

<https://doi.org/10.53656/ped2025-7.02>*Research Insights*
Изследователски проникновения

ПЕДАГОГИЧЕСКА ТЕХНОЛОГИЯ ЗА ОВЛАДЯВАНЕ НА ДЕЙСТВИЕТО ДЕЛЕНИЕ НА ЕСТЕСТВЕНИ ЧИСЛА С ДВУЦИФРЕНО ЧИСЛО

Проф. д-р Владимир Ангелова*Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“*

Резюме. Осъществените през последните няколко години реформи в българското образование засягат и обучението по математика в началния етап на образование. Настъпилите промени са ясно различни в учебните програми за задължителната подготовка. Актуалната към момента учебна програма по математика за четвърти клас на средното училище определя седем глобални теми, в които е обособено предвиденото за усвояване учебно съдържание. Настоящото изследване се фокусира върху създаване на иновативна методика за изучаване на аритметичното действие деление на естествени числа с двуцифрено число – една от най-сложните теми в обучението по математика. Целта на публикацията е да се представи разработеният и експериментиран авторски технологичен вариант за изучаване на алгоритмите за извършване на действието деление на естествено число с двуцифрено число в определена методическа система. Компонентите на разработения вариант за обучение съдържат дигитални образователни ресурси под формата на видеофилми. През учебната 2023/2024 година се проведе експериментално изследване със 192 четвъртокласници, разпределени в две групи – експериментална и контролна, всяка по 96 ученици. В обучението на експерименталната група се интегрира авторската технология за обучение. Основен критерий за измерване на ефективността ѝ е степента на усвояване на компетентности от учениците за деление на естествено число с двуцифрено число и приложението му при отчитане на десет показателя. Представен е количествен и качествен анализ на резултатите от експерименталното изследване. Получените резултати категорично доказват ефективността на създадената авторска педагогическа технология за овладяване на действието деление на естествено число с двуцифрено число. След интегрирането на настоящата технология в обучението учениците придобиват компетентности за използването на алгоритмите за извършване на действието деление на естествени числа с двуцифрено число при: намиране на число, като се използва смисълът на

релацията „... *пъти по-малко*“; сравняване на стойности на числови изрази; намиране стойността на съставен числов израз; намиране на неизвестно число в равенство – неизвестен множител, неизвестен делител; моделиране с числови изрази на текстова задача; решаване на геометрична задача.

Ключови думи: начално училище; математическо образование; деление на естествени числа с двуцифрено число; дигитални ресурси

1. Увод

Обучението по математика в началния етап на образование е насочено към придобиване на компетентности, свързани с овладяване на базисни аритметични и геометрични знания, умения и отношения.

В Учебната програма по математика за четвърти клас на средното училище (задължителна подготовка)¹ се конкретизира учебно съдържание от четири области на математическата компетентност: „Числа“, „Геометрични фигури и тела“, „Измерване“ и „Моделиране“. Настоящата разработка е компонент от област на компетентност „Числа“, но не може да бъде изолирана от другите три области. В нея се представя авторовата концепция, свързана с изграждане на структурата, съдържанието и методиката на изучаване на аритметичното действие деление на естествено число с двуцифрено число и неговото приложение.

2. Метод

Целта на публикацията е да се представи разработеният и експериментиран авторски технологичен вариант за изучаване на алгоритмите за извършване на действието деление на естествено число с двуцифрено число в определена методическа система и прилагането на алгоритмите за решаване на разнообразни математически и практически задачи. Компонентите на разработения вариант за обучение съдържат дигитални образователни ресурси под формата на видеофилми. Опитът при изследването на проблемите на началното образование свидетелства, че внедряването на подобен тип ресурси ще подпомогне учениците да „подобрят отношението си към учебния труд“ и да „бъдат много по-мотивирани да заемат активна роля в учебните часове“ (Nikolova 2022, p. 33).

Като резултат от обучението по темата *Деление на естествени числа с двуцифрено число* се очаква учениците на придобият следните компетентности:

- извършва аритметичното действие деление на естествено число с двуцифрено число;
- решава задачи с практикоприложен характер¹.

2.1. Методическа система за изучаване на действието деление на естествени числа с двуцифрено число

Делението на естествени числа с двуцифрено число се изяснява чрез алгоритмите за писмено смятане и вариантите за устно смятане.

Изучаването на алгоритмите за деление на естествени числа с двуцифрено число се реализира в следната последователност:

– Деление с числата 10, 20, 30, ..., 90.

Например: $1230 : 10 = 123$; $2460 : 20 = 123$.

За онагледяване на случаите от деление с посочените числа се използват видеофилми².

– Деление на числата до 100 с двуцифрено число.

Например: $26 : 13 = 2$; $30 : 13 = 2$ (ост. 4).

За по-голяма нагледност при запознаването със случаите от деление на числата до 100 с двуцифрено число се използват видеофилми³. Чрез тези филми се извеждат алгоритмите от посочения вид както на делението без остатък, така и на делението с остатък.

– Деление на числата до 1000 с двуцифрено число, когато частното е едноцифрено число.

Например: $312 : 52 = 6$; $315 : 52 = 6$ (ост. 3).

За визуализирането на алгоритмите за извършване на действието деление на числа от посочените видове се използват разработените видеофилми⁴. Чрез тях се илюстрира както случаят от деление без остатък, така и случаят от деление с остатък, а също и техните особености.

– Деление на числата до 1000 с двуцифрено число, когато частното е двуцифрено число.

Например: $364 : 14 = 26$; $532 : 14 = 38$.

При запознаване с алгоритмите за деление на числата до 1000 с двуцифрено число се използват и видеофилми⁵. Филмите отразяват особеностите на разглежданите случаи от деление.

– Деление на многоцифрено с двуцифрено число.

Например: $1584 : 12 = 132$; $3528 : 12 = 294$.

При изучаване на новите случаи от деление на многоцифрено с двуцифрено число се използват видеофилмите⁶. Чрез тях се открояват особеностите на изучаваните алгоритми.

– Деление на многоцифрено с двуцифрено число, когато една от редните единици на частното е нула.

Например: $1635 : 15 = 109$.

При запознаването от деление на числа от този вид се използват видеофилмите⁷, разработени на базата на разширения и краткия алгоритъм. Филмите са насочени към изясняване на особеностите на алгоритмите.

– Деление на многоцифрено с двуцифрено число, когато в частното се получават нули в несъседни редове.

Например: $148\ 428 : 14 = 10\ 602$.

При изясняване на алгоритъма на деление на числа от посочения вид се използва видеофилмът⁸. Чрез него се илюстрират особеностите на случая – получаването в частното на две нули в несъседни редове.

– Деление на многоцифрено с двуцифрено число, когато в частното се получават нули в съседни редове.

Например: $32\ 160 : 32 = 1005$.

Изясняването на този алгоритъм се улеснява от прилагането на разработения видеофилм⁹. Чрез филма се визуализират особеностите му – получаването в частното на нули в два съседни реда.

– Деление на многоцифрено с двуцифрено число, когато двете цифри от най-високия ред на делимото образуват число, по-малко от делителя.

Например: $1328 : 16 = 83$.

При запознаване с алгоритъма от разглеждания случай се използва видеофилм¹⁰. Чрез филма се илюстрират особеностите му.

– Деление на многоцифрено с двуцифрено число, при което се комбинират предходни случаи.

Например: $211\ 722 : 42 = 5041$; $126\ 168 : 42 = 3004$.

При изучаване на тези алгоритми се използват разработени видеофилми¹¹, чрез които се изясняват специфичните им характеристики.

Изборът на представената по-горе авторова методическа система на изучаване на случаите от деление на естествени числа с двуцифрени числа е логически оправдана, тъй като се извеждат всички алгоритми за смятане, при това те са подредени по степен на сложност.

Анимациите на отбелязаните видеофилми са осъществени по сценарии, разработени от автора на настоящата публикация.

2.2. Методика на изучаване на действието деление на естествени числа с двуцифрено число

При изучаването на всеки от изброените случаи в т. 2.1. се спазват следните основни етапи:

– актуализиране на необходимите знания и умения, които са основа за изграждане на алгоритмите за смятане;

– технология на изграждане на алгоритмите за извършване на действието деление на естествено число с двуцифрено число;

– затвърдяване, усъвършенстване и прилагане на знанията и уменията за изучените алгоритми при решаване на математически и практически задачи.

За да се открие практическата необходимост от овладяване на алгоритмите за намиране на частните на естествени числа с двуцифрени числа, е уместно като изходна задача да се предложи практическа задача, решението на която изисква изясняване на новия алгоритъм. За всички изучавани случаи са създадени видеофилми, които визуализират конкретните алгоритми.

След това следват задачи за затвърдяване и приложение на разглеждания алгоритъм.

При обучението на учениците за овладяване на алгоритмите за извършване на действието деление на естествени числа с двуцифрено число наблягаме на следните основни правила.

- Делението започва от най-високия ред на делимото. Тъй като делителят е двуцифрено число, непълното делимо има най-малко две цифри.

- Остатъкът при делението на редните единици винаги е по-малък от делителя.

- Редните единици при „свалянето“ се записват точно под съответните редни единици на делимото.

- За всяка „свалена“ цифра от делимото трябва да се запише цифра в частното от съответния ред след извършване на делението.

- За да се провери дали вярно е извършено делението, се прави проверка с умножение.

Затвърдяването и усъвършенстването на знанията и уменията за действието деление на естествени числа с двуцифрено число се постига чрез решаване на разнообразни задачи в определена система. Ще бъдат отразени видовете упражнения, като трябва да се отбележи, че конкретните примери са съобразени с изучените случаи в даден момент от обучението:

- пресмятане на частно на две числа от посочените видове чрез прилагане на алгоритмите за писмено смятане или вариантите за устно смятане;

- пресмятане на съставни числови изрази;

- сравняване на стойности на числови изрази;

- съставяне на числов израз по математически текст и намиране на стойността му при спазване на реда на действията;

- намиране на неизвестно число в равенство чрез деление на естествено число с двуцифрено число (неизвестен множител; неизвестен делител);

- съставяне и решаване на равенства с неизвестен компонент по математически текст;

- откриване на скрити цифри при деление на естествено число с двуцифрено число;

- съставяне и решаване на текстови задачи;

- решаване на геометрични задачи.

Цялостната разработка на учебното съдържание създава реални предпоставки за съзнателното усвояване от учениците на алгоритмите за извършване на пресмятанията и за прилагането им при решаване на практически задачи. Системата от алгоритми за деление на естествени числа с двуцифрено число е интегрирана в учебник по математика за четвърти клас (Angelova 2019, р. 108 – 132), но в настоящата разработка е допълнена със случая за деление на многоцифрено с двуцифрено число, когато в частното се получават нули в несъседни редове.

2.3. Критерий и показатели за отчитане на резултатите от проведеното експериментално изследване

През учебната 2023/2024 година се проведе експериментално изследване-то с цел установяване ефективността на създадената и представена по-горе технология за изучаване на действие деление на естествени числа с двуцифрено число и неговото приложение за решаване на разнообразни задачи. В него се включват 192 ученици от две училища в Пловдив. Във всяко от тези училища в четвърти клас се обучават по четири паралелки с общо 96 ученици. За целите на експеримента изградената технология е приложена в обучението по математика на учениците от четвърти клас от едно от училищата. Така е оформена експерименталната група (ЕГ). Учениците от другото училище оформят контролната група (КГ). И двете групи се състоят от по 96 ученици от четвърти клас.

Методическата система на изучаване на алгоритмите по темата за деление на многоцифрено с двуцифрено число за учениците от ЕГ е представена в настоящата разработка, като при запознаване с новото знание бяха използвани и образователни видеофилми. Методическата система, по която се провежда обучението на учениците от КГ, включва само някои от представените алгоритми. Методите на обучение, които се използват и при двете групи, са: беседа, мозъчна атака, дискусия, групов работа. Като допълнение при ЕГ за запознаване с новото знание се използва и дигитално учебно съдържание, а за обобщение – изработването на мисловна карта, която синтезира изученото по темата за деление на многоцифрено с двуцифрено число.

По време на експеримента за учениците от ЕГ са предвидени 14 урочни единици, а за учениците от КГ обучението по темата за деление на многоцифрено с двуцифрено число – 12 урочни единици.

Преди започването на експерименталното изследване е проведена входяща диагностика с всички 192 четвъртокласници с цел определяне нивото на техните знания и умения по математика. За реализирането на тази цел е използвана Самостоятелна работа 1 на тема „Умножение и деление на многоцифрено с едноцифрено число“ (Angelova 2022, р. 36).

Резултатите на учениците от двете училища, участващи в експеримента, се оказват приблизително равни, като по този начин стана възможно осъществяването на следващия етап от експеримента.

Оценката на ефективността на приложената методика на изучаване на действието деление на естествени числа с двуцифрено число е осъществена по следния **критерий**: *Степен на усвояване на компетентности за деление на естествено число с двуцифрено число.*

Оценката на получените резултати се осъществява по следните показатели.

Първи показател. Извършване на действие деление на естествени числа с 10, 20, 30, ..., 90.

Втори показател. Извършване на действие деление на числата до 100 с двуцифрено число.

Трети показател. Извършване на действие деление на числата до 1000 с двуцифрено число.

Четвърти показател. Извършване на действие деление на многоцифрено с двуцифрено число.

Пети показател. Намиране на число, като се използва смисълът на релацията „... пъти по-малко“.

Шести показател. Сравняване на стойности на числови изрази.

Седми показател. Намиране стойността на съставен числов израз.

Осми показател. Намиране на неизвестно число в равенство – неизвестен множител, неизвестен делител.

Девети показател. Моделиране с числови изрази на текстова задача. Съдържателно интерпретиране на получените резултати.

Десети показател. Решаване на геометрична задача.

За установяване нивото на математическите компетентности на учениците от четвърти клас по определените десет показателя се проведе Самостоятелна работа 2 както с контролната, така и с експерименталната група. Диагностиката се осъществи на тема „Деление на естествено число с двуцифрено число“ (Angelova 2022, 48).

3. Резултати

Резултатите от изходящата диагностика по дефинираните десет показателя са представени в таблица 1 за двете изследвани групи.

Таблица 1. Резултати от експерименталното изследване по показатели

Показатели	Експерименталната група (ЕГ)		Контролната група (КГ)	
	Брой	%	Брой	%
	94	98,95	92	95,83
	94	98,95	90	93,75
	92	95,83	86	90,63
	90	93,75	84	87,50
	90	93,75	82	85,42
	86	90,63	79	82,29
	84	87,50	76	79,17

	82	85,42	72	75,00
	80	83,33	70	72,92
	80	83,33	69	71,88

Резултатите от експерименталното изследване категорично доказват ефективността на създадената авторска технология за овладяване на действието деление на естествено число с двуцифрено число в определена методическа система и прилагането на алгоритмите за решаване на разнообразни математически и практически задачи. Дигиталното учебно съдържание допринесе за пълноценното усвояване на отделните алгоритми.

След интегрирането на настоящата технология учениците придобиват компетентности за използването на алгоритмите за извършване на действието деление на естествени числа с двуцифрено число за: намиране на число, като се използва смисълът на релацията „... пъти по-малко“; сравняване на стойности на числови изрази; намиране стойността на съставен числов израз; намиране на неизвестно число в равенство – неизвестен множител, неизвестен делител; решаване на текстови и геометрични задачи.

4. Заключение

Предложената система за обучение доказано съдейства за разгръщане на компетентности у учениците за използване на алгоритмите за извършване на действието деление на естествено число с двуцифрено число. Анализирането на резултатите на учениците, обучавани по експерименталната методика, показва, че те имат по-високо ниво на компетентност от учениците от контролната група по посочените показатели.

Резултатите от този експеримент по всичките десет показателя са в полза на потребителите на изградената технология за изучаване на действието деление на естествено число с двуцифрено число.

В заключение може да се направи изводът, че предложеният методически вариант за обучение, реализиран в обучението по математика на ученици от четвърти клас на средното училище, е ефективен и би могъл да се използва от всеки учител в педагогическата му практика.

Благодарности и финансиране

Това изследване е финансирано от Европейския съюз – NextGenerationEU, чрез Националния план за възстановяване и устойчивост на Република България, проект № BG-RRP-2.004-0001-C01.

БЕЛЕЖКИ

1. МОН (2017). Учебна програма по математика за четвърти клас (общообразователна подготовка). София, 8 с. Изтеглено от: https://www.mon.bg/nfs/2018/01/up8_matematika_zp_4kl.pdf
2. Деление с числата 10, 20, 30, ..., 90. Изтеглено от: <https://youtu.be/RJWMeNnyL4>
3. Деление на числата до 100 с двуцифрено число. Изтеглено от: <https://youtu.be/GTXdSkeKwwY>
4. Деление на числата до 1000 с двуцифрено число, когато частното е едноцифрено число. Изтеглено от: <https://youtu.be/y758YLLnLxM>
5. Деление на числата до 1000 с двуцифрено число, когато частното е двуцифрено число. Изтеглено от: <https://youtu.be/x119QUaMoN4> и <https://youtu.be/kOZwfb8IwYg>
6. Деление на многоцифрено с двуцифрено число. Изтеглено от: <https://youtu.be/vT9hj64bck0> и <https://youtu.be/7WO2TUyh-dE>
7. Деление на многоцифрено с двуцифрено число, когато една от редните единици на частното е нула. Изтеглено от: <https://youtu.be/o7gF6a7-0xw> и <https://youtu.be/I57GpBYnv4A>
8. Деление на многоцифрено с двуцифрено число, когато в частното се получават нули в несъседни редове. Изтеглено от: <https://youtu.be/KPPjX0z5DQI>
9. Деление на многоцифрено с двуцифрено число, когато в частното се получават нули в съседни редове. Изтеглено от: https://youtu.be/VOdW77oq_gY
10. Деление на многоцифрено с двуцифрено число, когато двете цифри от най-високия ред на делимото образуват число, по-малко от делителя. Изтеглено от: <https://youtu.be/019lpFzYeIs>
11. Деление на многоцифрено с двуцифрено число, при което се комбинират предходни случаи. Изтеглено от: <https://youtu.be/C4SpvKZDI-s> и https://youtu.be/gNI_G4e_-kU

ЛИТЕРАТУРА

- АНГЕЛОВА, В.; КОЛЕВА, Ж., 2019. *Математика за 4. клас*. София. Просвета плюс. ISBN 978-619-222-276-5.
- АНГЕЛОВА, В., 2022. *Самостоятелни работи по математика за 4. клас*. София. Просвета АД. ISBN 978-619-01-4212-8.
- НИКОЛОВА, А., 2022. *Овладяване на таблично умножение и деление чрез използване на уеббазирани инструменти*. Пловдив: Паисий Хилендарски. ISBN 978-619-202-806-0.

Acknowledgments and funding

This study is financed by the European Union-NextGenerationEU, through the National Recovery and Resilience Plan of the Republic of Bulgaria, project № BG-RRP-2.004-0001-C01.

REFERENCES

- ANGELOVA, V.; KOLEVA, Zh. 2019. *Matematika za 4. klas*. Sofia: Prosveta plyus. 978-619-222-276-5.
- ANGELOVA, V., 2022. *Samostoyatelni raboti po matematika za 4. klas*. Sofia: Prosveta AD. 978-619-01-4212-8.
- NIKILOVA, A., 2022. *Ovladyavane na tablichno umnozhenie i delenie chrez izpolzване na uebbazirani instrumenti*. Plovdiv: Paisiy Hilendar-ski. ISBN 978-619-202-806-0.

PEDAGOGICAL TECHNOLOGY FOR MASTERING THE DIVISION OF NATURAL NUMBERS BY A TWO-DIGIT NUMBER

Abstract. The educational reforms implemented in Bulgarian education over the past few years have affected mathematics education in the early stages of schooling. The changes that have taken place are clearly distinguishable in the curricula for mandatory education. The current mathematics curriculum for the fourth grade in secondary school defines seven global topics, within which the planned educational content is structured. This study focuses on developing an innovative methodology for teaching the arithmetic operation of dividing natural numbers by a two-digit number – one of the most complex topics in mathematics education. The aim of this publication is to present the developed and experimentally tested original technological approach for teaching the algorithms for performing the division of a natural number by a two-digit number within a specific methodological system. The components of the developed instructional approach include digital educational resources in the form of video films. During the 2023/2024 academic year, an experimental study was conducted with 192 fourth-grade students, divided into two groups – an experimental group and a control group, each consisting of 96 students. The author's instructional technology was integrated into the teaching of the experimental group. The main criterion for measuring its effectiveness was the degree to which students acquired competencies in dividing a natural number by a two-digit number, assessed based on ten indicators. A quantitative and qualitative analysis of the results from the experimental study is presented. The obtained results conclusively prove the effectiveness of the developed pedagogical technology for mastering the division of a natural number by a two-digit number. After integrating this technology into the learning process, students acquire competencies in using the algorithms for

performing this operation in various contexts, including: finding a number using the concept of "... times smaller"; comparing the values of numerical expressions; determining the value of a composite numerical expression; finding an unknown number in an equation—unknown factor, unknown divisor; modelling a word problem with numerical expressions; solving a geometric problem.

Keywords: primary school; math education; division of natural numbers by a two-digit number; digital resources

✉ **Prof. Dr. Vladimira Angelova**

ORCID iD: 0000-0002-5559-5369

Plovdiv University "Paisii Hilendarski"

Plovdiv, Bulgaria

E-mail: vangelova@uni-plovdiv.bg