Educational Matters
Научно-методически статии

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА КАК ОБЛАСТЬ ПОДГОТОВКИ УЧАЩИХСЯ К ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ В ФОРМАТЕ “SCIENCE 2.0”

[1)]Лариса Удовенко, [2)]Мария Шабанова, [3)]Магомедхан Ниматулиев
1) Московский педагогический государственный университет – Москва (Россия)
2) Северный (Арктический) федеральный университет – Архангельск (Россия)
3) Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации – Москва (Россия)

Аннотация. Данная статья представляет экспериментальную математику как проблемную область и особую методологию, которая открывает возможности для организации исследовательской деятельности учащихся с различным уровнем базовой математической подготовки в целях формирования у них опыта деятельности в форме, которая получила название Science 2.0. Основными чертами Science 2.0, с которыми имеют возможность познакомиться учащиеся, являются: проектный характер работ, привлечение к решению научных задач любителей на условиях краудсорсинга, сетевой характер взаимодействия, широкое использование возможностей компьютерной поддержки исследовательской деятельности.

Keywords: experimental mathematics; network research project; crowdsourcing; dynamical mathematics software; inquiry-based education

1. Появление Интернет и развитие технологий Web 2.0 настолько существенно изменило лицо науки, что специалисты в области методологии активно стали обсуждать вопрос о становлении новой научной парадигмы или, по крайней мере, новой формы научной деятельности, которая обусловлена переходом к информационному обществу. Она получила название Science 2.0 (Shneiderman, 2008), (Waldrop, 2008), (Miloslavov, 2015). За традиционной формой научной деятельности закрепился термин Science 1.0 соответственно.

Отличительными чертами Science 2.0, по мнению экспертов, являются: преимущественно проектная форма организации исследовательской деятельности, определенная системой грантового финансирования; усиление роли компьютерной техники в получении научных результатов, расширение функций ее использования; открытый режим исследования в условиях сетевого взаимодействия членов временных творческих коллективов: обсуждение проблем на профессиональных форумах, публикации результатов в электронных изданиях, на сайтах, предоставление свободного доступа к информации о ходе исследования; привлечение любителей к решению некоторых исследовательских задач на условиях краудсорсинга (от англ. *crowd* – толпа, *sourcing* – использование ресурсов).

Именно последняя особенность Science 2.0 открывает уникальные возможности для школьников. Участие в научном краудсорсинг-проекте позволяет учащимся получить представления о том, решением каких проблем занимаются сегодня ученые, стать равноправным членом настоящего научного коллектива, приобрести опыт исследовательской деятельности „из первых рук".

Опыт привлечения школьников к краудсорсинг-проектам в естественнонаучной сфере (области экологии и биологии) описан А. Петровой (Petrova, 2016). Вопрос состоит в оценке возможностей организации подобного рода проектов с участием школьников в сфере математики.

Данная статья имеет целью доказать существование такой возможности, показать, что наиболее предпочтительной научной областью для этого является новый раздел, который получил название *экспериментальная математика*.

2. Экспериментальная математика и ее образовательное значение. Впервые термин „экспериментальная математика" был произнесён в России на открытии Уральского отделения Академии Наук СССР Н. Красовским (N. Krasovskiy, 2003). Под ним он понимал „… ветвь в науке и практике, в которой сливаются математика и информатика, т.е. органически объединяются математические конструкции как таковые с автоматизацией вычислений, пространственных построений и рассуждений".

Восшествие экспериментальной математики как научной области началось с получения на основе алгоритма Геламана Фергюсона в 1996 году формулы Бэйли-Боруэйна-Плаффа для расчета любого знака числа π без предварительных вычислений предыдущих знаков. В 1998 году научный мир потрясло появление „*компьютерного доказательства*" Гипотезы о четырех красках, выдвинутой Ф. Гутни еще в 1852 г., а также заявление Т. Халеса об аналогичном доказательстве Гипотезы Кеплера об оптимальной плотности упаковки шаров, сформулированной в 1611 г.

Под влиянием этих результатов постепенно меняется отношение математиков к компьютерным экспериментам. Сегодня в научных публикациях все чаще встречаются слова „проверено с использованием пакета Mathematica" или „установлено с применением пакета Maple".

Накоплению результатов, полученных на основе компьютерных экспериментов, немало способствуют и специализированные журналы. Самым известным из них является электронный журнал „Experimental mathematics", учрежденный в Нью Йорке в 1992 году. Его редакторы считают, что ранний обмен идеями весьма полезен: „Экспериментальная математика основана на убеждении, что теория и эксперимент влияют друг на друга, и что математическое сообщество лишь выиграет от более полного их взаимодействия. Ранний обмен идеями увеличивает вероятность того, что они приведут к появлению новых теорем: интересно, что гипотеза часто формулируется исследователем, которому не хватает техники для ее формализованного доказательства, в то время как те, кто хорошо владеет техникой доказательств, будут искать в другом месте. Даже если человек не имеет представлений о способе доказательства, обсуждение эвристического процесса может помочь ему, или, по крайней мере, вызовет интерес других исследователей. Значимым является не только само открытие, но и дорога, ведущая к нему".

Успехи экспериментальной математики определяются не только привлечением компьютерных средств, но и спецификой ее методологии. Она достаточно полно описана основоположниками данного научного направления (Borwein & Bailey, 2004).

Главные положения методологии экспериментальной математики, делающей ее областью, доступной для учащихся, таковы:

– экспериментальные методы могут применяться в математическом исследовании на всех его этапах: от постановки исследовательского вопроса до представления результатов исследования;

– компьютерные эксперименты компенсируют недостаток теоретических оснований для дедуктивного вывода, времени для полного перебора вариантов, расширяют возможности воображения и мысленного экспериментирования;

– допускается представление результатов различных уровней: исследовательской модели; гипотезы, подтвержденной компьютерными экспериментами, нового эксперимента, подтверждающего выдвинутую ранее гипотезу, доказательство утверждения.

Распространение методологии экспериментальной математики возродило интерес ученых к тем областям, которые, казалось, были давно закрыты для новых результатов. В большой степени это относится к элементарной геометрии. Ярким примером недавнего открытия в этой области, сделанного благодаря компьютеру, является окружность Ламуна й окружность, содержащая все центры окружностей, описанных около треугольников, на которые разбивается произвольный треугольник тремя своими медианами (рис. 1). Задача была предложена для решения F. Lamoen (F. Lamoen, 2000). Первое ее решение было предложено в (Kin Y. Li, 2001).

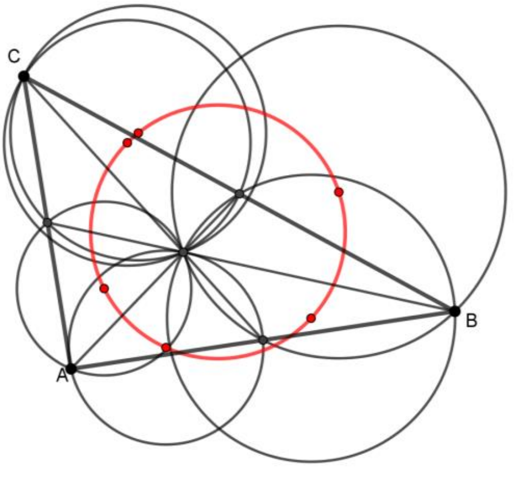

Рисунок 1. Окружность Ламуна

Стремительность роста научных результатов сделанных в области элементарной геометрии благодаря компьютеру легко наблюдать, например, следя за электронной „Энциклопедией центров треугольников" Кларка Кимберлинга. Следует заметить, что центр окружностей Ламуна значится в ней под номером 1153. Сейчас в этой энциклопедии содержится уже более 30000 научных результатов. Важен для нас и тот факт, что среди этих результатов есть результаты не только ученых – математиков, но и школьников. Обязательным требованием энциклопедии является сопровождение утверждения компьютерной визуализацией, созданной средствами Geometer's Sketchpad или GeoGebra.

Эти программы являются представителями целого класса программных продуктов научного и образовательного назначения, которые получили обобщенное название – системы динамической математики. Русифицированная версия Geometer's Sketchpad – „Живая математика". В России учителям и школьникам также хорошо известны и широко используются такие программные продукты этого класса как „1С: Математический конструктор", Cabri, GeoGebra, Geometry Expression.

Ключевой особенностью всех этих программ является возможность создания динамических визуализаций – моделей математических объектов и экспериментирования с ними. Они являются весьма эффективным компьютерным средством не только юных, но и взрослых исследователей.

граммирования, достаточно лишь базовых математических знаний и общепользовательской IT – компетентности.

3. Особенности постановки задач экспериментальной математики для школьников.

Привлечение компьютерных средств к решению исследовательских задач естественным образом поделило все их множество на три класса: задачи, для решения которых не нужны компьютеры; задачи, решение которых существенным образом облегчится за счет использования компьютерных средств; задачи, которые на данном уровне математических знаний могут быть решены только компьютерно.

Последние два класса задач мы в дальнейшем будем называть задачами экспериментальной математики. Для их решения средствами систем динамической математики создается динамический чертеж – модель задачной ситуации, допускающая изменения значений входных параметров, без перестройки модели, чертеж дополняется средствами сбора экспериментальных данных (электронные таблицы) или средствами наблюдения за изменениями (визуализируются траектории движения элементов, выводятся на экран текущие значения параметров, создаются дополнительные динамические записи). Компьютерные эксперименты проводятся с различными целями: выдвижения гипотез о свойствах объекта исследования, проверки предположений, проверки универсальности логических рассуждений или правильности аналитических выкладок, оценки возможности обобщения результата или развития идеи.

Представим несколько типов задач, которые можно использовать для организации исследовательской деятельности школьников в области экспериментальной математики.

Пример 1. ***Задачи на нахождение геометрических мест точек как траекторий движения.*** В 2015 году задача этого типа была положена нами в основу исследовательской игры „Геометрический Scrabble в облаках”, организованной для учащихся из трех стран (Болгарии, Казахстана и России). Мы не будем здесь останавливаться на сути игры. Она описана в (Shabanova & al., 2017). Приведем условие стартовой задачи, которая была предложена учащимся (см. рисунок 2).

Задача (P_0). Отрезок AB разделен произвольной точкой C на две части (рис. 2). На каждой из этих частей, как на стороне построены правильные треугольники AMC и CNB, лежащие в одной полуплоскости. Выясните какую траекторию при перемещении точки C по отрезку AB опишет точка T – точка пересечения биссектрисы угла MCN с отрезком MN.

Данная задача оказалась очень плодотворной, так как в ходе игры на ее основе учащимся удалось составить много новых задач.

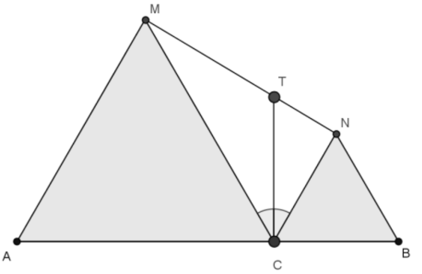

Рисунок 2. Стартовая исследовательская задача сетевого проекта „Геометрический Scrabble в облаках“

Для получения новых модификаций задачи P_0 учащиеся заменяли способ задания точки T (замены биссектрисы на медиану, высоту, общую касательную окружностей, описанных около треугольников и т.п.); рассматривали вместо равносторонних треугольников равнобедренные с заданным углом при основании и равнобочные трапеции. В ходе исследования ученики действовали по следующему плану: составляли динамическую модель геометрической конфигурации, которая описана условием задачи, получали кривую как след движения точки T методом компьютерного эксперимента, выдвигали гипотезы о виде кривой, а затем проводили аналитические выкладки для получения ее уравнения, заканчивали компьютерной проверкой соответствия кривой, заданной уравнением, траектории движения точки.

В результате были составлены уравнения кривых *2*, *4* и *7* порядков. Результаты исследования оказались достойными публикации в научном издании Болгарской академии наук (Gorskaya, Kopteva, Mikurov & al., 2016).

Пример 2. ***Задачи на выявление динамически устойчивых свойств геометрической конфигурации.*** Одной из наиболее привлекательных для учащихся областей математического творчества являются Сангаку – древние японские таблички, на которых рисунком и текстом представлены математические факты или поставлены задачи.

В настоящее время сохранилось около 900 Сангаку. Наиболее полная их коллекция, 820 фотографий – размещена на сайте Хироши Котера. Интерес математиков к Сангаку связан с тем, что математическое содержание далеко не всех табличек из данной коллекции расшифровано. Деятельность математической реконструкции задач Сангаку становиться доступной и учащимся, если к ней привлекать методы и средства экспериментальной математики. На сайте GeoGebra.org учащимися кружка „Экспериментальная математика“ открыта коллекция математических реконструкций Сангаку, которая постоянно уже три года пополняется новыми результатами. Процесс организации этой работы описан в (Pavlova & al., 2017). Для восстановления математического ческой конфигурации, которая изображена на табличке Сангаку; проводят серию компьютерных экспериментов для установления устойчивых свойств этой конфигурации, а затем доказывают справедливость выдвинутых гипотез (оригинал и математическая реконструкция Сангаку храма Ago представлены на рисунках 4 и 5).

Рисунок 4. Сангаку храма Ago

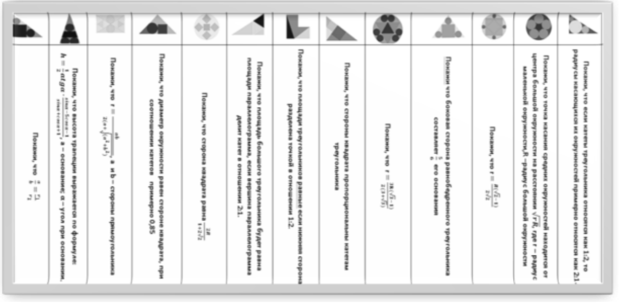

Рисунок 5. Математическая реконструкция Сангаку храма Ago

Пример 3. ***Задачи на отыскание и использование геометрических инвариантов.*** Еще одним направлением работы, в котором также эффективно привлечение компьютерных экспериментов является решение и конструирование задач на разыскание и использование геометрических инвариантов – точек, положение которых не меняется относительно данной конфигурации при изменении параметров ее модели.

Задачи этого типа привлекли наше внимание после прочтения сборника (Ivanov & Ryzhik, 2013). В нем была представлена задача о пиратском кладе. Геометрическим инвариантом являлось место положения клада – середина отрезка между двумя метками. Метки получены путем измерения расстояний от пальмы до гор и прохождения такого же расстояния после поворота на 90^o (см. рисунок 6). Компьютерный эксперимент, связанный с изменением места положения пальмы показывает, что положение клада не зависит от этих изменений. Это удивительный для учащихся факт вызывает желание „разгадать тайну инварианта”.

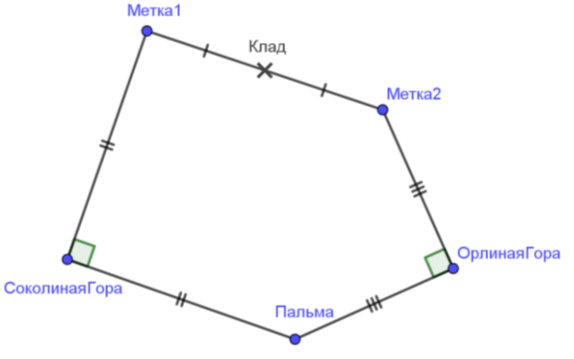

Рисунок 6. Задача о пиратском кладе

Эта идея была взята нами за основу еще одного сетевого исследовательского проекта „Математическая мозайка”, который был организован в 2016 году. Суть и результаты проекта описаны в (Gorskaya, Kopteva, Mikurov & al., 2017). Каждой команде учащихся была предложена своя задача на геометрический инвариант. Необходимо было выявить инварианты, а затем сблизить условия задач так, чтобы составить общую задачу.

Задача 1. На сторонах AB и CB треугольника ABC выбраны точки M и N так, что $AM:MB = m$; $CN:NB = n$. Прямая MN пересекает AC в точке T. Исследуйте зависимость положения точки T от вида треугольника. Получите формулу для выражения отношения $AT:TC$.

Задача 2. По двум пересекающимся прямым с равными скоростями движутся две точки A и B. Доказать, что существует такая точка плоскости, которая во все моменты времени равноудалена от них.

Задача 3. Построить окружность, которая касается данной окружности и проходит через две данные точки плоскости, содержащие эту окружность.

Главным результатом совместной работы стало составление и решение следующей задачи.

Дан произвольный треугольник ABC и описанная около него окружность Γ с центром O (см. Рисунок 7). Точки M и N находятся на прямых BA и BC соответственно так, что $AM:MB=m$ и $CN:NB = n$. На прямой MN отмечены точки P и Q так, что они одновременно внутренние (или внешние) по отношению к Γ и удовлетворяют условиям и $QM : QN = q$. Через точки P и Q проведены окружности k_1 и k_2, касающиеся окружности Γ в точках U_1 и U_2 соответственно. Прямая MN пересекает окружность Γ в точках A_1 и A_2, а A'_1 и A'_2 – это такие точки на Γ, что прямые BA'_1 и BA'_2 симметричны прямым BA_1 и BA_2 соответственно относительно BU_1 и BU_2. Точки M и N движутся по прямыми BA и BC так, что $\frac{m}{n}$, p и q – постоянные числа. Предположим, что в некоторый момент времени движение прямой MN останавливается, фиксируя точки A_j и A'_j (или их образы / прообразы), Потом движение продолжается. Точки фиксируются со скоростью $v_j (j = 1, 2)$ на прямых BA_j и $BA'_j (j = 1,2)$ и продолжают двигаться по этим (неподвижным) прямым с теми же скоростями.

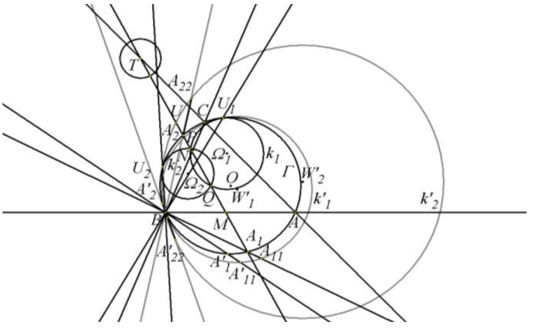

Рисунок 7. Итоговая задача проекта „Математическая мозаика“

Докажите, что:

а) геометрическим местом прямых MN является пучок прямых, проходящих через постоянную точку T прямой AC;

б) все положения точек A_j и $A'_j (j = 1,2)$ для соответственного им положения MN находятся на одинаковом расстоянии от некоторой фиксированной точки, которая описывает Γ при изменении MN;

в) геометрическое место точек U пересечения касательных к Γ, проходящих через U_1 и U_2, является кривой второго порядка k';

г) центры Ω_1 и Ω_2 окружностей k_1 и k_2 описывают кривую второго порядка k'';

д) OT является общей фокальной осью кривых k' и k''.

4. Особенности организации взаимодействия учащихся с учеными в области экспериментальной математики. Говоря об образовательном значении экспериментальной математики отметим, что это та область, в которой учащиеся могут чувствовать себя полноценными членами научного сообщества. Такую возможность необходимо использовать для подготовки выпускников школ к научной деятельности в формате Science 2.0 в целях формирования опыта сетевого взаимодействия в научной сфере; использования компьютерных экспериментов для поддержки решения исследовательских задач; создания динамических визуализаций результатов; участия в обсуждении научных результатов на профессиональных форумах.

Для организации сетевого взаимодействия учащихся, учителей и ученых в области экспериментальной математики нами разработана платформа „Пишем сами“. Основное назначение данной платформы – поддержка проектов, реализуемых на принципе двухстороннего краудсорсинга. Первая сторона: использование потенциала научных и научно-педагогических работников, студентов и аспирантов для формирования у учащихся опыта исследовательской деятельности в области экспериментальной математики. Вторая сторона: использование потенциала учащихся и учителей математики для оказания помощи ученым в решении их научно-исследовательских задач.

Любой ученый может стать модератором страницы или раздела платформы для привлечения учащихся к решению задач экспериментальной математики. Для участия в проекте ему лишь достаточно заявить о своем желании координатору и завести аккаунт на облачном сервисе для размещения своих материалов.

Сегодня на данной платформе развернуто два больших проекта: проект по созданию электронной энциклопедии замечательных кривых и проект по созданию энциклопедии математических анимаций, а также создана страница по привлечению учащихся к решению авторских задач. Каждый проект представлен вводной статьей, оглавлением, сведениями о модераторах разделов и статьями – матрицами. Статья-матрица – это серия предложенных модератором задач, совокупность решений которых превращает ее в статью электронной энциклопедии, сопровожденную компьютерными анимациями, выполненными в Geo Gebra.

Любой ученик или команда учащихся может заявить о намерении подключиться к решению предложенных задач того или иного раздела. После этого они получают доступ к папкам облачного сервиса для размещения своих материалов и совместной работы над их содержанием.

Работу учащихся оценивает и корректирует модератор раздела и его помощники (студенты и аспиранты). Результаты, прошедшие экспертную оценку, размещаются на сайте проекта в статусе препринта статьи для дальнейшего обсуждения и развития. Кроме того, модераторы дают рекомендации авторам результатов по дальнейшему их продвижению: представлению на конкурс исследовательских работ, публикации в научных журналах.

4. Выводы. Ресурс „Пишем сами“ только начал свою работу. Сегодня в качестве участников проекта зарегистрировано семь ученых и четыре команды учащихся. Развитие и продвижение этого проекта требует еще большой работы, однако авторы уверены, что у сетевых исследовательских краудсорсинг-проектов в области экспериментальной математики большой потенциал и в образовательном, и в научном плане.

REFERENCES/ЛИТЕРАТУРА

Shneiderman, B. (2008). Science 2.0., *Science*, 319 (5868), 1349 – 1350.

Waldrop, M. M. (2008). Science 2.0., *Scientific American*, 298 (5), pp 68 – 73.

Miloslavov, A. S. (2015). Science 2.0: A new scientific paradigm or the development of research tools?, *Information Society: Education, Science, Culture and Technologies of the Future: A collection of scientific articles of the XVIII Joint Conference “Internet and Contemporary Society” IMS-2015*, St. Petersburg.

Petrova, A. B. (2016). Ispolzovaniye innovatsionnykh tekhnologiy pri vypolnenii issledovatelskikh proyektov po Ekologii i Biologii, *Sbornik: Aktualnye problemi sotsialno-ekonomicheskoy i ekologicheskoy bezopasnosti Povolzhskogo regiona (Sbornik materialov VIII mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii*). 324 – 327.

Krasovskiy, N. N. (2003). Razmyshleniya o matematicheskom obrazovanii, *Izvestiya UrGU, 27*, 5 – 13.

Borwein J., Bailey D. (2004), *Mathematics by Experiment: plausible reasoning in the 21st century*. Book Reviews, 199 − 201.

Van Lamoen, F. (2000). Problem 10830, *Amer. Math. Monthly 107/863*.

Kin Y. Li (2001). Concyclic problems. *Mathematical Excalibur, volume 6, issue 1*, 1 – 2.

Shabanova, M., M. Belorukova, R. Atamuratova & V. Nenkov (2016). Pervyy mezhdunarodnyy setevoy issledovatelskiy proyekt uchashchikhsya v MITE. *Matematika I informatika, 6*, 567 – 570

Gorskaya, K., D. Kopteva, D. Mikurov, E. Mudebayev, K. Mukhambetov, A. Temirkhanov, L. Stefanova, I. Khristova, R. Ivanova (2016). Nekotoryye trayektorii, kotoryye opredeleny ravnobedrennymi treugolnikami. *Matematikai i nformatika*, 6, 572 – 588.

Pavlova. M., M. Shabanova, L. Forkunova, S. Kotova, V. Parsheva, V. Teplyakov (2017). *Eksperimentalnaya matematika: ucheb. posobiye*. Arkhangelsk: AI IOO, 184 p.

Ivanov S. G., V. I. Ryzhik (2013). *Issledovatelskiye i proyektnyye zadaniya po planimetrii s ispolzovaniyem sredy Zhivaya matematika. FGOS*. Moskwa.: Prosveshcheniye, 144p.

Gorskaya, K., D. Kopteva, D. Mikurov, E. Mudebayev, K. Mukhambetov, A. Temirkhanov, L. Stefanova, I. Khristova, R. Ivanova (2017). Tri invarianty v odnu zadachu. *Matematika I informatika*, 6, 551 – 564.

EXPERIMENTAL MATHEMATICS AS ENVIRENMENT FOR THE PREPARATION OF STUDENTS FOR RESEARCH IN THE FORM "SCIENCE 2.0"

Abstract. The paper presents the experimental mathematics as a problem environment for students' research activities. Such an area is available to students who have different level of mathematical competence. The organization of students' research activities in experimental mathematics environment is a basis for their preparation for work in the form "Science 2.0". Students will learn the following main characteristics of Science 2.0: working on a project, participation in crowd-sourcing, research network, computer supported research.

✉ **Prof. Maria Shabanova, DSc.**
Northern (Arctic) Federal University Named after M. V. Lomonosov
17, Severnaya Dvina Emb.
Arkhangelsk, Russian Federation
E-mail: shabanova.maria-pomorsu@yandex.ru

✉ **Dr. Larisa Udovenko, Assoc. Prof.**
Moscow State Pedagogical University
1/1, M. Pirogovskaya St.
Moscow, Russian Federation
E-mail: lau-18@yandex.ru

✉ **Mr. Magomedhan Nimatulaev**
Financial University under the Government of the Russian Federation
49, Leningradsky Prospect
Moscow, Russian Federation
E-mail: mnimatulaev@fa.ru