

ЕКСТРЕМАЛНИ СВОЙСТВА НА ТОЧКАТА НА ЛЕМОАН В ЧЕТИРИЪГЪЛНИК

¹⁾Веселин Ненков, ²⁾Станислав Стефанов, Хаим Хаимов

¹⁾ Висше военноморско училище „Н. Й. Вапцаров“ – Варна

²⁾ Технически университет – София

Резюме. В статията са доказани някои екстремални свойства на една забележителна точка в изпъкнал четириъгълник.

Keywords: quadrilateral; notable point; extremal properties

Една от забележителните точки в триъгълника, характеризираща се с много и разнообразни свойства, е точката на Лемоан. Както е показано в (Найтов, 2011), тя има аналог в изпъкнал четириъгълник. Това е точка, наподобяваща точката на Лемоан в триъгълника както по дефиниция, така и по част от свойствата си. Към последните се причисляват и някои екстремални свойства на тази точка. Тук ще се спрем по-задълбочено на тях. Да припомним първо дефиницията на точката на Лемоан в четириъгълник.

Определение 1. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник. Точката в него, разстоянията от която до срещуположните страни на $ABCD$ са пропорционални на съответните им страни, ще наричаме точка на Лемоан.

С други думи, ако дължините на страните AB , BC , CD и DA на четириъгълника означим съответно с a , b , c и d , а разстоянията от произволна точка до тези страни – с h_1 , h_2 , h_3 и h_4 (фиг. 1), то точката на Лемоан е онази точка от вътрешността на четириъгълника, за която са изпълнени равенствата:

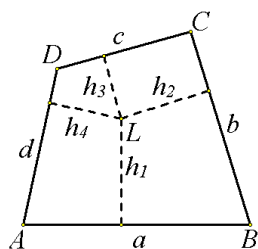
$$(1) \quad \frac{h_1}{a} = \frac{h_3}{c} = k_1, \quad \frac{h_2}{b} = \frac{h_4}{d} = k_2,$$

където k_1 и k_2 са положителни числа, характеризиращи четириъгълника. Ще ги наричаме коефициенти на Лемоан.

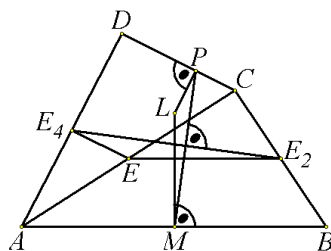
Определение 2. Ако в четириъгълника $ABCD$ коефициентите на Лемоан k_1 и k_2 са равни, ще го наричаме Лемоанов.

Забележка 1. В Лемоанов четириъгълник за точката на Лемоан очевидно са изпълнени пропорциите:

$$(2) \quad \frac{h_1}{a} = \frac{h_2}{b} = \frac{h_3}{c} = \frac{h_4}{d}.$$



Фигура 1



Фигура 2

Ще разгледаме някои свойства на педалния четириъгълник на точката на Лемоан. За целта ще използваме въртяща хомотетия в равнината. Тя е композиция от ротация и хомотетия с общ център. Ъгълът на ротацията и коефициентът на хомотетията се наричат съответно ъгъл и коефициент на въртящата хомотетия. Преобразуването въртяща хомотетия очевидно запазва ъглите между правите и преобразува разстоянията между точките така, както го прави хомотетията. Ще ни е необходима следната:

Лема 1. Нека $ABCD$ е произволен изпъкнал четириъгълник и проекциите на неговата точка на Лемоан L върху страните AB и DC са съответно M и P . Точките E_2 , E_4 и E са средите съответно на BC , AD и AC , а k_1 е коефициентът на Лемоан, отразяващ отношението на разстоянията от точката L до AB и DC . Тогава ΔE_2EE_4 е образ на ΔMLP при композицията от въртяща хомотетия с център L , ъгъл $+90^\circ$ и коефициент $\frac{1}{2k_1}$ и транслация на вектор $\overrightarrow{LE}$.

Доказателство. По условие имаме $LM \perp AB$ и $EE_2 \parallel AB$ (средна отсечка в ΔABC). Следователно $LM \perp EE_2$ (фиг. 2). От друга страна, $\frac{LM}{AB} = k_1$ (според определение 1) и $AB = 2EE_2$, поради което $\frac{LM}{2EE_2} = k_1$, т.е. $\frac{EE_2}{LM} = \frac{1}{2k_1}$. Аналогично се доказва, че $LP \perp EE_4$ и $\frac{EE_4}{LP} = \frac{1}{2k_1}$. Оттук можем да заключим, че при въртящата хомотетия h с център L , ъгъл $+90^\circ$ и коефициент $\frac{1}{2k_1}$ триъгълникът MLP се изобразява в триъгълник със страни, успоредни и равни на съответните страни на триъгълник E_2EE_4 . На свой ред, при транслация с вектор $\overrightarrow{LE}$ този триъгълник се изобразява в ΔE_2EE_4 . Следователно ΔE_2EE_4 е образ на ΔMLP при композицията от двете преобразувания.

Теорема 1. Точката на Лемоан за изпъкналия четириъгълник $ABCD$ е L , проекциите на L върху AB , BC , CD и DA са съответно M , N , P и Q , а средите на страните AB , BC , CD и DA са съответно E_1 , E_2 , E_3 и E_4 . Изпълнени са релациите:

$$(3) \quad PM \perp E_4E_2, PM = 2k_1E_4E_2, QN \perp E_1E_3, QN = 2k_2E_1E_3,$$

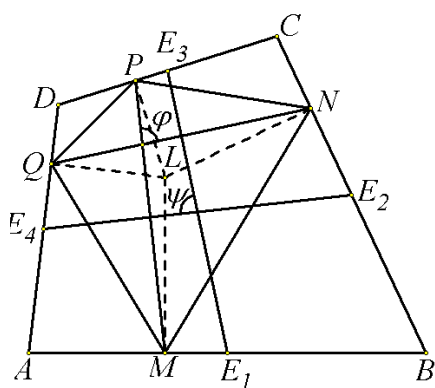
където k_1 и k_2 са коефициентите на Лемоан.

Доказателство. Означаваме средата на диагонала AC с E (фиг. 2). Триъгълникът E_2EE_4 е образ на триъгълника MLP при композицията от въртяща хомотетия с център L , ъгъл $+90^\circ$ и коефициент $\frac{1}{2k_1}$ и трансация с вектор $\overrightarrow{LE}$ (съгласно лема 1). Страните E_4E_2 и PM на тези триъгълници са съответни при композицията от двете преобразувания. Следователно $E_4E_2 \perp PM$ и $E_4E_2 = \frac{1}{2k_1} PM$, т.е. $PM = 2k_1E_4E_2$. Така доказахме първите две релации в (3). Аналогично се доказват и останалите две релации.

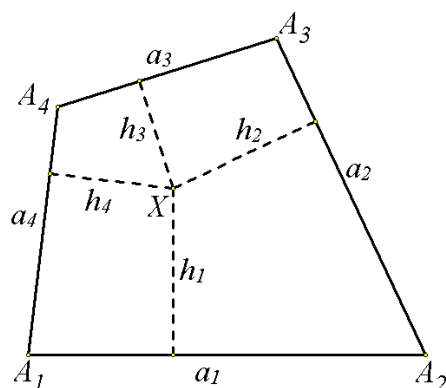
Интересна е следващата връзка между лицето на четириъгълника $ABCD$ и лицето на педалния четириъгълник на неговата точка на Лемоан.

Теорема 2. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник и L е неговата точка на Лемоан. Ако S е лицето на четириъгълника $ABCD$, а S_1 е лицето на педалния четириъгълник на точката L , то $S_1 = 2k_1k_2S$, където k_1 и k_2 са коефициентите на Лемоан.

Доказателство. Означаваме средите на страните AB , BC , CD и DA съответно с E_1 , E_2 , E_3 и E_4 , а проекциите на точката L върху тези страни съответно с M , N , P и Q (фиг. 3).



Фигура 3



Фигура 4

Нека ъгълът между диагоналите PM и QN на педалния четириъгълник на точката L е φ , а ъгълът между правите E_4E_2 и E_1E_3 е ψ . Имаме $PM = 2k_1E_4E_2$ и $QN = 2k_2E_1E_3$ (съгласно теорема 1). От друга страна, понеже $PM \perp E_4E_2$ и $QN \perp E_1E_3$ (съгласно същата теорема 1), то $\varphi = \psi$ (ъгли с перпендикулярни рамене). Като вземем предвид, че $S_{E_1E_2E_3E_4} = \frac{1}{2}S$ (според известното свойство на четириъгълника – теорема на Вариньон) и заместим с горните две равенства, то за лицето на четириъгълника $MNPQ$ получаваме:

$$S_1 = \frac{1}{2}PM \cdot QN \sin \varphi = \frac{1}{2}2k_1E_4E_2 \cdot 2k_2E_1E_3 \sin \psi = 4k_1k_2 \frac{1}{2}E_4E_2 \cdot E_1E_3 \sin \psi = 4k_1k_2S_{E_1E_2E_3E_4} = 2k_1k_2S.$$

Забележка 2. В (Haimov, 2011) е отбелязано, че коефициентите k_1 и k_2 на Лемоан се определят по формулите

$$k_1 = \frac{bd(\sin A \sin D + \sin B \sin C)}{\Delta} \text{ и } k_2 = \frac{ac(\sin A \sin B + \sin C \sin D)}{\Delta},$$

където $\Delta = ab \sin D + bc \sin A + cd \sin B + da \sin C$.

Сега ще се спрем на две екстремални свойства на точката на Лемоан в Лемоанов четириъгълник. Те са аналогични на познатите екстремални свойства на точката на Лемоан в триъгълника.

Теорема 3. Нека $A_1A_2A_3A_4$ е Лемоанов четириъгълник. Измежду всички точки в $A_1A_2A_3A_4$ най-малка сума от квадратите на разстоянията до страните му има точката на Лемоан L .

Доказателство. Означаваме дължините на страните A_1A_2 , A_2A_3 , A_3A_4 и A_4A_1 на четириъгълника $A_1A_2A_3A_4$ съответно с a_1 , a_2 , a_3 и a_4 , а разстоянията от произволна точка X в него до тези страни – съответно с h_1 , h_2 , h_3 и h_4 . Четириъгълникът $A_1A_2A_3A_4$ по условие е Лемоанов, следователно точката му

на Лемоан L е единствената точка в него, за която е изпълнена пропорцията

$$\frac{h_1}{a_1} = \frac{h_2}{a_2} = \frac{h_3}{a_3} = \frac{h_4}{a_4} \text{ (според забележка 1) (фиг. 4).}$$

От известното неравенство на Коши-Буняковски-Шварц имаме:

$$\left(\sum_{i=1}^4 a_i h_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^4 a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^4 h_i^2 \right),$$

като равенство се достига точно тогава, когато $\frac{h_1}{a_1} = \frac{h_2}{a_2} = \frac{h_3}{a_3} = \frac{h_4}{a_4}$. Но

$\sum_{i=1}^4 a_i h_i = 2S$, където S е лицето на $A_1A_2A_3A_4$. Следователно горното нера-

венство можем да запишем във вида:

$$4S^2 \leq \left(\sum_{i=1}^4 a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^4 h_i^2 \right).$$

Равенството, както споменахме, се достига само ако $\frac{h_1}{a_1} = \frac{h_2}{a_2} = \frac{h_3}{a_3} = \frac{h_4}{a_4}$.

Последното е изпълнено точно тогава, когато X съвпада с точката L (според полученото по-горе). Оттук можем да заключим, че: $\sum_{i=1}^4 h_i^2 \geq \frac{4S^2}{\sum_{i=1}^4 a_i^2}$. Равен-

ство се достига, когато $X \equiv L$. Следователно за точката L сумата $\sum_{i=1}^4 h_i^2$ е минимална.

Теорема 4. Нека $A_1A_2A_3A_4$ е Лемоанов четириъгълник. Измежду всички точки в $A_1A_2A_3A_4$ най-малка сума от квадратите на страните и диагоналите на педалния си четириъгълник има точката на Лемоан L .

Доказателство. Нека точката X е вътрешна за $A_1A_2A_3A_4$. Означаваме проекциите ѝ върху страните A_1A_2 , A_2A_3 , A_3A_4 и A_4A_1 съответно с X_1 , X_2 , X_3 и X_4 . Проекциите на точката на Лемоан върху тези страни означаваме с L_1 , L_2 , L_3 и L_4 (фиг. 5). Точката L е център на тежестта на педалния си четириъгълник $L_1L_2L_3L_4$ (Наймов, 2011), ето защо имаме:

$$(4) \quad \sum_{i=1}^4 LL_i^2 = \frac{1}{4} \sum_{1 \leq i < j \leq 4} L_i L_j^2.$$

(съгласно формулата за инерционния момент на центъра на тежестта). Нека G е центърът на тежестта на педалния четириъгълник $X_1X_2X_3X_4$ на точката X и G_1 , G_2 , G_3 и G_4 са проекциите на точката G върху страните A_1A_2 , A_2A_3 ,

A_3A_4 и A_4A_1 . Съгласно същата формула имаме: $\sum_{i=1}^4 GX_i^2 = \frac{1}{4} \sum_{1 \leq i < j \leq 4} X_i X_j^2$. По-

неже $GX_i^2 = GG_i^2 + G_iX_i^2$ (за всеки от правоъгълните триъгълници GG_iX_i ($i = 1, 2, 3, 4$)), то последното равенство можем да представим така:

$$(5) \quad \sum_{i=1}^4 GG_i^2 + \sum_{i=1}^4 G_iX_i^2 = \frac{1}{4} \sum_{1 \leq i < j \leq 4} X_i X_j^2.$$

Но измежду точките в четириъгълника $A_1A_2A_3A_4$ най-малка сума от квадратите на разстоянията до страните му има точката на Лемоан (съгласно теорема 3). Ето защо имаме:

$$(6) \quad \sum_{i=1}^4 GG_i^2 \geq \sum_{i=1}^4 LL_i^2,$$

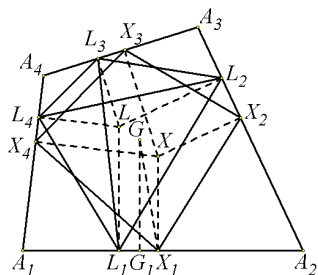
като равенството се достига само ако $G \equiv L$. От (5) и (6) следва неравенството:

$$\frac{1}{4} \sum_{1 \leq i < j \leq 4} X_i X_j^2 \geq \sum_{i=1}^4 GG_i^2 \geq \sum_{i=1}^4 LL_i^2,$$

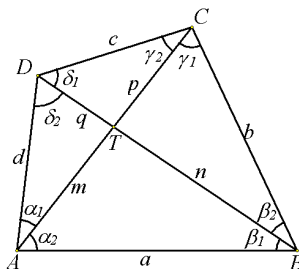
т.е. неравенството:

$$(7) \quad \frac{1}{4} \sum_{1 \leq i < j \leq 4} X_i X_j^2 \geq \sum_{i=1}^4 LL_i^2.$$

Равенството се достига само ако $G \equiv L$ (за да имаме равенство в (6)) и едновременно с това $\sum_{i=1}^4 G_i X_i^2 = 0$ (както следва от (5)). Последното е изпълнено само при $G_i \equiv X_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$), т.е. при $G \equiv X$. Заедно с $G \equiv L$ това условие води до условието: $X \equiv L$. Предвид (4) неравенството (7) може да се представи така: $\sum_{1 \leq i < j \leq 4} X_i X_j^2 \geq \sum_{1 \leq i < j \leq 4} L_i L_j^2$. Равенството тук се достига само ако $X \equiv L$. Получихме, че сумата от квадратите на страните и диагоналите на педалния четириъгълник на точката X е по-голяма или равна на сумата от квадратите на страните и диагоналите на педалния четириъгълник на точката на Лемоан L . Понеже равенството се достига само ако $X \equiv L$, то последната сума е минимална.



Фигура 5



Фигура 6

Сега ще се спрем на две екстремални свойства на лицето на педалния четириъгълник на точката на Лемоан. Предварително ще докажем следната

Лема 2. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник с перпендикулярни диагонали и пресечна точка на диагоналите T , в който $AT = m$, $BT = n$, $CT = p$ и $DT = q$. Лицето S_1 на педалния четириъгълник на точката на Лемоан се определя по формулата:

$$(*) \quad S_1(q) = \frac{(q+n)^3(p+m)^3[mq(p^2+n^2)+np(m^2+q^2)][mn(p^2+q^2)+pq(m^2+n^2)]}{\left\{(n^2+p^2)[(m^2+n^2)(p+m)q+(q^2+p^2)(n+q)m]+(m^2+q^2)[(p^2+q^2)(m+p)n+(m^2+n^2)(n+q)p]\right\}^2}.$$

Доказателство. Означаваме $\angle CAD = \alpha_1$, $\angle CAB = \alpha_2$, $\angle ABD = \beta_1$, $\angle CBD = \beta_2$, $\angle ACB = \gamma_1$, $\angle ACD = \gamma_2$, $\angle BDC = \delta_1$ и $\angle ADB = \delta_2$. Понеже $AC \perp BD$, лесно получаваме следните равенства:

$$(8) \quad \sin \alpha_1 = \frac{q}{d}, \cos \alpha_1 = \frac{m}{d}, \sin \beta_1 = \frac{m}{a}, \cos \beta_1 = \frac{n}{a}, \sin \gamma_1 = \frac{n}{b}, \cos \gamma_1 = \frac{p}{b}, \sin \delta_1 = \frac{p}{c}, \cos \delta_1 = \frac{q}{c}, \\ \sin \alpha_2 = \frac{n}{a}, \cos \alpha_2 = \frac{m}{a}, \sin \beta_2 = \frac{p}{b}, \cos \beta_2 = \frac{n}{b}, \sin \gamma_2 = \frac{q}{c}, \cos \gamma_2 = \frac{p}{c}, \sin \delta_2 = \frac{m}{d}, \cos \delta_2 = \frac{q}{d}.$$

Като използваме тези равенства, намираме:

$$(9) \quad \begin{aligned} \sin A &= \sin(\alpha_1 + \alpha_2) = \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 = \frac{m(q+n)}{ad}, \\ \sin B &= \sin(\beta_1 + \beta_2) = \sin \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \beta_1 \sin \beta_2 = \frac{n(m+p)}{ab}, \\ \sin C &= \sin(\gamma_1 + \gamma_2) = \sin \gamma_1 \cos \gamma_2 + \cos \gamma_1 \sin \gamma_2 = \frac{p(n+q)}{bc}, \\ \sin D &= \sin(\delta_1 + \delta_2) = \sin \delta_1 \cos \delta_2 + \cos \delta_1 \sin \delta_2 = \frac{q(p+m)}{cd}. \end{aligned}$$

Означаваме лицето на четириъгълника $ABCD$ с S . Лицето S_1 на педалния четириъгълник на точката на Лемоан се определя чрез S по формулата $S_1 = 2k_1k_2S$, където

$$(10) \quad k_1 = \frac{bd}{\Delta}(\sin A \sin D + \sin B \sin C), \quad k_2 = \frac{ac}{\Delta}(\sin A \sin B + \sin C \sin D),$$

$$(10') \quad \Delta = ab \sin D + bc \sin A + cd \sin B + da \sin C.$$

(вж. теорема 2 и забележката след нея). Дължините a , b , c и d на страните на четириъгълника $ABCD$ се определя по Питагоровата теорема, както следва (фиг. 6)

$$(11) \quad a = \sqrt{m^2 + n^2}, \quad b = \sqrt{n^2 + p^2}, \quad c = \sqrt{p^2 + q^2}, \quad d = \sqrt{q^2 + m^2}.$$

От (9) и (10) изразяваме първия член в (10')

$$ab \sin D = q(p+m) \frac{\sqrt{(m^2+n^2)}\sqrt{(n^2+p^2)}}{\sqrt{(p^2+q^2)}\sqrt{(q^2+m^2)}}.$$

По същия начин намираме и останалите членове в (10'). Така намираме

$$(12) \quad \begin{aligned} \Delta = & q(p+m) \frac{\sqrt{(m^2+n^2)}\sqrt{(n^2+p^2)}}{\sqrt{(p^2+q^2)}\sqrt{(q^2+m^2)}} + m(q+n) \frac{\sqrt{(n^2+p^2)}\sqrt{(q^2+p^2)}}{\sqrt{(m^2+n^2)}\sqrt{(m^2+q^2)}} + \\ & + n(m+p) \frac{\sqrt{(p^2+q^2)}\sqrt{(m^2+q^2)}}{\sqrt{(m^2+n^2)}\sqrt{(n^2+p^2)}} + p(n+q) \frac{\sqrt{(m^2+q^2)}\sqrt{(m^2+n^2)}}{\sqrt{(n^2+p^2)}\sqrt{(q^2+p^2)}}. \end{aligned}$$

От (10) с помощта на (9) и (11) получаваме

$$(13) \quad \begin{aligned} k_1 = & \frac{\sqrt{(n^2+p^2)(m^2+q^2)}}{\Delta} \left[\frac{mq(q+n)(p+m)}{(m^2+q^2)\sqrt{(m^2+n^2)(q^2+p^2)}} + \frac{np(m+p)(n+q)}{(p^2+n^2)\sqrt{(m^2+n^2)(q^2+p^2)}} \right], \\ k_2 = & \frac{\sqrt{(m^2+n^2)(p^2+q^2)}}{\Delta} \left[\frac{mn(q+n)(p+m)}{(m^2+n^2)\sqrt{(q^2+m^2)(p^2+n^2)}} + \frac{pq(n+q)(p+m)}{(p^2+q^2)\sqrt{(n^2+p^2)(m^2+q^2)}} \right]. \end{aligned}$$

От друга страна, за лицето S_1 на педалния четириъгълник на точката на Лемоан, изразена чрез лицето S на четириъгълника $ABCD$ от по-горе, имаме $S_1 = 2k_1k_2S = k_1k_2AC \cdot BD = k_1k_2(m+p)(n+q)$ (фиг. 6). От това равенство, като използваме (13) и (12), непосредствено получаваме доказвания израз за $S_1(q)$. С това лемата е доказана.

Теорема 5. Нека N е множеството от всички изпъкнали четириъгълници $ABCD$ с перпендикулярни диагонали и пресечна точка на диагоналите T , в които разстоянията AT , BT и CT са равни на k , а разстоянието DT е произволно. Лицето S_1 на педалните четириъгълници на точките на Лемоан

на четириъгълниците от множеството N е максимално за четириъгълника, в който $DT = (\sqrt{13} - 2)k$.

Доказателство. Означаваме $DT = q$ и лицето на педалния четириъгълник на точката на Лемоан на променливия четириъгълник от множеството N с $S_1(q)$. С помощта на равенство (*) от лемата определяме

$S_1(q) = \frac{2k^3(q+k)^3}{(q^2+3k^2)^2}$. Намираме производната на функцията $S_1(q)$:

$$S'_1(q) = \frac{2k^3(q+k)^2}{(q^2+3k^2)^3} [k(\sqrt{13}-2)-q][k(\sqrt{13}+2)+q].$$

Понеже $S'_1(q) > 0$ при $0 < q < k(\sqrt{13}-2)$ и $S'_1(q) < 0$ при $q > k(\sqrt{13}-2)$, то функцията $S_1(q)$ е растяща в интервала $(0, k(\sqrt{13}-2))$ и намаляваща в интервала $(k(\sqrt{13}-2), +\infty)$. Следователно тя достига максимум в интервала $(0, +\infty)$ при $q = k(\sqrt{13}-2)$ (тъй като $S_1(q)$ е непрекъсната в интервала $(0, +\infty)$). Така доказахме, че лицето $S_1(q)$ на педалните четириъгълници на точките на Лемоан на четириъгълниците от множеството N е максимално за четириъгълника, в който $DT = (\sqrt{13}-2)k$.

Ще разгледаме още едно екстремално свойство на лицето на педалния четириъгълник на точката на Лемоан.

Теорема 6. Нека P е множеството от всички изпъкнали четириъгълници с перпендикулярни диагонали, които имат дължина $2k$ и единият диагонал разполовява другия. Лицето на педалните четириъгълници на точките на Лемоан на четириъгълниците от множеството P достига максимална стойност при квадрат с дължина на страната $k\sqrt{2}$.

Доказателство. Нека $ABCD$ е произволен четириъгълник от множеството P и T е пресечната точка на диагоналите му (фиг. 6). Без ограничение можем да считаме, че диагоналът BD разполовява диагонала AC , т.е., че $AT = CT = k$. Също без ограничение можем да предполагаме, че $DT \leq BT$,

т.е., че $DT \leq \frac{1}{2}BD = k$. Означаваме $DT = q$, тогава $0 < q \leq k$. Имаме оче-

видно $BT = 2k - q$. В означенията на лема 2 за четириъгълника $ABCD$ е изпълнено $m = p = k$, $n = 2k - q$ (фиг. 4). Тогава според равенство (*) за лицето $S_1(q)$ на педалния четириъгълник на точката на Лемоан на променливия четириъгълник $ABCD$ от множеството P получаваме:

$$S_1(q) = \frac{(2k)^3(2k)^3[kq(5k^2 - 4kq + q^2) + k(2k - q)(k^2 + q^2)][k(2k - q)(k^2 + q^2) + kq(5k^2 - 4kq + q^2)]}{\{(5k^2 - 4kq + q^2)[(5k^2 - 4kq + q^2)2kq + (k^2 + q^2)2kk] + (k^2 + q^2)[(k^2 + q^2)(2k - q)2k + (5k^2 - 4kq + q^2)2kk]\}^2}.$$

След преобразуване намираме $S_1(q) = \frac{4k^6}{(q^2 - 2kq + 3k^2)^2}$. За да докажем, че

лицето $S_1(q)$ на педалния четириъгълник на точката на Лемоан на промен-

ливия четириъгълник $ABCD$ от множеството P достига максимална стойност в четириъгълник, който е квадрат с дължина на страната $k\sqrt{2}$, е достатъчно да докажем, че функцията $S_1(q)$ достига максимум в интервала $(0, k]$ при $q = k$, защото тогава за въпросния четириъгълник ще имаме $DT = k$, $BT = n = 2k - k = k$, $AT = CT = k$ и $AC \perp BD$, откъдето следва, че той ще е именно квадрат с дължина на страната $k\sqrt{2}$. Намираме производната на функцията $S_1(q)$:

$$S'_1(q) = \frac{16k^6(k - q)}{(q^2 - 2kq + 3k^2)^3}.$$

За знаменателя имаме $(q^2 - 2kq + 3k^2)^3 = [(q - k)^2 + 2k^2]^3 > 0$, откъдето следва, че $S'_1(q) > 0$ при $q \in (0, k)$. Тогава функцията $S_1(q)$ е растяща в интервала $(0, k)$ и понеже е непрекъсната в интервала $(0, k]$, тя достига максимум именно при $q = k$. Така се убедихме, че лицето на педалните четириъгълници на точките на Лемоан на четириъгълниците от множеството P достига максимална стойност при квадрат с дължина на страната $k\sqrt{2}$.

Накрая ще разгледаме едно екстремално свойство на точката на Лемоан, свързано с разстоянията ѝ до страните на четириъгълника.

Теорема 7. Нека $A_1A_2A_3A_4$ е изпъкнал четириъгълник с дължини на страните A_1A_2 , A_2A_3 , A_3A_4 и A_4A_1 съответно a_1 , a_2 , a_3 и a_4 . Нека разстоянията от произволна точка X от вътрешността на $A_1A_2A_3A_4$ до страните A_1A_2 , A_2A_3 , A_3A_4 и A_4A_1 са съответно h_1 , h_2 , h_3 и h_4 . Изразът

$a_1\sqrt{\frac{h_3}{h_1}} + a_2\sqrt{\frac{h_4}{h_2}} + a_3\sqrt{\frac{h_1}{h_3}} + a_4\sqrt{\frac{h_2}{h_4}}$ достига минимална стойност, равна на

$2(\sqrt{a_1a_3} + \sqrt{a_2a_4})$, при условие че точката X съвпада с точката на Лемоан L .

Доказателство. Измежду всички точки от вътрешността на четириъгълника $A_1A_2A_3A_4$ за точката на Лемоан и само за нея са изпълнени едновременно

равенствата $\frac{h_1}{a_1} = \frac{h_3}{a_3}$ и $\frac{h_2}{a_2} = \frac{h_4}{a_4}$ (вж. определение 1) (фиг. 4). От друга страна, от неравенството между средното аритметично и средното геометрично следва, че за произволна точка X от вътрешността на четириъгълника

$A_1A_2A_3A_4$ са изпълнени едновременно неравенствата: $\frac{h_1}{a_1} + \frac{h_3}{a_3} \geq 2\sqrt{\frac{h_1}{a_1} \cdot \frac{h_3}{a_3}}$ и $\frac{h_2}{a_2} + \frac{h_4}{a_4} \geq 2\sqrt{\frac{h_2}{a_2} \cdot \frac{h_4}{a_4}}$. Равенствата са изпълнени едновременно при условие, че $\frac{h_1}{a_1} = \frac{h_3}{a_3}$ и $\frac{h_2}{a_2} = \frac{h_4}{a_4}$. Лесно се доказва, че горните неравенства

са еквивалентни съответно с неравенствата: $a_3\sqrt{\frac{h_1}{h_3}} + a_1\sqrt{\frac{h_3}{h_1}} \geq 2\sqrt{a_1a_3}$ и

$a_2\sqrt{\frac{h_4}{h_2}} + a_4\sqrt{\frac{h_2}{h_4}} \geq 2\sqrt{a_2a_4}$, като равенствата са изпълнени едновременно при същото условие. Оттук чрез почленно събиране получаваме, че за произволна точка X в четириъгълника $A_1A_2A_3A_4$ е изпълнено неравенството:

$$a_1\sqrt{\frac{h_3}{h_1}} + a_2\sqrt{\frac{h_4}{h_2}} + a_3\sqrt{\frac{h_1}{h_3}} + a_4\sqrt{\frac{h_2}{h_4}} \geq 2(\sqrt{a_1a_3} + \sqrt{a_2a_4}),$$

като равенство се достига при условието $\frac{h_1}{a_1} = \frac{h_3}{a_3}$ и $\frac{h_2}{a_2} = \frac{h_4}{a_4}$. От направените

по-горе разсъждения следва, че това условие ще е изпълнено, ако и само ако

$X \equiv L$. Така получаваме, че изразът $a_1\sqrt{\frac{h_3}{h_1}} + a_2\sqrt{\frac{h_4}{h_2}} + a_3\sqrt{\frac{h_1}{h_3}} + a_4\sqrt{\frac{h_2}{h_4}}$ достига минимална стойност, равна на $2(\sqrt{a_1a_3} + \sqrt{a_2a_4})$ при $X \equiv L$.

REFERENCES/ЛИТЕРАТУРА

- Haimov, H. (2011). Lemoine point, *Mathematics*, 6, 4-13 [Хаимов, Х. (2011). Точка на Лемоан, *Математика*, 6, 4 – 13.]
- Haimov, H. (2010). Geometry of the quadrilateral, *Mathematics Plus*, 2, 28 – 51 [Хаимов, Х. (2010). Геометрия на четириъгълника, *Математика плюс*, 2, 28 – 51.]
- Nenkov, V., S. Stefanov & H. Haimov (2016). The pseudocenter and the orthocenter – notable points in the quadrilateral, *Mathematics and Informatics*, 6, 614 – 525. [Ненков, В., С. Стефанов & Х. Хаимов (2016). Псевдоцентър и ортоцентър – забележителни точки в четириъгълника, *Математика и информатика*, 6, 614 – 625.]
- Nenkov, V. S. Stefanov & H. Haimov (2017). Geometry of quadrilateral, Miquel point, Inverse isogonality, *Mathematics and Informatics*, 1, 81 – 93. [Ненков, В., С. Стефанов & Х. Хаимов. (2017). Геометрия на четириъгълника, точка на Микел, инверсна изогоналност, *Математика и информатика*, 1, 81 – 93.]
- Nenkov, V., S. Stefanov (2018). Extremal properties of two notable points in a convex quadrilateral, *Year Book of Shumen University*, Shumen, 27 – 36, ISSN 1311-834X [Ненков, В. С. Стефанов (2018). Екстремални свойства на две забележителни точки в изпъкнал четириъгълник, *Годишник на Шуменския университет*, Шумен, 27 – 36, ISSN 1311-834X]
- Stefanov, S. (2017). Second pseudo center of quadrilateral, *Mathematics and Informatics*, 3, 261–270. [Стефанов, С. (2017). Втори псевдоцентър на четириъгълника, *Математика и информатика*, 3, 252 – 261.]
- Sergeeva, T., M. Shabanova & S. Grozdev (2014). *Foundation of dynamic geometry*. Moscow: ASOU. [Сергеева, Т., М. Шабанова & С. Гроздев (2014). Основы динамической геометрии. Москва: АСОУ.]
- Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice)*. Sofia: ADE.
- Georgieva, M. & S. Grozdev (2016). *Morfodinamikata za razvitiето na noosfernia intelekt*. (4th ed.). Sofia: Publ. House “Iztok-Zapad” (ISBN 987-619-152-869-1), 327 pages. [Георгиева, М. С. Гроздев. (2016). *Морфодинамиката за развитието на ноосферния интелект*. (4-то изд.). София: Изток – Запад. (ISBN 987-619-152-869-1), 327 стр.]
- Karaibryamov, S., B. Tsareva & B. Zlatanov (2013). Optimization of the Courses in Geometry by the Usage of Dynamic Geometry Software Sam, *The Electronic Journal of Mathematics and Technology*, Volume 7, Number 1, 22-51, ISSN 1933-2823.

Zlatanov, B. (2013). Some Properties of Reflection of Quadrangle about Point, *Annals. Computer Science Series*, 11, (1), 79 – 91.

Zlatanov, B. (2014). An Etude on one Sharygin's Problem, *Global Journal of Advanced Research on Classical and Modern Geometries*, 3, (2), 50 – 61.

EXTREMAL PROPERTIES OF THE LEMOINE POINT IN THE QUADRILATERAL

Abstract. Proofs are presented of some extremal properties of a notable point in a convex quadrilateral.

✉ **Dr. Veselin Nenkov, Assoc. Prof.**
“Nikola Vaptsarov” Naval Academy
73, Vasil Drumev St.
Varna, Bulgaria
E-mail: vnenkov@mail.bg

✉ **Mr. Stanislav Stefanov, PhD student**
Technical University Sofia
1000 Sofia, Bulgaria
E-mail: stanislav.toshkov@abv.bg

✉ **Mr. Haim Haimov, Researcher**
16, Bratya Shkorpil St.
9000 Varna, Bulgaria