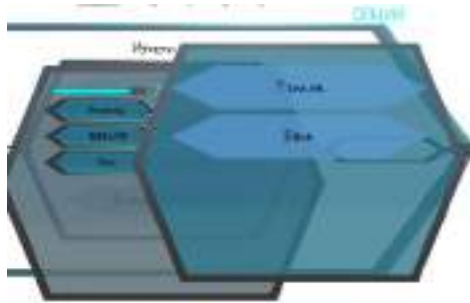
изключение на мрежа 2×2 . Задачата за $\times$ е заимствана от Фестивала на младите математици, 2016 г., 6. – 7. клас.

В оставащите 10 – 15 минути от часа се проведеха състезания, като всяка от групите (състоящи се от половината от учебен клас) беше разделена на два отбора от по 4 – 8 ученици. В някои от групите бяха определени ученици за пресмятане и такива за поставянето на самите точки. Нивата са 5 на брой – магически квадрат 3×3 , магически правоъгълници 2×4 , 2×5 , 2×6 , 2×8 . Резултатите в двубоите са представени в таблица 1.

Таблица 1. Състезателното ниво носи от 100 до 200 точки
(с някои изключения) при правилно решение⁹

Двубой	Първи отбор			Втори отбор	
1	605	150+172+144+169+(-30)		513	146+144+149+104+(-30)
2	310	175+0+0+0+135		143	173+0+0+(-30)+0
3	801	147+169+186+179+110		602	122+167+134+179+0

Може да се отбележи, че имаше повишено използване на метода за намиране на сумата на последователни числа (подреждане на числата в дадения ред и този наобратно един под друг и разделяне на получената сума на две), вместо например използването на сумата на числата от 1 до 9 (45) и добавяне към нея на останалите числа. При решаването на нивата се наблюдаваха ученици, които използваха факта, че сумата от сумите на числата в редовете/стълбовете дава сумата на числата в цялата мрежа, което е ключово за нивата, които нямат решение (например 2×5). В някои от отборите учениците имаха различна роля при решаването на съответното ниво: някои бяха отговорни за намирането на сумата на числата, други – да намерят сумите по редове и стълбове, и трети – да ги поставят. Като техническа особеност може да се отбележи нуждата от опция за по-контрастни светли цветове (докато при използването на устройство са по-подходящи тъмни цветове), тъй като по-малките надписи не се виждаха достатъчно добре.



Фигура 14. Тъмна и светла тема на менюта и текстове

При класовете в Трето основно прогресивно училище състезанието се проведе индивидуално само върху магически квадрат 3×3 , като трима от учениците успяха да се справят със задачата.

Благодарности

Авторът благодари на проф. Тони Чехларова за включването на няколко от задачите с квадратни мрежи с Geogebra на състезанието „Viva Математика с компютър“ и на Даринка Вълкова от ППМГ „Нанчо Попович“ и Елена Тартасюк от Основно прогресивно училище 3 за разрешаването на провеждането на часове със системата.

Авторът изказва благодарност на рецензентите на статията за полезните съвети, един от който е да се направи светла и тъмна тема на менютата в „СтруниМа“.

БЕЛЕЖКИ

1. Viva Математика 2303 – 9. клас. <https://course.cabinet.bg/index.php?contenttype=publicview&testidselectedbyuser=319>
2. Теми в СтруниМа. <https://strunima.free.bg/Applets.html>
3. <https://oeis.org/A369801>,
https://mgyambol.com/docs/Broshura_ZMS_2024.pdf
4. Viva Математика с компютър <https://cabinet.bg/index.php?status=pages&pageid=competitions>
5. Разместване на точки – различни разстояния.
<https://strunima.free.bg/GraphsPositioningDistances.html>

6. Разместване на точки – без познати фигури.
<https://strunima.free.bg/GraphsPositioningWithoutKnownFigures.html>
7. Разместване на точки – съседни разлики.
<https://strunima.free.bg/GraphsPositioningAdjacentDifferences.html>
8. Разместване, магически правоъгълници.
<https://strunima.free.bg/GraphsPositioningSubpartSums.html>
9. Състезателно ниво. <https://strunima.free.bg/CompLevel.html>

ЛИТЕРАТУРА

- Вълков, М. (2022). Синхронно дистанционно обучение в образователната игра „СтруниМа“. *Педагогически форум*, 1, DOI: 10.15547/PF.2022.005, ISSN:1314-7986.
- Кендеров, П., Чехларова, Т. & Гачев, Г. (2021). Онлайн състезание „VIVA Математика с компютър“. *Математика и информатика*, 64(1), 36 – 51.
- Павлова, Н. (2019). Идеи за геометрично моделиране при решаване на комбинаторни задачи, *Математика и информатика*, 2, 193 – 202.
- Чехларова, Т. (2020). Ресурси за самопроверка във Виртуалния училищен кабинет по математика. *Педагогика*, 92(2), 168 – 179.
- Чехларова, Т., Вълков, М. (2021). Централна симетрия върху дъска. *Педагогически форум*, 4, DOI: 10.15547/PF.2021.021.

REFERENCES

- Chehlarova, T. (2020). Resursi za samoproverka vav Virtualnia uchilishten kabinet po matematika. *Pedagogika*, 92(2), 168 – 179. (In Bulgarian).
- Chehlarova, T., Valkov, M. (2021). Game with Vertical Axis of Symmetry in a Rectangular Board. *Symmetry: Culture and Science*, 32(2), Symmetrion, 285 – 288.
- Chehlarova, T., Kenderov, P. (2015). Mathematics with a Computer – A Contest Enhancing the Digital and Mathematical Competences of The Students. *UNESCO International Workshop QED'14*, 50 – 62. Za Bukvite, O'Pismeneh, Sofia, Bulgaria.

- Chehlarova, T., Valkov, M. (2021). Tsentralna simetria varhu daska. *Pedagogicheski Forum*, 4, DOI: 10.15547/PF.2021.021. (In Bulgarian).
- Guy, R. K.; Kelly, P. A. (1968). The no-three-in-line problem. *Canadian Mathematical Bulletin*, 11(4), 527 – 531.
- Kenderov, P., Chehlarova, T. & Gachev, G. (2021), Online sastezanie „VIVA Matematika s kompyutar“. *Mathematics and Informatics*, 64(1), 36 – 51. (In Bulgarian).
- Pavlova, N. (2019). Idei za geometrichno modelirane pri reshavane na kombinatorni zadachi. *Mathematics and Informatics*, 2, 193 – 202. (In Bulgarian).
- Valkov, M. (2022). Sinhronno distantsionno obuchenie v obrazovatelната игра “StruniMa”. *Pedagogicheski forum*, 1, DOI: 10.15547/PF.2022.005, ISSN:1314-7986. (In Bulgarian).

COMBINATORIAL PROBLEMS USING SQUARE AND TRIANGULAR GRIDS WITH STRUNIMA AND GEOGEBRA

Abstract. In this article we look at digital systems as Geogebra and StruniMa, with which some mathematical problems with square and triangular sets can be investigated. They are developed on the base of famous mathematical constructions as magic rectangles, competition mathematical problems and open mathematical problems (for example exact formula for the no-three-in-line problem).

Keywords: square grid; triangular grid; Geogebra; StruniMa

✉ Mladen Valkov, PhD

E-mail: mladen.vulkov@math.bas.bg, strunimaofficial@gmail.com, mlado1992@abv.bg